دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

عنوان:

جواب های متناوب مثبت معادلات دیفرانسیل متناوب

اساتید راهنما:

دکتر حاجی محمد محمدی نژاد

دکتر امید ربیعی مطلق

نگارش:

اکرم ببری بجمه

تابستان ۱۳۸۸

چکیده

ما در این نوشتار به بررسی وجود، تعدد و عدم وجود جواب های متناوب مثبت با دورهٔ تناوب ω معادله دیفرانسیل تابعی

$$x'(t) = a(t)g(x(t))x(t) - \lambda b(t)f(x(t-\tau(t))) \qquad (۱)$$

که $\lambda > 0$ یک پارامتر مثبت می پردازیم و نشان خواهیم داد که تعداد جواب های متناوب مثبت با دورهٔ تناوب ω، از معادله دیفرانسیل (۱) به وسیله رفتار مجانبی خارج قسمت $\frac{f(u)}{u}$ در صفر و در بینهایت مشخص می‌شود. برای این منظور اگر $f_0 = lim_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}$ و $f_\infty = lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$ و i_0، را تعداد صفرها در $\{f_0, f_\infty\}$ و i_∞، را تعداد بی نهایت ها در $\{f_0, f_\infty\}$ تعریف کنیم، آنگاه نشان خواهیم داد که معادله دیفرانسیل (۱) دارای i_0 یا i_∞ جواب متناوب مثبت با دورهٔ تناوب ω، به ترتیب برای λ های به اندازه کافی بزرگ یا کوچک است. سپس نشان می دهیم که تحت شرایطی می توان فاصلهٔ صریحی از λ را بدست آورد، بطوریکه معادلهٔ (۱) دارای هیچ جواب متناوب مثبت نباشد.

کلمات کلیدی :

جواب متناوب مثبت، وجود، تعدد، عدم وجود، قضیهٔ نمای نقطهٔ ثابت

مقدمه

رسالهٔ حاضر شامل ۳ فصل است فصل اول، که در واقع پیشنیاز بقیهٔ فصل ها می باشد، مروری بر تعاریف و قضایایی دارد که به نحوی در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل ۲ به تشریح درجه و نمای نقطهٔ ثابت و روابط بین آن ها پرداخته و در ادامه به بیان قضایای نقطهٔ ثابت، از جمله قضیهٔ نقطهٔ ثابت برائور[۱] و اثبات آن ها به کمک مفاهیم درجه و نمای نقطهٔ ثابت می پردازیم. در فصل سوم به بررسی وجود، تعدد و عدم وجود جواب های معادله دیفرانسیل تابعی

$$x'(t) = a(t)g(x(t))x(t) - \lambda b(t)f(x(t-\tau(t))) \qquad (۱)$$

می پردازیم . ما در این فصل ابتدا معادله دیفرانسیل (۱) را به سیستمی از معادلات انتگرالی تبدیل می کنیم سپس قضیه نقطهٔ ثابت را برای عملگر انتگرالی متناظر روی مخروط به کار می‌بریم، در ادامه به اثبات چندین نامساوی برای تخمین عملگر انتگرالی پرداخته و سپس به کمک قضیه نمای نقطهٔ ثابت به اثبات وجود، تعدد و عدم وجود جواب های متناوب مثبت با دوره تناوب ω معادله می پردازیم. هدف اصلی در این رساله پاسخ به سؤالاتی از قبیل اینکه آیا شرایطی وجود دارد بطوریکه معادله دیفرانسیل (۱) دارای جواب متناوب مثبت باشد؟ و اینکه معادله دیفرانسیل (۱) تحت چه شرایطی دارای هیچ جواب متناوب مثبت نمی باشد؟

اگر بخواهیم نگاهی کوتاه به تاریخچهٔ معادلات دیفرانسیل تابعی بیندازیم، مشاهده خواهیم کرد که این دسته از معادلات در بسیاری از مسائل فیزیک، بیولوژی، فیزیولوژی و ... ظاهر می‌شوند و اهمیت آن در بسیاری از پدیده‌های پیرامون ما مشهود است. از جمله ریاضی دانانی که در قرن ۱۸ به ارتباط این معادلات با مسائل هندسی پرداختند و در این زمینه صاحب نظر بوده اند ، اویلر

