بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده ریاضی

گرایش کاربردی

روش جدید در حل سیستم معادلات با مشتقات جزیی کسری از مرتبه توزیع شده

ارایه دهنده :

مجتبی هوشیان

استاد راهنما :

دکتر آرمان عقیلی

تیر ماه ۹۱

تقدیم به پدرو مادر عزیزم

که آنچه در زندگی بدست آورده ام یا بدست خواهم آورد مدیون زحمات فراوان آن ها هستم .

از استاد عزیزم جناب آقای **دکتر آرمان عقیلی** که همواره در طول تدوین پایان نامه مشوق من بودند و از هیچ راهنمایی و کمکی دریغ ننمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از **اساتید** محترم جناب آقای دکتر یاقوتی و سرکار خانم دکتر نصیری که به عنوان داور، زحمت بازخوانی پایان نامه را بر عهده گرفتند و نظرات ارزنده ای ارایه نمودند، سپاسگزارم .

فهرست مطالب

فصل دوم

معادله انتگرال

فصل سوم

سیستم معادلات با مشتقات جزیی کسری

فهرست شکل ها

عنوان **صفحه**

چکیده

عنوان پایان نامه : روش جدید برای حل سیستم معادلات با مشتقات جزیی کسری از مرتبه توزیع شده

نگارنده : مجتبی هوشیان ثابت لاهیجانی

در ابتدا تعمیم تبدیل L_A را بیان می کنیم و چگونگی به کار گیری این تبدیل را برای حل معادله انتگرال منفرد با هسته های متفاوت بیان می کنیم همچنین برای حل سیستم معادلات با مشتقات جزیی کسری با عامل های ناپایدار در کسرها و معادلات آشفتگی کسری از مرتبه توزیع شده ، تبدیل L_A را (با انتخاب مناسب تابع $\phi(s)$, $A(x)$) مورد استفاده قرار می دهیم و نشان می دهیم که جواب دقیق سیستم معادلات با مشتقات جزیی کسری بر حسب تابع رایت و میتاگ لفلر است .

کلید واژه : تبدیل لاپلاس ، تبدیل L_A، معادلات انتگرال ، سیستم معادلات ، عملگر مشتقات جزیی کسری .

Abstract

Title of Dissertation : New method for solving system of partial fractional differential equation of distributed order

Author : M . Hoshuian Sabet Lahijani

We develop the operational calculus of the L_A-transform and show how this transform can be applied for solving singular integral equations of different kernels.

Also, we use the L_A-transform (by choosing the suitable functions $A(x)$, $\phi(s)$) for solving the system of partial fractional diffusion equation with non-constant coefficients on fractals and the fractional evolution disturbance equation of distributed order and we express that the fundamental solutions of system P.F.D.E is in term of the Wright and Mittag-Leffler functions.

Key words : Laplace transform , L_A- transform **,** Integral equations , System of equations , Partial fractional differential operator .

پیش گفتار :

برخی از نویسندگان در سال های اخیر به توصیف مدل های فیزیکی و مهندسی با کمک معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کسری (ریمان لیوول- کاپوتو) پرداخته اند که نشان از اهمیت این موضوع دارد .

در این پایان نامه کاربرد تبدیل لاپلاس و تعمیم آن (تبدیل L_A)را در حل بسیاری از مسایل فیزیکی و مهندسی (مانند معادله حرارت و سیستم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کسری) بیان می کنیم .

همچنین به معرفی توابع خاص مانند تابع رایت و میتاگ لفلر می پردازیم این توابع از این جهت مهم هستند که راه حل اساسی سیستم ها با مشتقات کسری جزیی بر حسب این تابع های خاص بیان می شوند .

در فصل دوم تقسیم بندی معادلات انتگرال را بیان می کنیم سپس حل معادله انتگرال آبل را با تکنیک های متفاوت مورد بررسی قرار می دهیم اهمیت معادلات انتگرال از این جهت است که بدانیم ، بسیاری از مسایل فیزیکی و مهندسی به صورت معادلات انتگرال مدل سازی ریاضی می شوند .

