دانشگاه صنعتی اصفهان

پایان نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد

گرایش ریاضی محض

قضیهٔ اِردُش وفوکس وتعمیمهای آن

توسط :

مازیار اولیائی نیا

زیرنظر :

دکتر علی رجالی

بهمن ۱۳۶۹

نگارش

رساله کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

جلسه دفاع از این رساله در تاریخ ۲۳ بهمن ۱۳۶۹ در دانشکده ریاضی با شرکت :

استاد راهنما : آقای دکتر علی رجالی دانشیار دانشگاه صنعتی اصفهان

استاد مشاور : آقای دکتر احمد حقانی استاد دانشگاه صنعتی اصفهان

استاد ممتحن : آقای دکتر امید علی کرم زاده استاد دانشگاه اهواز

تشکیل گردید. این رساله در تاریخ فوق الذکر به تصویب نهایی رسید.

علی رجالی

احمد حقانی

امید علی کرم زاده

۶۹/۱۱/۲۳

تقدیم به مادرم ناهید

و

پدرم محمدجواد که بزرگترین آموزگاران من بوده‌اند.

از زحمات استاد ارجمندم آقای دکتر علی رجالی که همواره مشوق و راهنمای من در مطالعاتم در موضوع نظریهٔ اعداد بوده‌اند و مطالعهٔ دقیق دستنوشته‌های رسالهٔ حاضر را به عهده داشتند و همچنین آقایان دکتر احمد حقانی و دکتر امید علی کرمزاده کمال تشکر را دارم.

همچنین با یاد از خانم زهرا صدرعاملی که کار دقیق و پرزحمت نگارش فرمولهای ریاضی با استفاده از نرم افزار Tex و نیز تایپ متن فارسی را به عهده گرفتند، صمیمانه تشکر نمایم.

فهرست مطالب

چکیـــــــــده‌ٔ مطالب

رساله‌ٔ حاضر مشتمل بر یک مقدمه و شش فصل است که به قضیه‌ٔ اِردُش و فوکس و تعمیمهـــای آن اختصاص یافته است . مقدمه‌ٔ رساله شامل یک چشم انداز مختصر از مسائل کلیدی درنظریه‌ٔ نمایش جمعی اعداد صحیح است که در آن اهمیت قضیه‌ٔ اردش و فوکس به عنوان یک قضیــــــه‌ٔ اساسی درنظریه‌ٔ توابع نمایش جمعی درنظریه‌ٔ اعداد توضیح داده می‌شود و نکاتی درباره‌ٔ ـ تاریخچه‌ٔ مساله گوشزد می‌شود .

فصل اول رساله مشتمل است بر بیان و اثبات کلاسیک قضیه‌ٔ اردش و فوکس به همـــــراه اثبات چند لم اساسی که برای اثبات قضیه ضروری است . اغلب لمهای فصل اول در فصلهـــای بعدی رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند اما فصلهای دوم تا ششم رساله از یکدیگر مستقل هستند و می‌توانند به طور جداگانه مورد مطالعه قرار گیرند .

فصل دوم به اثبات د . ج . نیومن از قضیه‌ٔ اردش و فوکس اختصاص یافته است . فصلهـــای سوم و پنجم به ترتیب به تعمیمهای سارکوزی[1] و بیتمن ـ کهلبکر ـ تول[2] از قضیه‌ٔ اردش و فوکس اختصاص دارند و فصل چهارم روشی مقدماتی برای تخمین خطا درنظریه‌ٔ جمعی اعداد را که صرفا " از روشهای حسابی ـ ترکیبیاتی بهره می‌جوید ، مورد بررسی قرار می‌دهد . فصل ششم به ذکـــــــر برخی نتایج تکمیلی اختصاص یافته است . هر فصل تقریبا "منطبق بر مضمون یک مقالـــــه‌ٔ جداگانه است که مرجع مربوطه در همان فصل به عنوان مرجع اصلی ذکر گردیده است . مولـــف تنها به شرح و بسط نتایج این مقاله‌ها ، تکمیل اثباتهای ناکامل و ایجاد یک توالی منطقی در بین لمها و قضایا پرداخته است به نحوی که خوانندهٔ بتواند تقریبا "بدون هیچ پیشنیـــــاز قبلی و تنها با اتکای بر قضایای شناخته شده‌ٔ آنالیز حقیقی و مختلط اثباتها را دنبال کند .