---

[۱] $Brouwer$

[۲]، برنولی [۳] و لاپلاس [۴] را می توان نام برد. در قرن ۱۹ نیز این تحقیقات در سطح وسیع تری صورت گرفت بطوریکه در اوایل قرن ۲۰ کسانی همچون والترا [۵] به کاربرد این دسته از معادلات در علوم دیگر پرداختند. دردهه‌های اخیر این دسته از معادلات به دلیل ارائه مدلی برای نوعی از فرآیندهای فیزیولوژیکی بدن و بیان شرایطی برای تولید یاخته های خونی ذهن ریاضیدانان را به خود مشغول کرده‌اند به طوری که کسانی چون مکی [۶] و گلس [۷] در سال ۱۹۹۷، نیسبت [۸] در سال ۱۹۸۰ به بررسی کاربرد این نوع از معادلات در فرایند های فیزیولوژیکی بدن پرداختند .
همچنین ریاضیدانانی همچون چو [۹] در سال ۱۹۷۴، فریدمن [۱۰] در سال ۱۹۹۲، تامیک [۱۱] و هدلر [۱۲] در سال ۱۹۷۷، اسمیت [۱۳] در سال ۱۹۹۲، تحقیقات وسیعی در زمینه وجود جواب های متناوب مثبت این نوع از معادلات و شکل های تعمیم یافته آن انجام دادند. آنچه در کارهای همهٔ آن ها بیشتر به چشم می خورد، تبدیل معادله دیفرانسیل تابعی مورد نظر به معادلهٔ انتگرالی هم ارز و استفاده از قضایای نقطهٔ ثابت برای اثبات وجود جواب معادله موردنظر است. شایان ذکر است که مسأله وجود جواب های متناوب مثبت ازاین دسته از معادلات و مسأله وجود جواب های متناوب مثبت از مسائل مقدار مرزی از معادلات مشابه با معادلات تابعی معادل است. بطوریکه

---

[۲] $L.Euler$

[۳] $J.Bernolli$

[۴] $P.Laplace$

[۵] $V.Voltera$

[۶] $M.C.Mackey$

[۷] $L.Glass$

[۸] $R.N.Nisbet$

[۹] $Chow$

[۱۰] $Freedman$

[۱۱] $Tomiuk$

[۱۲] $Hadeler$

[۱۳] $Smith$

ریاضیدانانی همچون اربِ [۱۴]، ونگ [۱۵]، ... تحقیقات بسیاری دراین زمینه انجام دادند و به نتایج مشابهی در مورد وجود و عدم وجود جواب های متناوب مثبت از مسائل مقدار مرزی دست یافتند. همچنین در حالتی که $g \equiv ۱$ تحقیقاتی صورت گرفته است بطوریکه کسانی همچون جی یانگ [۱۶] و وی [۱۷] مقالات جالبی در این زمینه در سال های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۲ ارائه کردند. و همچنین ریاضی دانانی چون ونگ و فن [۱۸] تحقیقات وسیعی نیز در این حالت و در اشکال تعمیم یافته n بعدی

$$X'(t) = -A(t)X(t) + \lambda B(t)F(X(t-\tau(t))) \qquad (*)$$

که $\lambda > ۰$ پارامتر مثبت و

$$B(t) = diag[b_۱(t), b_۲(t), ..., b_n(t)] \qquad , A(t) = diag[a_۱(t), a_۲(t), ..., a_n(t)]$$

و $F(X) = diag\left[f^۱(X), f^۲(X), ..., f^n(X)\right]^T$ است انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که اگر

$$f^i_{\circ} = lim_{\|u\|\to\circ}\frac{f^i(u)}{\| u \|} \ \ , \ \ f^i_{\infty} = lim_{\|u\|\to\infty}\frac{f^i(u)}{\| u \|} \qquad , \qquad u \in R^n_+ = \prod_{i=۱}^{i=n} R_+$$

و

$$F_{\circ} = \max_{i=۱,۲,...n}\{f^i_{\circ}\} \qquad , \qquad F_{\infty} = max_{i=۱,۲,...n}\{f^i_{\infty}\}$$