در ادامه مطالب روش های جدیدی را برای حل سیستم معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزیی کسری با استفاده از تبدیل L_A ارایه می دهیم که جواب نهایی این سیستم ها بر حسب توابع رایت ومیتاگ لفلر بدست می آید .

هدف اصلی از این پایان نامه ارایه این نکته است که تبدیل L_A، یک ابزار بسیار قوی برای حل معادلات انتگرالی و سیستم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کسری است و راه حل عملیاتی بسیاری از این گونه مسایل است .

فصل اول

تبدیلات انتگرالی

- تبدیل لاپلاس
- تبدیل L_2
- تبدیل L_A
- توابع خاص
- عملگر انتگرال و مشتق کسری

تبدیلات انتگرالی

۱-۱) مقدمه

در این فصل به طور مختصر مطالبی را بیان می کنیم که در طول پایان نامه مورداستفاده قرار می گیرد در ابتدا به تعریف چند تابع و تبدیل لاپلاس پرداخته و برخی از خاصیت های مهم آن را شرح می دهیم سپس فرمول وارون آن را بیان می کنیم و چندین مثال از آن می آوریم در ادامه به بررسی تبدیل L_2 می پردازیم و رابطه تبدیل L_2 با تبدیل لاپلاس را بیان می کنیم .
در اواسط فصل تعمیم تبدیل لاپلاس را شرح می دهیم و به معرفی تبدیل L_A می پردازیم لازم به ذکر است که تبدیل لاپلاس در حل مسایل مقدار مرزی مربوط به معادلات دیفرانسیل جزیی کسری با ضرایب ثابت بسیار مفید است و با تبدیل عملگر مشتقات کسری جزیی به عملگر جبری منجر به حل این گونه مسایل به صورت جبری می شود .
در انتهای فصل برخی توابع خاص را که در ادامه پایان نامه مورد نیاز است مورد بررسی قرار می دهیم و مثالی از معادله حرارت با جمله مشتق جزیی کسری با شرایط اولیه معلوم بیان می کنیم .

۱-۲) تعریف تابع بسل[1]

تابع بسل نوع اول $J_\nu(z)$ و تابع بسل نوع دوم $Y_\nu(z)$ به صورت روابط زیر تعریف می شوند **[۱۰]**

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{z}{2})^{2k+\nu} \qquad (۱-۱)$$

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \qquad (۲-۱)$$

البته در رابطه بالا $Y_\nu(z)$ برای $\nu\neq 0,\pm1,\pm2,\dots$ تعریف می شود

لازم به ذکر است که روابط (۱-۱) و (۱-۲) از حل معادله بسل زیر بدست می آیند

$$z^2y''(z)+z\,y'(z)+(z^2-\nu^2)\,y=0 \qquad (۳-۱)$$

در این صورت جواب کلی معادله بسل به شرح زیر بیان می شود

$$Z_\nu(x)=c_1J_\nu(z)+c_2Y_\nu(z)$$

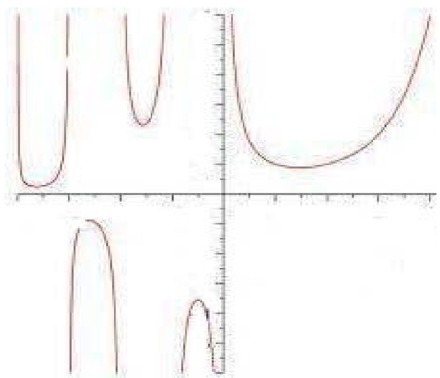
[1] Bessel

۱-۳) تعریف تابع گاما[۱]

تابع گاما برای $\Re e(z) > 0$ به شکل رابطه (۱-۱۴۲) تعریف می شود **[۱۰]**

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du \qquad (۱-۴)$$

با توجه به شکل تابع گاما که به صورت شکل (۱-۲) است این تابع دارای نقاط استثنایی $n = 0, -1, -2, -3, \cdots$ می باشد