پیش از شروع مقدمه ، نمادها و قضایایی از آنالیز حقیقی و یا مختلط که در رساله مـــورد استفاده قرار گرفته اند را فهرست وار معرفی کرده ایم .

مازیار اولیائی نیا

زمستان ۱۳۶۹

---

1 · Sarközy

2 · Bateman-Kohlbecker-Tull

نمادها وقضایای مورداستفاده

ازنمادهای $\sim, o, O$ مکررا "درطول رساله استفاده‌خواهیم‌کرد. اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع با مقادیرحقیقی باشندکه روی مجموعهٔ X تعریف شده‌اندودرضمن ثابت مثبت M موجودباشدچنانکه به‌ازای هر $x \in X$، نامساوی $|f(x)| \leq Mg(x)$ برقرارباشدو $g(x) > 0$ آنگاه می‌نویسیم $f(x) = O(g(x))$.

اگرمجموعهٔ X زیرمجموعه‌ای ازصفحهٔ مختلط باشدوبه‌ازای $x_0 \in X$ داشته‌باشیم $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ، آنگاه می‌نویسیم‌وقتی $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$. درحالت $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ نیزازهمان نماد استفاده‌می‌کنیم . درصورتی که $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ آنگاه می‌نویسیم $f(x) \sim g(x)$.

قضیهٔ پارسوال [۲۴] : فرض‌کنیدکه g, f توابعی ریمان انتگرال‌پذیربادورهٔ تناوب 2π باشدو $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx}$ و $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$. دراین صورت

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \overline{b_n} \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2
\end{aligned}
$$

قضیهٔ آزمون ریشه [۲۴] : به‌ازای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مفروض ،قرارمی‌دهیم $\alpha = \lim_{n \to \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ دراین صورت

آ) هرگاه $\alpha < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست ؛

ب) هرگاه $\alpha > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست ؛

پ) چنانچه $\alpha = 1$ ،این آزمون اطلاعی به‌دست نمی‌دهد .

نامساوی هُلدِر [۲۴] : فرض‌کنیدکه q, p اعدادحقیقی مثبتی باشندبه‌طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. هرگاه f, g توابعی مختلط باشندبه‌قسمی که $f, g \in R(\alpha)$

آنگاه

$$|\int_a^b fg\,d\alpha| \leq (\int_a^b |f|^p d\alpha)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b |g|^q d\alpha)^{\frac{1}{q}}$$

این را نامساوی هُلدِر می‌نامند.

نامساوی شوارتز برای انتگرالها : درحالت خاصی که $p = q = 2$، نامساوی هُلدِر را نامساوی شوارتز می‌خوانند.

قضیهٔ همگرایی تسلطی لِبِگ [۲۲] : فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر بازه‌ای چون I انتگرال لبگ داشته باشند. همچنین ،

آ) $\{f_n\}$ تقریبا "همه‌جا بر I به‌تابع حدی مانند f همگرا باشد؛

ب) تابعی نامنفی مانند g در $L(I)$ (مجموعه‌توابعی که‌بربازهٔ I انتگرال لبگ دارند) وجودداشته‌باشدبه‌قسمی که‌به‌ازای هر $n \geq 1$ تقریبا "همه‌جا بر I داشته باشیم $|f_n(x)| \leq g(x)$.

دراین صورت ، $f \in L(I)$ ،دنبالهٔ $\{\int_I f_n\}$ همگراست و

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \quad .$$

مقدمه

فرض کنیدکه Z_0 مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی باشدو A دنبالهای نامتناهی از اعضای Z_0 باشد. بهازای عددصحیح $h \geq 2$, hA را دنبالهای فرض میکنیم‌که اعضایش حاصل جمع h عضواز اعضای دنبالهٔ A هستند. تابع نمایش $r_h(n, A)$ را تعداد نمایشهای n به‌شکل