و $i_{\circ}$، را تعداد صفرها در $\{F_{\circ}, F_{\infty}\}$ و i_{∞}، را تعداد بی نهایت ها در $\{F_{\circ}, F_{\infty}\}$ در نظر بگیریم آنگاه معادلهٔ $(*)$ دارای $i_{\circ}$ یا i_{∞} جواب متناوب مثبت با دورهٔ تناوب ω، به ترتیب برای λ های به

[۱۴] $Erbe$

[۱۵] $Wang$

[۱۶] $D.Jiang$

[۱۷] $J.Wei$

[۱۸] $M.Fen$

اندازه کافی بزرگ یا کوچک است. سپس نشان دادند که تحت شرایطی می توان فاصلهٔ صریحی از λ را بدست آورد، بطوریکه معادلهٔ (۱) دارای هیچ جواب متناوب مثبت نباشد. ما در این نوشتار همین روند را با مفروضات کمتر برای معادله دیفرانسیل تابعی

$$x'(t) = a(t)g(x(t))x(t) - \lambda b(t)f(x(t-\tau(t))) \qquad (۱)$$

انجام می دهیم، و به نتایج مشابهی دست خواهیم یافت .

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و کلیات

در این فصل برخی نمادها، تعاریف، لم ها و قضایایی را که برحسب نیاز در فصلهای دیگر از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می کنیم.

۱.۱ تعریف : تابع $u \in C(R, R)$ (منظور از $C(R, R)$ توابعی پیوسته از R به R است) یک تابع متناوب مثبت با دورهٔ تناوب ω نامیده می شود هرگاه :

$$
\begin{aligned}
&۱)\forall \ \ t \in R \qquad u(t) \geq ۰ \\
&۲)\forall \ \ t \in R \qquad u(t+w) = u(t)
\end{aligned}
$$

به آسانی ملاحظه می‌شود که اگر f تابعی پیوسته و متناوب با دورهٔ تناوب ω باشد آنگاه

$$\int_{t}^{t+\omega} f(x)\ dx = \int_{۰}^{\omega} f(x)\ dx$$

۲.۱ تعریف : اگر X یک فضای برداری روی میدان F باشد آنگاه نگاشت $R \longrightarrow X :\|\ .\ \|$

را یک نیم نرم[1] روی X می نامیم هرگاه به ازای هر x و y در X و α در F داشته باشیم:

$$۱)\ \| x \| \geq \circ,$$
$$۲)\ \| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|,$$
$$۳)\ \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

اگر علاوه بر شرایط فوق داشته باشیم

$$۴)\ \| x \| = \circ \Longrightarrow x = \circ.$$

آنگاه $\| . \|$ یک نرم روی X نامیده می شود.

زوج $(X, \| . \|)$ که X یک فضای برداری روی میدان F و $\| . \|$ یک نرم تعریف شده بر X باشد را یک فضای نرمدار می گوییم. اگر$(X, \| . \|)$ یک فضای نرمدار باشد و به ازای هر x وy در X تعریف کنیم $d(x,y) = \| x-y \|$ آنگاه d یک متر روی X است و زوج (X,d) را یک فضای متریک می گوییم.

۳.۱ تعریف(فضای باناخ [2]): فضای نرمدار X را یک فضای باناخ خوانیم هرگاه با متر تعریف شده توسط نرم کامل باشد.

۴.۱ قضیه : یک فضای برداری نرمدار X کامل است اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق در X، همگرا باشد.

برهان : به مرجع [۳] رجوع شود . ■

۵.۱ تعریف : فرض کنید X یک فضای باناخ و K یک زیرمجموعهٔ بستهٔ غیرتهی از X باشد، K را یک مخروط درX می نامیم هرگاه:

---

[1] *Semi norm*

[2] *Banach*

الف. برای هر $u, v \in K$ و $\alpha, \beta > 0$ داشته باشیم $\alpha u + \beta v \in K$.

ب. اگر $u, -u \in K$ آنگاه $u = 0$.

۱—۱ عملگر های کراندار و فشرده

۶.۱ تعریف : نگاشت $A : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی از فضای خطی X به فضای خطی Y می‌نامیم، هرگاه به ازای هر x, y در X و α, β در R یا C داشته باشیم

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی از X به Y را با $L(X, Y)$ و در صورتیکه $X = Y$ با $L(X)$ نشان می دهیم.