شکل ۱-۱

در زیر به چند ویژگی مهم تابع گاما اشاره می کنیم

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad (۱-۵)$$

همچنین اگر $0 < p < 1$ قرار داشته باشد رابطه زیر برقرار است

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (۱-۶)$$

ثابت اویلر γ که از مشتق تابع گاما به ازای مقدار یک بدست می آید را می توان از سری ارایه شده در هندبوک **[۱۵]**

به صورت زیر نمایش داد

$$\gamma = -\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} -[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n] = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = 0.57$$

[۱] Gamma

۱-۴) تعریف تابع خطا[۱]

تابع خطا به صورت رابطه (۱-۹) تعریف می شود **[۱۰]**

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \qquad (۱- ۷)$$

همچنین تابع مکمل خطا را با توجه به رابطه (۱- ۷) به صورت رابطه (۱-۸) بیان می کنیم

$$Erfc(x) = 1 - erf(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du \qquad (۱-۸)$$

۱-۵) تعریف تابع بتا[۲]

تابع بتا برای $x, y > 0$ به صورت زیر تعریف می شود **[۱۰]**

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \qquad (۱-۹)$$

از خاصیت های تابع بتا به موارد زیر می توان اشاره کرد

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$$

$$B(x, y) = B(y, x)$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (۱-۱۰)$$

۱-۶-۱) تعریف تبدیل لاپلاس[۳]

اگر $f(t)$ تابعی از متغیر t باشد برای $t > 0$ ، تبدیل لاپلاس $f(t)$ که با $L\{f(t)\}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود . **[۸]**

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \qquad (۱-۱۱)$$

[۱] Error
[۲] Beta
[۳] Laplace

۱-۶-۲) لم : اگر مقادیر حقیقی $M > 0, T, \gamma$ موجود باشند بطوریکه به ازای مقادیر $t > T$ رابطه زیر برقرار باشد

$$|f(t)| < Me^{\gamma t} \qquad (۱۲-۱)$$

می گوییم $f(t)$ تابع نمایی از مرتبه γ است یعنی وقتی $t \to \infty$ میل می کند رشد $f(t)$ کمتر از مضربی از یک تابع نمایی است. به طور مثال توابع کراندار از مرتبه نمایی اند.

۱-۶-۳) تعریف تابع قطعه ای پیوسته

تابع $f(t)$ را تابع قطعه ای پیوسته در بازه $[\alpha, \beta]$ می نامیم اگر بتوان بازه را به زیر بازه های متناهی تقسیم کرد که در هریک از این زیر بازه ها تابع $f(t)$ پیوسته باشد و در نقاط انتهایی و ناپیوسته حد راست و چپ داشته باشد. **[۸]**

۱-۶-۴) شرط کافی برای وجود تبدیل لاپلاس

اگر $f(t)$ تابعی قطعه ای پیوسته در بازه $0 \le t \le T$ و از مرتبه نمایی γ برای $t > T$ باشد آن گاه تبدیل لاپلاس $F(s)$ برای $\Re e(s) > \gamma$ وجود دارد.

اثبات : برای اثبات از قدر مطلق تعریف تبدیل لاپلاس رابطه (۱-۱۱) استفاده می کنیم و با توجه به اینکه $f(t)$ از مرتبه نمایی است داریم :

$$\begin{aligned} 0 \le |F(s)| &\le \int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt = \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \\ &\le \int_0^\infty e^{-st} Me^{\gamma t} dt = M \int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t} dt \end{aligned} \qquad (۱۳-۱)$$

با محاسبه انتگرال (۱-۱۳) با فرض $(\Re e(s) > \gamma)$ بدست خواهیم آورد

$$0 \le |F(s)| \le M \left(\frac{-1}{s-\gamma} e^{-(s-\gamma)t}\right)\Big|_0^\infty = \frac{M}{s-\gamma} \qquad (۱۴-۱)$$

در نتیجه انتگرال (۱-۱۱) وجود دارد

۱-۶-۵) مثال : تبدیل لاپلاس تابع $\sin(\sqrt{t})$ را با استفاده از بسط سری سینوس ، بدست آورید

$$\sin(\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{t})^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = t^{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{t^{\frac{7}{2}}}{7!} + \ldots \qquad (۱۵-۱)$$