$$n = a^{(1)} + \cdots + a^{(h)} \ (a^{(1)} \in A, \cdots, a^{(h)} \in A)$$

تعریف میکنیم‌که‌درآن ترتیب عوامل جمع ملحوظ شده‌است. پس دنبالهٔ hA عبارتست ازدنبالهٔ n هایی که‌برای آنها مقدار $r_h(n, A)$ اکیدا" مثبت‌است. تابع شمارش دنبالهٔ A را با $A(n)$ نمایش می‌دهیم‌که‌چنین تعریف می‌شود

$$A(n) = \sum_{\substack{k \leq n \\ k \in A}} 1 \quad .$$

برای ساده‌شدن نمادها ازقرارداد زیراستفاده می‌کنیم

$$r_2(n, A) = r(n, A) \quad .$$

پرسشهای اصلی درموردتوابع نمایش به‌قرارزیراست.

الف) چه‌نوع روابطی بین رفتارتابع نمایش $r(n, A)$ وتابع شمارش $A(n)$ برقرار است؟

ب) آیا برخی ازقضایایی راکه‌درارتباط با رفتارتوابع نمایش دنباله‌های خاص همچون دنبالهٔ توانهای k اُم $(k \geq 2)$ اعدادطبیعی موجوداست را می‌توان به‌دنباله‌های عامتر تعمیم‌داد؟

ج) آیا قضایای معروفی راکه‌به‌توابع نمایش برخی دنباله‌های خاص مربوط است ودراثبات آنها صرفا" ازخواص حسابی آن دنباله‌ها استفاده‌شده‌است ،می‌توان کاملا" مستقل ازآن –

خواص حسابی ثابت کرد؟

متاسفانه دانش ریاضی ما درباره رفتار توابع نمایش هنوز کمتر از آن است که بتوانیم پاسخ قاطعی به این پرسشها بدهیم. اغلب نتایج زیبا وقوی درباره توابع نمایش مربوط به توابع نمایش دنباله های خاص است و از این جهت نظریه توابع نمایش جمعی هنوز مسائل مفتوح بسیار دارد که حل آنها احتیاج به ابزارها وروشهای ریاضی قویتری دارد [۲۳].

ابزار دستیابی به بسیاری از نتایجی که در چارچوبه پرسش (الف) قرار می‌گیرند نظریه سری فوریه است. فرض کنید که $r'(n, A)$ تعداد نمایشهای n به شکل

$$n = a + a' \quad a \leq a' \quad (a \in A, a' \in A)$$

است. نتایج ثابت شده معمولاً بدین ترتیب هستند که $r'(n, A)$ کراندار است و یا اینکه از تابعی که آن هم به نوبه خود با افزایش n به کندی به سمت بینهایت می‌رود، کوچکتر است [۱۹]. در حالتی که برای تمام n ها داشته باشیم $r'(n, A) \leq 1$، نتایج بسیاری در مورد رفتار $A(n)$ به دست آمده است ولیکن اغلب پرسشها درباره تابع شمارش دنباله A وقتی به ازای تمام n ها داشته باشیم $r'(n, A) \leq k$ $(k > 1, k \in N)$ بدون جواب مانده است. پرسش دیگر مطرح شده توسط سیدون در این زمینه آن است که اگر به ازای تمام n های بزرگ داشته باشیم $r'(n, A) \geq 1$ آیا می‌توان $r'(n, A)$ را توسط تابعی که به کندی به سمت بینهایت میل می‌کند محدود ساخت و یا حتی آیا ممکن است که $r'(n, A)$ کراندار باشد [۸].

در ارتباط با پرسش (ب) تقریباً "چیزی نمی‌دانیم. یکی از مهمترین نتایج شناخته شده درباره توابع نمایش در حوزه پرسش (ج) قرار می‌گیرد و آن در زمینه جمله خطای تساوی

$$\sum_{0 \leq n \leq N} r(n, S) = \pi N + \Delta(N)$$

است که در آن S دنباله مربعات کامل به انضمام عدد صفر است. بررسی جمله خطا در تقریب فوق همواره توجه بسیار برانگیخته است. دقت چنین تخمینی محدود است و مثلاً "می‌دانیم که

$$\lim_{N \to \infty} \sup \frac{|\Delta(n)|}{(N \log N)^{\frac{1}{4}}} > 0$$

ولیکن اثبات نامساوی فوق تا مدتها توسط روشهای تحلیلی که وسیعاً " از خواص حسابی دنباله مربعات کامل استفاده می‌کردند، ارائه می‌شد. در ۱۹۵۶ اِردُش و فوکس نشان