۷.۱ قضیه : اگر عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ از فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y در یک عضو از X پیوسته باشد آنگاه بر روی X پیوسته است.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۸.۱ تعریف : عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ از فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y را کراندار می‌گوییم، هرگاه عدد مثبتی مانند M موجود باشد به قسمی که

$$\forall x \in X \qquad , \qquad \| Ax \| \leq M \| x \| .$$

و عدد M را یک کران عملگر A می گوییم.

مجموعهٔ همهٔ عملگر های خطی کراندار از X به Y را با $B(X, Y)$ نمایش می دهیم. در صورتی

که $X = Y$ با $B(X)$ نمایش می دهیم. حال با استفاده از مفهوم خطی بودن به سادگی می توان دید، عملگر A کراندار است اگر و تنها اگر

$$\| A \| = sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = sup_{\|x\| \leq 1} \| Ax \| \leq \infty$$

۹.۱ تعریف : عملگر پیوسته $A : X \longrightarrow Y$ از فضای باناخ X به فضای باناخ Y را یک عملگر بطورکامل پیوسته خوانیم، هرگاه هر دنبالهٔ همگرای ضعیف در X را به یک دنبالهٔ همگرا در نرم Y تصویر کند.

۱۰.۱ قضیه : فرض کنید $A : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی بین دو فضای برداری نرمدار X و Y باشد، دراینصورت شرایط زیرمعادلند:

الف .A روی X پیوسته است.

ب. A در $0 \in X$ پیوسته است.

ج .A کرانداراست.

برهان : به مرجع[۱۰] رجوع شود. ■

۱۱.۱ تعریف : فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند، عملگرخطی کراندار $A : X \longrightarrow Y$ را عملگر فشرده می‌گوییم هرگاه بستار تصویر گوی واحد X در Y فشرده باشد. به زبان دیگر $\overline{A(U)}$ فشرده باشد که در آن U گوی واحد در X است.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

به راحتی می توان دید که مجموع دو عملگر فشرده باز هم فشرده است حتی حاصلضرب یک عملگر فشرده در یک عملگر کرندار دیگر نیز فشرده است.

۱۲.۱ تبصره: مجموعهٔ همه عملگرهای فشرده روی X را با $K(X)$ نشان می دهند .

۱۳.۱ تبصره: عملگرهای فشرده روی فضاهای باناخ به طورکامل پیوسته اند .

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۱۴.۱ مثال : فرض کنید $h(x,y)$ با $x,y \in [0,1]$ یک تابع پیوسته باشد، عملگر تعریف شده به صورت

$$(T\psi)(x) = \int_0^1 h(x,y)\psi(y)dy \quad , \quad \psi \in C([0,1])$$

یک عملگر فشرده است.

فرض کنید G حوزه‌ای در R^n باشد مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته بر روی G را با$C(G)$ نمایش می دهیم. اگر $G = (a,b)$ زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد برای راحتی می نویسیم $C(a,b)$. فضای تمام توابع پیوسته بر روی مجموعهٔ بسته $\overline{G} = G \cup \partial G$ را با نماد $C(\overline{G})$ نمایش می دهیم. $U \subseteq C(G)$ را کراندار خوانیم هرگاه عدد ثابتی مانند M موجود باشد به طوریکه

$$\| \psi(x) \| \leq M \quad , \quad \forall \ x \in G \ , \ \psi \in U.$$

و $U \subseteq C(G)$ را همپیوسته خوانیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، δ ای موجود باشد بطوریکه برای هر $x,y \in G$ و $\psi \in U$ اگر $|x-y| < \delta$ آنگاه

$$\| \psi(x) - \psi(y) \| < \epsilon.$$

۱۵.۱ قضیه(آسکولی)[۳] : مجموعهٔ $U \subseteq C(G)$ نسبتاً فشرده است، اگرو تنها اگر کراندار و

