دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

فضای باناخ جدایی پذیر هموار گاتو

استاد راهنما

آقای دکتر داریوش بهمردی

استاد مشاور

آقای دکتر فرید بهروزی

پژوهشگر

طیبه مجیدی سنجانی

۱۳۹۱ اسفند

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید(نهج البلاغه، خطبه شماره ۱).
پیشانی شکر بر آستان حضرتش می سایم که به من شور گام نهادن در مسیر فراگیری دانش را عطا فرموده و مرا در تمام تحصیل یاری نمود.
در آغاز به رسم ادب بر دستان پر مهر پدر و مادر مهربانم بوسه می زنم که از شیره جانشان مرا پروراندند تا توان راه رفتن و اندیشه را بیابم. .

همچنین بر خود بایسته می دانم از زحمات بی‌دریغ استاد فرزانه ام، آقای دکتربهمردی ،صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتربهروزی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و با روشنگری ها و صبر و حوصله خود در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

چکیده

می دانیم که هر فضای باناخی که نرم مشتق پذیر یکنواخت فرشه بپذیرد (سوپر انعکاسی) می تواند توسط یک نرم با ضریب همواری از نوع توان تجدید نرم شود.
در این پایان نامه نشان می دهیم که هر فضای باناخی که نرمی با مشتق سویی هولدر و تابع کوهانی بپذیرد . نرمی محدب یکنواخت خواهد پذیرفت ودر نتیجه سوپر انعکاسی است

فهرست مطالب

مقدمه

در آنالیز غیر خطی مشتق پذیری نرم نقش مهمی را ایفا می کند. مهمترین نوع از مشتق پذیری مشتق پذیری فرشه است. اگر چه در بسیاری از موارد کافی است نوع ضعیف تر آن یعنی مشتق پذیری گاتو مورد بررسی قرار گیرد. مخصوصا زمانی که بعضی قضایای تحدب با تکنیک لم بئر ترکیب شوند.دی ثابت کرد که هر فضای باناخ جدایی پذیر توسط یک نرم گاتوی هموار تجدید نرم می شود. در حقیقت یک نرم معادل یکنواخت گاتو می پذیرد که این امر توسط اسمولین نشان داده شد.بنابراین غیر قابل انتظار است که نرم هموار گاتو که تقریب های کمی روی مشتق های سویی دارد ساختار قوی و مفاهیم هندسی برای فضا داشته باشد. بین نرم مشتق پذیرگاتو و نقاط بحرانی و هندسه فضای باناخ جدایی پذیر رابطه وجود دارد.

در این پاین نامه خصوصیات آسپلوند ،انعکاسی، سوپر انعکاسی از فضای باناخ جدایی پذیر را ارائه می دهیم.و مشتق هولدرو تابع کوهانی را به عنوان ابزاری برای رسیدن به فضای سوپر انعکاسی به کار می بریم. در مجموعه حاضر در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و کاربردی در فضای باناخ می پردازیم.در فصل دوم مفهوم مشتق پذیری توابع روی فضای باناخ و ویزگی های آن بیان می شود.در فصل سوم همواری و تحدب تابع و رابطه آن با فضای سوپر انعکاسی مورد بررسی قرار می گیرد.در فصل چهارم مطالب سه فصل قبل بر اساس مفاهیم مورد نیاز در این فصل گرداوری شده اند ، به رابطه مشتق پذیری هولدر و تابع کوهانی در ایجاد فضای سوپر انعکاسی می پردازیم. شایان ذکر است که عمده مطالب گردآوری شده در این پایان نامه با محوریت فضای سوپر انعکاسی و مرجع [۱۰]و [۱۴] می باشد.

فصل ۱

پیشنیاز

۱.۱

فرض کنیم $X=(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ بامیدان حقیقی و $X^*=(X^*,\|.\|)$ دوگان فضای X باشد.
$B_X=\{x\in X, \|x\|\leqslant ۱\}$ را گوی واحد فضا و $S_X=\{x\in X, \|x\|=۱\}$ را کره واحد فضا در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. دو نرم $\|.\|$ و $|.|$ روی فضای باناخ X را معادل گوییم اگر اعداد مثبت M و m موجود باشند به طوری که برای هر $x\in X$ ،

$$m\|x\|\leqslant |x|\leqslant M\|x\|.$$

[۱۰] صفحه۱۱.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم $X=(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ و B یک مجموعه بسته ، کراندار ، محدب ، متقارن وصفر یک نقطه درونی مجموعه B باشد.در این صورت تابعک مینکوفسکی [۱] μ_B مجموعه ی B که به صورت

$$\mu_B=\inf\{\lambda>۰ : \lambda^{-۱}x\in B\},$$

تعریف می شود یک نرم معادل روی فضای X است. [۱۰] صفحه ۵۴.