دادند [۴] که محدودیتی کاملاً مشابه در دقت فرمولهای مجانبی به شکل (که $E(N)$ جملهٔ خطاست)

$\sum_{0\leq n\leq N} r(n,A)=cN+E(N)$

وجود دارد که کاملاً از ماهیت دنبالهٔ A مستقل است. این قضیهٔ اساسی در نظریهٔ نمایش جمعی که به قضیهٔ اِردُش وفوکس معروف شده دارای اهمیت بسیار و نیز تعمیمها و ساده‌سازیهای متنوعی است که موضوع رسالهٔ حاضر را تشکیل می‌دهد.

یکی از پیش زمینه‌های اصلی در اثبات قضیهٔ اِردُش وفوکس، حدس قبلی اِردُش و توران بود. آنها در سال ۱۹۴۱ حدس زدند که یک تساوی به شکل

$$\sum_{n=0}^{N} r(n,A)=cN+O(1)$$

ممکن نیست که برقرار باشد [۵]. در همین مقاله آنها ثابت کردند که اگر A دنباله‌ای دلخواه و اکیداً "صعودی باشد، ممکن نیست که $r(n,A)$ به ازای همهٔ n های به اندازهٔ کافی بزرگ مقداری ثابت باشد. صورت دقیق قضیهٔ اردش وفوکس چنین است.

قضیهٔ اردش وفوکس: اگر $a_1<a_2<a_3<\cdots$ دنباله‌ای از اعداد صحیح غیرمنفی باشد و

$$f(n)=\sum_{\substack{i,j\\ n=a_i+a_j}} 1$$

آنگاه هیچ تساوی مجانبی به شکل

$$\sum_{k\leq n} f(k)=cn+r_n$$

با مقدار ثابت $r_n=o(n^{\frac{1}{4}}\log^{-\frac{1}{2}} n), c$ نمی‌تواند برقرار باشد.

این قضیه در واقع یک Ω-نتیجه است. در به دست آوردن تخمینهای مجانبی، قضایا و نتایجی که به ما می‌گویند بزرگی مرتبهٔ خطای تخمین باید چه اندازه باشد و یا به عبارت دیگر مشخص می‌کنند که جملات خطا نمی‌توانند از مرتبهٔ خاصی کوچکتر باشند Ω- نتایج نامیده می‌شوند.

ابزار اصلی در اثبات قضیهٔ اردش وفوکس، توابع مولد هستند. کاربرد تابع $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{a_n}$ به ازای $|z|<1$ (z عدد مختلط است)، برای مطالعهٔ خواص جمعی دنبالهٔ a_n، اساس این روش است. لم ۱.۱ اهمیت توابع مولد را در مطالعهٔ توابع نمایش آشکار می‌کند.

لم۱.۱: اگر $\{a_n{}^{(1)}\},\cdots,\{a_n{}^{(k)}\}$ دنباله‌هایی از اعداد صحیح غیرمنفی وغیر تکراری باشند و $f(m)$ تعداد نمایشهای عدد طبیعی m به‌شکل $m=a_{n_1}^{(1)}+\cdots+a_{n_k}^{(k)}$ باشد و $f_i(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{a_n{}^{(i)}}$ ، $i=1,\cdots,k$ ، آنگاه به‌ازای $|z|<1$ تساوی روبرو برقرار است $\sum_{m=0}^{\infty}f(m)z^m=\Pi_{i=1}^{k}f_i(z)$.

اثبات: به‌ازای $|z|<1$ داریم

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}f_i(z) &= \prod_{i=1}^{k}\sum_{n_i=1}^{\infty}z^{a_{n_i}^{(i)}}\\ &= \sum_{n_1,\cdots,n_k=1}^{\infty}z^{a_{n_1}^{(1)}+\cdots+a_{n_k}^{(k)}}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{a_{n_1}^{(1)}+\cdots+a_{n_k}^{(k)}=m}1\Big)z^m \quad = \sum_{m=0}^{\infty}f(m)z^m\end{aligned}$$

توجه‌کنید‌که‌حاصل جمع اخیر به‌ازای توابع نمایش $f(m)$ همواره همگراست زیرا که $f(m)=O(m^k)$ ودرنتیجه‌همگرایی سری با استفاده از آزمون ریشه به‌دست می‌آید [۲۲] .