[۳] $(ARZOLA - ASCOLI)$

همپیوسته باشد.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۱۶.۱ قضیه : عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ فشرده است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ کراندار ψ_n در X، دنباله $A(\psi_n)$ شامل یک زیر دنبالهٔ همگرا در Y باشد.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۱۷.۱ قضیه : عملگرهای خطی فشرده کراندارند.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۱۸.۱ قضیه : ترکیب خطی از عملگرهای فشرده، فشرده است.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۱۹.۱ قضیه : اگر X, Y, Z فضا های نرمدار و $A : X \longrightarrow Y$ و $B : Y \longrightarrow Z$ عملگرهای خطی کراندار باشند در این صورت عملگر حاصلضرب $BA : X \longrightarrow Z$ فشرده است اگر و تنها اگر یکی از عملگرهای A یا B فشرده باشد.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۲۰.۱ قضیه : اگر X یک فضای نرمدار و Y یک فضای باناخ باشد و دنباله عملگرهای خطی فشرده به صورت $A_n : X \longrightarrow Y$ به عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ همگرا باشد یعنی $\| A_n - A \| \longrightarrow 0$ آنگاه A یک عملگر خطی فشرده است .

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۲۱.۱ قضیه : اگر $A : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی کراندار باشد بطوریکه $A(X)$ برد A متناهی‌البعد باشد آنگاه A عملگر فشرده است.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۲۲.۱ قضیه : عملگر همانی $I : X \longrightarrow X$ یک عملگر فشرده است اگر و تنها اگر X متناهی‌البعد باشد.

برهان : به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

۲۳.۱ تعریف : فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $U \subset X$، عملگر $\mathrm{A{:}U}\subset X \longrightarrow Y$ را متناهی البعد خوانیم هرگاه برد آن متناهی البعد باشد.

مجموعهٔ همهٔ عملگرهای فشرده و متناهی البعد از U به Y را با $F(U,Y)$ نشان می دهیم . بنابراین $F(U,Y) \subset K(U,Y)$ است . در عملگر $A : U \subset X \longrightarrow Y$ اگر U فشرده و $C(U,Y)$ نشانگر مجموعهٔ همه عملگرهای پیوسته از U به Y باشد آنگاه $K(U,Y) = C(U,Y)$ است زیرا تصاویر پیوسته از مجموعه های فشرده، فشرده اند و اگر $\dim(Y) < \infty$ آنگاه $F(U,Y) = K(U,Y)$.

۱—۲ معادلات انتگرالی

ما در این تحقیق معادلات دیفرانسیل متناوب را به سیستمی از معادلات انتگرالی تبدیل می کنیم و قضیهٔ نمای نقطهٔ ثابت را برای اثبات وجود، تعدد و عدم وجود جواب های متناوب مثبت با دورهٔ تناوب ω بیان می کنیم برای این منظور به تشریح معادلات انتگرالی می پردازیم.

۲۴.۱ تعریف (تابع قطعه به قطعه پیوسته) : تابع $f(x)$ را در بازهٔ متناهی $a \leq x \leq b$ پیوسته قطعه ای (قطعه به قطعه پیوسته) گویند، هر گاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی زیر بازه تقسیم نمود، بطوریکه $f(x)$ در نقاط درونی این زیر بازه‌ها پیوسته بوده، و حد تابع وقتی t به سمت نقاط انتهایی میل کند، متناهی باشد. و تابع را در بازهٔ نامتناهی $0 \leq x \leq \infty$ پیوسته قطعه‌ای گویند، هرگاه در هر زیر بازهٔ $a \leq x \leq b$ پیوسته قطعه‌ای باشد.

۲۵.۱ تعریف (قاعده لایب نیتز):

برای مشتق گرفتن از انتگرال $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt$ نسبت به x از قاعدهٔ زیر که قاعدهٔ لایپ نیتز نام دارد ، استفاده می کنیم

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt = G(x,\beta(x))\frac{d\beta(x)}{dx} - G(x,\alpha(x))\frac{d\alpha(x)}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}dt$$

که $\alpha(x), \beta(x)$ توابعی پیوسته هستند و همچنین مشتق های پیوسته دارند.

۲۶.۱ تعریف (عملگر انتگرالی) : فرض کنیم $H : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ به صورت زیر باشد

$$H(\varphi(t)) = \int_a^b h(x,t)\varphi(t)dt$$

بطوریکه $\varphi(t)$ تابعی پیوسته در فاصلهٔ $[a,b]$ و $h(x,t)$ تابعی دو متغیره که معمولاً هسته نامیده می‌شود ، در این صورت $H\varphi$ را عملگر انتگرالی گویند.