[۱] Minkowski function

تعریف ۳.۱.۱. فضای $l_p(\mathbb{N})$ برای $p \in [1,\infty)$ برابر است با فضای باناخ تمام دنباله هایی به صورت $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ که $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^P<\infty$ و

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^P)^{\frac{1}{p}}.$$

[۱۰] صفحه ۵.

تعریف ۴.۱.۱. $l_\infty=l_\infty(\mathbb{N})$ برابر است با فضای باناخ تمام دنباله های کراندار با نرم $\|.\|_\infty$. به عبارت دیگر برای هر $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_\infty$

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x_i|; i\in\mathbb{N}\}.$$

[۱۰] صفحه ۵.

تعریف ۵.۱.۱. فضای l_∞^n فضای برداری n بعدی از همه اسکالرهای n تایی در $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ که نرم سوپریمم برای $x=(x_1,...x_n)\in l_\infty^n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_i|; i=1,...n\}.$$

[۱۰] صفحه ۳.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم K یک فضای اسکالر حقیقی یا مختلط باشد. برای هر مجموعه مجرد Γ فضای $l_\infty(\Gamma)$ شامل تمام توابع کراندار $f:\Gamma\longrightarrow K$ با نرم سوپریمم $\|.\|_\infty$ می باشد.

- فضای $c_0(\Gamma)$ یک زیر فضای $l_\infty(\Gamma)$ است و شامل تمام توابع $f\in l_\infty(\Gamma)$ ، به طوری که مجموعه $\{\gamma; |f(\gamma)|\geqslant\varepsilon\}$ برای هر $\varepsilon>0$ متناهی باشد [۱۰] صفحه ۷.

تعریف ۷.۱.۱. فضای $c_0=c_0(\mathbb{N})$ یک زیر فضای l_∞ است و شامل تمام دنباله های $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ است که حد آنها برابر صفر است [۱۰] صفحه ۶.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم Γ یک مجموعه ناتهی باشد.برای $x=(x_\gamma)\in c_0(\Gamma)$ نرم دی [۲] را به صورت

[۲] Day norm

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{\gamma_k}^{2}}{4^k})^{\frac{1}{2}}\},$$

تعریف می کنیم وقتی که سوپریمم روی همه $n \in \mathbb{N}$ و همه n تایی های مرتب $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ از اجزای مجزای Γ گرفته شود. [۱۰] صفحه ۳۸۱.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار خطی باشد.گوییم X یک فضای جدایی پذیر است اگر یک دنباله $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در X موجود باشد به طوری که

$$\overline{\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} = X.$$

به عبارت دیگر دنباله $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در X چگال باشد. [۱۰] صفحه ۱۴.

گزاره ۱۰.۱.۱. (۱) *اگر $P \in [1, \infty)$ ، آنگاه فضای l_P جدایی پذیر است.*

(۲) *فضای l_∞ جدایی پذیر نیست.*

(۳) *فضاهای c و c_0 جدایی پذیرند.* [۱۰] صفحه ۱۴.

گزاره ۱۱.۱.۱. *فضای باناخ X جدایی پذیر است اگروتنها اگر کره واحد S_X جدایی پذیر باشد.* [۱۰] صفحه ۲۶.

تعریف ۱۲.۱.۱. زیر مجموعه K از فضای باناخ X یک مخروط [۳] است اگراز $x \in K$ و $t \geqslant 0$ نتیجه شود که $tx \in K$.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم E زیر مجموعه فضای X باشد. غلاف محدب E [۴] اشتراک تمام زیر مجموعه های محدب X است که شامل E می باشند و آن را با نماد $co(E)$ نمایش می دهیم و بستار آن را با $clco(E)$ نمایش می دهیم. [۱۰] صفحه ۲.

گزاره ۱۴.۱.۱. *غلاف محدب هر مجموعه باز ، باز است.* [۱۸] صفحه ۳۶.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم U زیر مجموعه محدب از فضای باناخ X باشد.تابع $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب است هرگاه برای هر $x, y \in U$ و هر $0 < t < 1$

---

[۳] Cone

[۴] Convex hull

$$f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

[۱۰] صفحه ۲۴۲.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم f یک تابع روی فضای باناخ X باشد.برنمودار [۵] f را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$epi(f)=\{(x,\mu): x\in X, \mu\in\mathbb{R}, f(x)\leqslant \mu\}.$$

[۱۰] صفحه ۳۱۷.

گزاره ۱۷.۱.۱. *تابع f محدب است اگر و تنها اگر برنمودار آن محدب باشد.* [۱۶] صفحه ۳۸ .

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف باشد. $f: X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ در $x\in X$ نیم پیوسته پایین است در صورتی که

$$\{x\in X: \quad f(x)\leqslant r\},$$

برای هر $r\in\mathbb{R}$ مجموعه بسته در X باشد. [۱۶] صفحه ۳۸.