حال می‌توان با اعمال فرمول انتگرال کوشی ، $f(m)$ را به‌دست آورد. این ایده‌نخستین بار توسط هاردی ولیتلوودبیان شدکه‌درمجموعه‌مقالات معروف ومهمشان با عنوان Partitio numerorum با استفاده از چنین ایده‌ای ، اثباتی برای مساله‌ٔ وارینگ ارائه‌کردندوسپس آنرا به‌مسائل جمعی دیگردرنظریه‌ٔ اعداد تعمیم‌دادند [۹] .سپس وینوگرادوف روش هاردی ــ لیتلوودرا ساده‌کرد. او با استفاده از این روش ساده‌شده‌واثبات قضایایی اساسی درتخمین حاصل جمعهای مثلثاتی ونمایی، نتایج مهمی درنظریه‌ٔ جمعی اعداد (به‌ویژه مساله‌ٔ گلدباخ) به‌دست آورد [۲۱] .

یک نکته‌ٔ قابل توجه‌دربارهٔ توابع نمایش آن است که‌دنباله‌ٔ $r_k(n,A)$، $n\geq 0$ می‌توانندمجموعه‌ٔ A را به‌طوریگانه مشخص کنند. به‌عبارت دیگرفرض کنیدکه A, B مجموعه‌های اعداد صحیح غیرمنفی باشند و $r_k(n,A), r_k(n,B)$ به‌ترتیب

بیانگرتعداد نمایشهای n به‌شکل حاصل جمع h عضو B, A باشند ،اگربرای هر $n \geq 0$ داشته‌باشیم $r_h(n, A) = r_h(n, B)$ آنگاه $A = B$. گزاره‌ٔ فوق را می‌توان به‌سادگی ثابت‌کرد . فرض‌کنیدکه $f_B(z) = \sum_{b\in B} z^b, f_A(z) = \sum_{a\in A} z^a$ ،با استفاده‌از فرض‌فوق ولم ۱ داریم

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} r_h(n, A) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_h(n, B) z^n \\
&= (f_A(z))^h - (f_B(z))^h \\
&= (f_A(z) - f_B(z))(f_A(z)^{h-1} + f_A(z)^{h-2} f_B(z) + \cdots + f_B(z)^{h-1})
\end{aligned}
$$

اما $f_A(z)^{h-1} + \cdots + f_B(z)^{h-1}$ یک سری توانی با ضرایب غیرمنفی است وبنابراین $f_A(z) - f_B(z) = 0$ ودرنتیجه $A = B$ [۱۶] .

اثبات قضیه‌ٔ اردش وفوکس : فرض‌کنیدکه‌به‌ازای $|z| < 1$ ، $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{a_n}$. با استفاده‌از لم ۱.۱ داریم $F^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$ که $|z| < 1$. حال طرفین تساوی را در $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ضرب می‌کنیم : $\frac{F^2(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} f(k)) z^n$.

فرض‌کنیدکه‌برای دنباله‌ٔ $\{a_n\}$ داریم $\sum_{k=0}^{n} f(k) = cn + r_n$ که‌درآن $c > 0$ و $r_n = o(n^{\frac{1}{4}} \log^{-\frac{1}{2}} n)$. پس‌برای $|z| < 1$ داریم $\frac{F^2(z)}{1-z} = \frac{cz}{(1-z)^2} + h(z)$

که $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$ و $r_n = o(n^{\frac{1}{4}} \log^{-\frac{1}{2}} n)$. درادامه‌ٔ اثبات نشان می‌دهیم‌که‌چنین فرضی به‌تناقض می‌انجامدوتا رسیدن به‌چنین نتیجه‌ای با یدلمهای چندی رااثبات نماییم .