۲۷.۱ تعریف : اگر هستهٔ عملگر انتگرالی به نحوی باشد، که برای هر x, y متعلق به حوزهٔ تعریف هسته داشته باشیم، $H(x,y) = H(y,x)$ دراینصورت به آن هستهٔ متقارن می‌گوییم.

۲۸.۱ تعریف : اگر هستهٔ عملگر انتگرالی به نحوی باشد، که برای هر x, y متعلق به حوزهٔ تعریف هسته داشته باشیم، $H(x,y) = -H(y,x)$ دراینصورت به آن هستهٔ پاد متقارن می‌گوییم.

۲۹.۱ تعریف (تبدیل انتگرالی) : اگر تابع $f(x)$ پیوسته یا پیوسته قطعه‌ای در بازهٔ $[a,b]$ باشد، در اینصورت تعریف می کنیم

$$E(p) = \int_a^b h(p,x)f(x)dx$$

کهp یک پارامتر دلخواه و $h(p,x)$ تابعی دو متغیره است، که هستهٔ تبدیل انتگرالی نام دارد . $E(p)$ را تبدیل انتگرالی تابع $f(x)$ گویند که دامنهٔ آن مقادیری از p است، که به ازای آن انتگرال فوق همگرا است.

۳۰.۱ تعریف (معادلهٔ انتگرالی):

معادلهٔ انتگرالی معادله‌ای است، که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. یک نمونه از معادلهٔ انتگرالی به صورت زیر است

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(x,t)u(t)dt \qquad (۱)$$

که در آن $u(x)$ تابعی مجهول و $h(x,t)$ هستهٔ معادله انتگرالی است. در معادلهٔ فوق تابع مجهول $u(x)$ در خارج علامت انتگرال ظاهر شده است ولی در حالت های دیگر ممکن است تابع مجهول فقط در زیر علامت انتگرال ظاهر شود. باید توجه داشت که هستهٔ $h(x,t)$ و تابع $f(x)$ معلوم هستند. در واقع هدف تعیین تابع $u(x)$ است که در معادلهٔ انتگرالی (۱) صدق کند، برای این کار روش های مختلفی به کار برده می شود.

در یک تقسیم بندی کلی می توان معادلات انتگرالی را به دو دسته تقسیم بندی کرد:

الف . معادلات انتگرالی خطی .

ب . معادلات انتگرالی غیر خطی.

۳۱.۱ تعریف (معادلات انتگرالی خطی و غیر خطی) : شکل کلی معادلهٔ انتگرالی خطی بصورت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(x,t)u(t)dt.$$

است و معادلهٔ انتگرالی غیر خطی به صورت کلی زیر نوشته می شود :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} F(x,t,u(t))dt.$$

اکنون می خواهیم به تقسیم بندی معادلات انتگرالی خطی بپردازیم متداول ترین دسته بندی معادلات انتگرالی عبارتند از

الف . معادلات انتگرالی فردهلم،

ب . معادلات انتگرالی والترا،

پ . معادله انتگرال — دیفرانسیل،

ت . معادلات انتگرالی منفرد.

در ادامه به بررسی تفاوت و خواص معادلات انتگرالی فردهلم و معادلات انتگرالی والترا می‌پردازیم. شکل استاندارد معادلات انتگرالی خطی فردهلم که در آن حد پایین و حد بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر است

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b h(x,t)u(t)dt \qquad a \leq x,t \leq b \qquad (۲)$$

که در آن هستهٔ $h(x,t)$ و $f(x)$ توابعی معلوم و λ نیز پارامتر معلوم است . بر حسب اینکه برای $\varphi(x)$ مقادیر صفر و یک انتخاب شود، معادلهٔ انتگرالی خطی فردهلم به دو دسته تقسیم می‌شود.

حالت اول: اگر $\varphi(x) = ۰$، معادلهٔ (۲) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$f(x) + \lambda \int_a^b h(x,t)u(t)dt = ۰.$$

این معادله انتگرالی را معادلهٔ انتگرالی فردهلم نوع اول گویند.

مثال هایی از این گونه معادلات انتگرالی، تبدیل های انتگرالی فوریه، لاپلاس، هنکل و ... می باشند.