از دو طرف رابطه (۱-۱۵) تبدیل لاپلاس می گیریم

$$L(\sin\sqrt{t}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{3!s^{\frac{5}{2}}} + \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{5!s^{\frac{7}{2}}} - \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{7!s^{\frac{9}{2}}} + \dots$$

(۱-۱۶)

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\left\{1-(\frac{1}{2^2 s})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2^2 s})^2-\frac{1}{3!}(\frac{1}{2^2 s})^3+\dots\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4s}}$$

۱-۶-۶) خاصیت های مهم تبدیل لاپلاس

در این بخش برخی از مهم ترین خاصیت های تبدیل لاپلاس را بیان می کنیم .

خاصیت اول (خاصیت خطی)

اگر $F(s), G(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t), g(t)$ باشند و α, β مقادیر ثابت باشند آن گاه خاصیت زیر برقرار است ،

$$L\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \alpha F(s)+\beta G(s) \tag{۱-۱۷}$$

خاصیت دوم(خاصیت انتقال اول تبدیل لاپلاس)

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \tag{۱-۱۸}$$

خاصیت دوم(خاصیت انتقال دوم تبدیل لاپلاس)

$$L\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{۱-۱۹}$$

خاصیت سوم (خاصیت ضرب تبدیل لاپلاس)

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \tag{۱-۲۰}$$

۱-۶-۷) مثال : تبدیل لاپلاس تابع $t^2\cos(-t)$ را بدست آورید

$$L\{t^2\cos(-t)\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{s}{s^2+1}) = \frac{2s^3-6s}{\left(s^2+1\right)^3} \tag{۱-۲۱}$$

خاصیت چهارم (خاصیت تقسیم تبدیل لاپلاس)

$$L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(u)du \tag{۱-۲۲}$$

خاصیت پنجم (خاصیت تغییر ضریب تبدیل لاپلاس)

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad (۱- ۲۳)$$

۱-۶-۸) مثال : تبدیل لاپلاس تابع زیر را به کمک رابطه (۱-۲۳) بدست آورید .

$$L\{erf(2\sqrt{t})\}$$

ابتدا تبدیل لاپلاس زیر را بدست می آوریم ،

$$L\{erf(\sqrt{t})\}=\int_0^\infty e^{-st}(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du)\,dt \qquad (۱-۲۴)$$

با تعویض ترتیب انتگرال گیری در رابطه (۱-۲۴) داریم

$$\begin{aligned}&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u^2}(\int_{t=u^2}^{t=\infty} e^{-st}dt)\,du\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u^2}[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{u^2}^{\infty}]\,du=\frac{2}{s\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(1+s)u^2}\,du\end{aligned} \qquad (۱-۲۵)$$

حال با تغییر متغییر $\sqrt{1+s}\;u=z$ در رابطه (۱-۲۵) خواهیم داشت ،

$$=\frac{2}{s\sqrt{s+1}\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz=\frac{1}{s\sqrt{s+1}} \qquad (۱-۲۶)$$

با استفاده از خاصیت (۱-۱۳) می توانیم رابطه (۱-۲۷) را بدست آوریم ،

$$L\{erf(\sqrt{at})\}=\frac{1}{a}\frac{a}{s\sqrt{\frac{s}{a}+1}} \qquad (۱-۲۷)$$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر بدست می آید

$$L\{erf(2\sqrt{t})\}=\frac{2}{s}\sqrt{\frac{1}{s+4}} \qquad (۱-۲۸)$$

خاصیت ششم(خاصیت مشتقات در تبدیل لاپلاس)

با شرط اینکه $f'(t)$ قطعه ای پیوسته باشد رابطه (۱-۲۹) برقرار است

$$L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0^+) \qquad (۱-۲۹)$$

همچنین با شرط اینکه توابع $f(t),f'(t),..,f^{(n-1)}(t)$ در بازه $0 \le t \le T$ پیوسته و برای $t > T$ از مرتبه نمایی باشند و تابع $f^{(n)}(t)$ در بازه $0 \le t \le T$ قطعه ای پیوسته باشد می توان خاصیت(۱-۲۹) را تعمیم داد .