گزاره ۱۹.۱.۱. *تابع f نیم پیوسته پایین است اگروتنها اگر برنمودار آن در $X\times\mathbb{R}$ بسته باشد.* [۱۶] صفحه ۳۸ .

قضیه ۲۰.۱.۱. *اگر$(X,\|.\|)$ فضای باناخ و$|||.|||$ یک نرم معادل روی X^* باشد.آنگاه$|||.|||$ دوگان نرمی معادل روی X است اگروتنها اگر$|||.|||$ ، w^*-نیم پیوسته پایین باشد.* [۱۰] صفحه ۲۴۵ .

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشدو $f: X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. قرار می دهیم

$$Dom(f)=\{x\in X: f(x)<\infty\},$$

تابع f را سره [۶] گوئیم اگر $x\in X$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x)<\infty$.به عبارت دیگر $Dom(f)\neq\varnothing$. [۱۰] صفحه ۳۱۷.

---
[۵] Epigraph
[۶] Proper

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم f یک تابع سره روی فضای باناخ X باشد. دوگان فنچل [۷] ، $f^*: X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ برای f به صورت زیر تعریف می شود

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x); x \in X\},$$

بنابراین f^* یک تابع محدب از X^* به $]-\infty, +\infty]$ است.همچنین قرار می دهیم $f^{**} = (f^*)^*$. [۱۰] صفحه ۳۲۱.

لم ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشدو $f: X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ یک تابع سره باشد به طوری که f^* نیز سره است. در این صورت $epi(f^{**}) = \overline{conv}^{w^*}(epi(f))$.* [۹] صفحه ۳۴۹ .

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض X یک فضای باناخ باشد.چگالی X را با $dens(X)$ نشان می دهیم و عبارت است از کوچکترین کاردینال از مجموعه های چگال در X . داریم

$$dens(X) \leqslant dens(X^*).$$

[۱۰] صفحه ۳۵۸.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد. یک برش [۸] A به وسیله $x^* \in X^*$ برای $\alpha > 0$ و $\sigma_A(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in A\}$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$S(x^*, A, \alpha) = \{x \in A : \langle x^*, x\rangle > \sigma_A(x^*) - \alpha\}.$$

[۱۶] صفحه ۲۴.

تعریف ۲۶.۱.۱. زیر مجموعه ناتهی A از فضای باناخ X دندانه پذیر [۹] است اگر یک برش با قطر دلخواه کوچک بپذیرد. یعنی برای هر ε ، $x^* \in X^*$ و $\alpha > 0$ وجود داشته باشند به طوری که $diamS(x^*, A, \alpha) < \varepsilon$. [۱۶] صفحه ۷۹.

تعریف ۲۷.۱.۱. فضای باناخ X خاصیت رادون-نیکودیم [۱۰] (به طور خلاصه RNP) دارد اگر وتنها اگر هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار آن دندانه پذیر باشد. [۱۶] صفحه ۷۹.

---

[۷] Fenchel
[۸] Slice
[۹] Dentable
[۱۰] Radon-Nikodym

تعریف ۲۸.۱.۱. فضای باناخ X متمم نوع [۱۱] ۲ دارد اگر ثابت $C > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای همه بردارهای $x_۱, x_۲, ...x_n \in X$ داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm ۱}\|\sum_{i=۱}^{n}\varepsilon_i x_i\| \geqslant \frac{۱}{C}(\sum_{i=۱}^{n}\|x_i\|^۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

فضای باناخ X از نوع [۱۲] ۲ گفته می شود اگر ثابت $C > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای همه بردارهای $x_۱, x_۲, ...x_n \in X$ داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm ۱}\|\sum_{i=۱}^{n}\varepsilon_i x_i\| \leqslant C(\sum_{i=۱}^{n}\|x_i\|^۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

برای $q \in [۲, \infty)$ متمم نوع و نوع q به طور مشابه تعریف می شود. [۱۰] صفحه ۳۰.

لم ۲۹.۱.۱. *اگر فضای باناخ X از نوع p باشد آنگاه X^* از نوع $q = \frac{p}{p-۱}$ است.* [۱۴] صفحه ۱۶۶.

مثال ۳۰.۱.۱. فضای $l_۱$ متمم نوع ۲ دارد. [۱۰] صفحه ۳۰۶.

تعریف ۳۱.۱.۱. فضای باناخ $C(K)$ فضای توابع اسکالر پیوسته روی فضای فشرده K است با نرم سوپریمم.

گزاره ۳۲.۱.۱. *فرض کنیم K یک فضای متری فشرده باشد.فضای باناخ $C(K)$ جدایی پذیر است اگروتنها اگر K مترپذیر باشد.* [۱۰] صفحه ۷۲.