حالت دوم: اگر $\varphi(x) = ۱$، معادلهٔ (۲) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b h(x,t)u(t)dt.$$

که به آن معادلهٔ انتگرالی فردهلم نوع دوم گویند.

شکل استاندارد معادلهٔ انتگرالی خطی والترا مانند معادلات فردهلم است، با این تفاوت که

دراینگونه از معادلات حد بالای انتگرال به جای اینکه عدد ثابت باشد، به صورت تابعی از x ظاهر می شود و معمولاً آن را به صورت زیر در نظر می گیرند

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x h(x,t)u(t)dt \qquad (۳)$$

باید توجه داشت که معادلات انتگرالی والترا را می توان به عنوان یک حالت خاص از معادلات انتگرالی فردهلم در نظر گرفت بطوریکه هستهٔ $h(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود. معادلات انتگرالی والترا را نیز می توان با توجه به مقدار $\varphi(x)$ به دو گروه دسته بندی کرد.

حالت اول : اگر $\varphi(x) = 0$، معادلهٔ (۳) به صورت زیر تبدیل می شود که معادلهٔ انتگرالی والترای نوع اول نامیده می شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^x h(x,t)u(t)dt = 0.$$

حالت دوم : اگر $\varphi(x) = 1$، معادلهٔ (۳) به صورت زیر تبدیل می شود

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x h(x,t)u(t)dt.$$

که معادلهٔ انتگرالی والترای نوع دوم نامیده می شود.

تبصره : اگر در معادلهٔ انتگرالی والترای نوع دوم و در معادلهٔ انتگرالی فردهلم نوع دوم $f(x) = 0$ باشد، آنگاه معادلهٔ حاصل را معادلهٔ انتگرالی همگن می گویند در غیراینصورت معادلهٔ حاصل را معادلهٔ انتگرالی غیرهمگن می گویند.

در ادامه به تشریح روابط بین معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل می پردازیم. یکی از روش های حل معادلات انتگرالی، تبدیل آن ها به معادلات دیفرانسیل (با مقدار اولیه یا مقدار مرزی) می باشد، که با حل این معادلات دیفرانسیل و به دست آوردن جواب آن، جواب معادلات انتگرالی نیز به دست می آید، همینطور می توان معادلات دیفرانسیل (با مقدار اولیه یا مقدار

مرزی) را به معادلات انتگرالی تبدیل نمود. حال می خواهیم به تشریح چگونگی تبدیل مسأله مقدار اولیه به معادلات انتگرالی والترا بپردازیم. لذا تکنیکی که مسأله مقدار اولیه را به معادلات انتگرالی والترا متناظرش تبدیل می کند ارائه می‌کنیم، برای تبدیل مسأله مقدار اولیه مرتبه n به معادلهٔ انتگرالی والترا از طرفین رابطهٔ

$$y^n(x) = u(x) \qquad (۴)$$

در بازهٔ $(0,x)$، n بار انتگرال گرفته و شرایط اولیه مسأله را به کار می گیریم. شایان ذکر است که در هنگام انتگرال گیری از طرف راست رابطهٔ (۴) که n بار تکرارمی شود می توان با استفاده از رابطهٔ زیر آن را به یک انتگرال تبدیل نمود.

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad (*)$$

این رابطه در مرجع [۵] آمده است. اکنون می خواهیم به ارائه روشی برای تبدیل مسأ لهٔ مقدار مرزی به معادلهٔ انتگرالی فردهلم بپردازیم . روش به کار رفته در این قسمت مشابه حالت قبل است، ولی به علت وجود شرایط مرزی کمی با آن تفاوت دارد البته در همه حال مسألهٔ مقدار مرزی به معادلهٔ انتگرالی فردهلم متناظر تبدیل می‌شود. از آنجا که $y'(a)$ داده نمی شود بایستی توجه خاصی جهت بدست آوردن این مقدار بشود، که این کار بسادگی از طریق معادلات حاصل انجام می شود. به عنوان مثال مسألهٔ مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}(x) = \lambda y(x) \qquad , \qquad a < x < b \qquad (۱) \\ &y(a) = y(b) = 0. \end{aligned}$$

که با انتگرل گیری از طرفین معادلهٔ (۱) و با استفاده از رابطهٔ $(*)$، داریم