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \qquad (۱-۳۰)$$

۱-۶-۹) مثال : لاپلاس تابع $\dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ را بدست آورید .

با توجه به اینکه رابطه (۱-۳۱) برقرار است ،

$$f(t) = \sin(\sqrt{t})\,,\, f'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,,\, f(0^+) = 0 \qquad (۱-۳۱)$$

و به کمک رابطه (۱-۲۹) و مثال (۱-۶-۵) می توان تبدیل لاپلاس را به صورت زیر به دست آورد :

$$L\{f'(t)\} = \frac{1}{2} L\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\} = sF(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}} e^{-\frac{1}{4s}} \qquad (۱-۳۲)$$

خاصیت هفتم (خاصیت انتگرال تبدیل لاپلاس)

$$L\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (۱-۳۳)$$

خاصیت هشتم(خاصیت مقدار آغازی)

به شرط وجود حدود، روابط (۱-۳۴) و (۱-۳۵) برقرار خواهند بود .

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{t \to \infty} f(t) \qquad (۱-۳۴)$$

(خاصیت مقدار پایانی)

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \qquad (۱-۳۵)$$

۱-۶-۱۰) مثال: انتگرال(۱-۳۶) را با کمک تبدیل لاپلاس محاسبه کنید .

$$\int_0^\infty \sin(ax)\cos(\frac{1}{x})\frac{dx}{x} \qquad (۱-۳۶)$$

فرض می کنیم $I(t)=\int_0^\infty \sin(at\,x)\cos(\frac{1}{x})\frac{dx}{x}$ تعریف شده باشد ، تبدیل لاپلاس $I(t)$ به صورت زیر بدست می آید :

$$L\{I(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\{\int_0^\infty \sin(at\,x)\cos(\frac{1}{x})\ \frac{dx}{x}\}dt \qquad (۳۷-۱)$$

با تعویض ترتیب انتگرل گیری انتگرال رابطه (۱-۳۷) داریم :

$$=\int_0^\infty\{\int_0^\infty e^{-st}\sin(axt)\,dt\}\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x})dx \ =\int_0^\infty(\frac{a\,x}{s^2+a^2x^2})\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x})dx \qquad (۳۸-۱)$$

حال با تغییر متغییر $\frac{1}{x}=w$ در رابطه (۱-۳۸) عبارت زیر حاصل می شود :

$$L\{I(t)\}=a\int_0^\infty(\frac{1}{s^2w^2+a^2})\cos w\,dw \qquad (۳۹-۱)$$

مجددا با تغییر متغییر $u=ws$ در رابطه (۱-۳۹) و محاسبه انتگرال بدست خواهیم آورد

$$L\{I(t)\}=\frac{a}{s}\int_0^\infty(\frac{1}{u^2+a^2})\cos\frac{u}{s}du=\frac{\pi}{2s}e^{-\frac{a}{s}} \qquad (۴۰-۱)$$

در نهایت با توجه به وارون تبدیل لاپلاس و جایگذاری $t=1$ جواب انتگرال به شکل زیر بدست می آید .

$$I(1)=\frac{\pi}{2}J_0(2\sqrt{a})$$

۱-۶-۱۱) قضیه لرچ[۱] (یکتایی تبدیل لاپلاس) :

اگر فرض کنیم رابطه (۱-۱۱) برقرار باشد و همچنین $f(t)$ تا بعی پیوسته باشد در این صورت برای $t>0$ هیچ تابع پیوسته ای دیگری که در معادله ی (۱-۱۱) صدق کند وجود ندارد. **[۲۳]**

برای اثبات قضیه ابتدا لم زیر را ثابت می کنیم :

۱-۶-۱۲) لم : اگر $\psi(x)$ یک تابع پیوسته در بازه $[0,1]$ باشد و رابطه زیر وجود داشته باشد ،

$$\int_0^1 x^{n-1}\psi(x)\,dx=0 \quad ,n=1,2,3,... \qquad (۴۱-۱)$$

آن گاه خواهیم داشت :

$$\psi(x)\equiv 0 \quad ,0\le x\le 1$$

[۱] Lerch