لم۲.۱: فرض‌کنیدکه $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ درداخل گِرده‌ٔ واحدهمگرا باشدوفرض کنیدکه‌ضرایبش اعدادحقیقی غیرمنفی باشند . آنگاه‌برای هرمقدار $t \in (0, \pi]$ و $0 < r < 1$ داریم

$$\frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

اثبات : تابع کمکی q را درنظرمی‌گیریم

$$q(\theta) = \begin{cases} 1 - |\frac{\theta}{t}| & |\theta| < t \\ 0 & t \leq |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

$$\int_{-t}^{t}|\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq \int_{-\pi}^{\pi}|q(\theta)|^2|\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$
$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} b_n b_m r^{n+m}\int_{-\pi}^{\pi}|q(\theta)|^2 e^{i(n-m)\theta}d\theta$$

وقتیکه $m \neq n$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi}|q(\theta)|^2 e^{i(n-m)\theta}d\theta = 2\int_0^t (1-\frac{\theta}{t})^2\cos(n-m)\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^t \cos(n-m)\theta d\theta + \frac{2}{t^2}\int_0^t \theta^2\cos(n-m)\theta d\theta - \frac{4}{t}\int_0^t \theta\cos(n-m)\theta d\theta$$

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء دو انتگرال اخیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\int_0^t \theta\cos(n-m)\theta d\theta &= \frac{1}{n-m}[\theta\sin(n-m)\theta]_0^t - \frac{1}{n-m}\int_0^t \sin(n-m)\theta d\theta \\ &= \frac{t}{n-m}\sin(n-m)t + \frac{1}{(n-m)^2}[\cos(n-m)\theta]_0^t \\ &= \frac{t}{n-m}\sin(n-m)t + \frac{\cos(n-m)t}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n-m)^2}\end{aligned}$$

$$\int_0^t \theta^2\cos(n-m)\theta d\theta = [\frac{\theta^2}{n-m}\sin(n-m)\theta]_0^t - \frac{2}{n-m}\int_0^t \theta\sin(n-m)\theta d\theta$$
$$= \frac{t^2}{n-m}\sin(n-m)t + [\frac{2\theta}{(n-m)^2}\cos(n-m)\theta]_0^t - \frac{2}{(n-m)^2}\int_0^t \cos(n-m)\theta d\theta$$
$$= \frac{t^2}{n-m}\sin(n-m)t + \frac{2t}{(n-m)^2}\cos(n-m)t - \frac{2}{(n-m)^3}\sin(n-m)t$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم (وقتی $m \neq n$)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|q(\theta)|^2 e^{i(n-m)\theta}d\theta &= \frac{2}{n-m}\sin(n-m)t + \frac{2}{n-m}\sin(n-m)t \\ &+ \frac{4}{t(n-m)^2}\cos(n-m)t - \frac{4}{t^2(n-m)^3}\sin(n-m)t \\ &- \frac{4}{n-m}\sin(n-m)t - \frac{4}{t(n-m)^2}\cos(n-m)t + \frac{4}{t(n-m)^2} \\ &= \frac{4}{t(n-m)^2}(1-\frac{\sin(n-m)t}{t(n-m)}) \geq 0\end{aligned}$$

نا مسا وی ا خیرا زآن جهت برقرا را ست که t مثبت ا ست وبه ا زا ی هر $\beta \neq 0$ هموا ره دا ریم

$|\frac{\sin \beta}{\beta}| \leq 1$.

وقتی $m = n$ دا ریم

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |q(\theta)|^2 e^{i(n-m)\theta} d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} |q(\theta)|^2 d\theta = \int_{-t}^{t} (1 - |\frac{\theta}{t}|)^2 d\theta \\
&= \int_{-t}^{t} d\theta + \frac{1}{t^2} \int_{-t}^{t} \theta^2 d\theta - \frac{2}{t} \int_{0}^{t} \theta d\theta - \frac{2}{t} \int_{0}^{-t} \theta d\theta \\
&= \frac{2t}{3}
\end{aligned}$$

وبنا برا ین دا ریم

$$\int_{-t}^{t} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq \frac{2t}{3} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 r^{2n} = \frac{t}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

که تسا وی ا خیربه دلیل قضیهٔ پا رسوا ل برقرارا ست .

حا ل کرا نـهای با لایی وپا یینی برا ی ا نتگرا ل $I(r,t) = \int_{-t}^{t} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta$ پیدا میکنیم .

لم ۳.۱: ا گر $\varepsilon > 0$ مفروض با شدو $1 - r < t < \pi, 1 > r \geq r(\varepsilon) > \frac{1}{2}$ آ نگا ه

$$I(r,t) < C_1 \log \frac{1}{1-r} + C_2 \varepsilon t^{\frac{3}{2}} (1-r)^{-\frac{3}{4}} \log^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1-r}$$

که C_2, C_1 ثا بتها یی مستقل ا ز t, r, ε هستند .

ا ثبا ت : ا بتدا تعریف میکنیم

$$I(r,t) = \int_{-t}^{t} |F(z)|^2 d\theta$$

که $z = re^{i\theta}$. قبلا" دا شتیم ،به ا زا ی $|z| < 1$ ،

$$\frac{F^2(z)}{1-z} = \frac{cz}{(1-z)^2} + h(z)$$

$$I(r,t) = \int_{-t}^{t} |\frac{cz}{1-z} + (1-z)h(z)| d\theta \leq c \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-z|} + \int_{-t}^{t} |h(z)||1-z| d\theta$$

حا ل برا ی تخمین زدن دوا نتگرا ل سمت را ست نا مسا وی فوق به دولم بعدی ا حتیا ج دا ریم .

لم ۴.۱: فرض کنیدکه $(1-z)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n, |z| < 1$ آ نگا ه ثا بتهـــا ی

C, c وجوددارندچنانکه $0 < c < \frac{\gamma_n}{n^{b-1}} < C$. بالعکس برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n r^n$ باشرط $\gamma_n = O(n^{\alpha})$ ،داریم $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n r^n = O(\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}})$.

اثبات : ابتدا فرض میکنیمکه γ_n، $(1-z)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$ هاهمان ضرایب بسط بهسری تیلورتابع $(1-z)^{-b}$ هستندوبهسادگی قابل محاسبهاند

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = b, \gamma_2 = \frac{b(b+1)}{2!}, \gamma_3 = \frac{b(b+1)(b+2)}{3!}, \cdots \gamma_n = \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1\times 2\times\cdots\times n}$$

$$\begin{aligned}\int_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} \log t\,dt &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log(\nu+t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \log(\nu+t)dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \log(\nu+t)dt \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} (\log(\nu+t) + \log(\nu-t))dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (\log\nu^2 + \log(1-\frac{t^2}{\nu^2}))dt \\ &= \log\nu + O(\frac{1}{\nu^2})\end{aligned}$$

تساوی اخیربااستفادهازبسط تیلورتابع $\log(1-x)$ بهدست میآید

$$\log(1-\tfrac{t^2}{\nu^2}) = -(\tfrac{t^2}{\nu^2} + \tfrac{t^4}{2\nu^4} + \tfrac{t^6}{3\nu^6} + \cdots)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} log(1-\tfrac{t^2}{\nu^2})dt = -\tfrac{1}{\nu^2}\int_0^{\frac{1}{2}}(t^2 + \tfrac{t^4}{\nu^2} + \tfrac{t^6}{\nu^4} + \cdots)dt = O(\tfrac{1}{\nu^2})$$

بااستفادهازنتایج بهدستآمدهحال اگرقراردهیم $\nu = b + \ell - 1$ خواهیمداشت

$$\sum_{\ell=1}^{n} \log(b+\ell-1) = \sum_{\ell=1}^{n} \int_{b+\ell-\frac{3}{2}}^{b+\ell-\frac{1}{2}} \log t\,dt + O(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(b+\ell-1)^2})$$

امابهازای $b \neq 0$ داریم

$$\sum_{\ell=1}^{n} \tfrac{1}{(b+\ell-1)^2} < \sum_{\ell=1}^{\infty} \tfrac{1}{(b+\ell-1)^2} < \infty$$

درنتیجهداریم

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n} \log(b+\ell-1) &= \int_{b-\frac{1}{2}}^{b-\frac{1}{2}+n} \log t\,dt + O(1) \\ &= (b-\frac{1}{2}+n)\log(b-\frac{1}{2}+n) - (b-\frac{1}{2}+n) + O(1) = (b-\frac{1}{2}+n)\log n - n + O(1)\end{aligned}$$

ازطرفی درفرمول فوق بهازای $b = 1$ داریم