تعریف ۳۳.۱.۱. فضای فشرده K پراکنده [۱۳] نامیده می شود اگر هر زیر مجموعه بسته $L \subset K$ یک نقطه تنها در L داشته باشد.
به یاد داشته باشید که نقطه p در K تنهاست اگر همسایگی U از p در K موجود باشد به طوری که $U \cap K = \{p\}$. [۱۰] صفحه ۳۹۸.

گزاره ۳۴.۱.۱. *فضای فشرده K شمارش پذیر است اگروتنها اگر K مترپذیر و پراکنده باشد.* [۱۰] صفحه ۳۹۹.

[۱۱] Cotype
[۱۲] Type
[۱۳] Scattered

قضیه ۱.۱.۳۵. (*لم بئر* [۱۴]) *هرگاه* S

(۱) یک فضای متری تام یا

(۲) یک فضای متری هاسدورف موضعا فشرده باشد.

آنگاه اشتراک هر گردایه شمارش پذیر از زیر مجموعه های باز وچگال S *در* S *چگال است.* [۱۸] صفحه ۴۲ .

قضیه ۱.۱.۳۶. (*اکلند*[۱۵]) *فرض کنیم* X *یک فضای باناخ باشد و* $f : X \longrightarrow R \cup \{\infty\}$ *یک نگاشت نیم پیوسته پایین و از پایین کراندار باشد. برای هر* $\varepsilon > 0$ *و هر* $x \in X$ *، عضوی مانند* $x_{\circ} \in X$ *وجود دارد به طوری که*

$$f(x) \geqslant f(x_{\circ}) - \varepsilon \|x - x_{\circ}\|.$$

[۱۰] صفحه ۸۳.

تعریف ۱.۱.۳۷. نگاشت $T : (P, \rho) \longrightarrow (Q, \varrho)$ بین دو فضای متری لیپ شیتز [۱۶] نامیده می شود اگر $C > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\varrho(T(x), T(y)) \leqslant C\rho(x, y)\ ; \forall x, y \in P.$$

در مورد فضاهای نرمدار داریم

$$\|T(x) - T(y)\|_Q \leqslant C\|x - y\|_P.$$

هر نگاشت لیپ شیتز پیوسته یکنواخت است. [۱۰] صفحه ۱۰.

لم ۱.۱.۳۸. *در فضای باناخ* X *هر تابع محدب پیوسته تعریف شده روی یک مجموعه باز و محدب* C *، موضعا لیپ شیتز روی* C *است.* [۱۰] صفحه ۲۵۱ .

---

[۱۴] Baire category

[۱۵] Ekeland

[۱۶] Lipschitz

فصل ۲

مشتق گاتو و فرشه

۱.۲ مشتق پذیری نرم

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم X, Y دو فضای باناخ و $U \subset X$. مشتق جهتی تابع $f : U \longrightarrow Y$ در نقطه $x \in U$ و در جهت $h \in S_X$ را با $f'(x)h$ نمایش می دهیم و برابر است با حد زیر در صورتی که موجود باشد.

$$f'(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

مشتق پذیری توابع روی فضا های باناخ تعمیمی از نظریه مشتق جهتی روی $\mathbb{R}^n$ می باشد. [۱۰] صفحه ۲۴۱.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ ، $U \subset X$ یک زیر مجموعه باز X ، نگاشت $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ و $x \in U$. گوییم نگاشت f در x مشتق پذیر گاتو [۱] است اگر $F \in X^*$ موجود باشد به طوری که

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = F(h) = f'(x)h,$$

برای هر $h \in X$. [۱۰] صفحه ۲۴۱.

تعریف ۳.۱.۲. گوییم نگاشت $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x \in U$ مشتق پذیر فرشه [۲] است اگر حد زیر برای $h \in S_X$ به طور یکنواخت برقرار شود.

[۱] Gateaux
[۲] Frechet

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = F(h) = f'(x)h.$$

نگاشت F را مشتق گاتو (فرشه) f در x می نامیم و $F = f'(x)$.

گوییم نگاشت f مشتق پذیر گاتو (فرشه) روی U است اگر در هر نقطه U مشتق پذیر گاتو (فرشه) باشد. [۱۰] صفحه ۲۴۱.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد.تابع نرم $\|.\|$ را روی فضای باناخ X مشتق پذیر گاتو (فرشه) می نامیم اگر در هر نقطه $X \setminus \{0\}$ مشتق پذیر گاتو (فرشه) باشد. [۱۰] صفحه ۲۴۱.

ملاحظه ۵.۱.۲. *برای توابع پیوسته محدب روی $\mathbb{R}^n$ مشتق پذیری گاتو و فرشه بر هم منطبق هستند. همچنین در فضاهای نامتناهی البعد همواره مشتق پذیری فرشه مشتق پذیری گاتو را نتیجه می دهد. اما در حالت کلی مشتق پذیری گاتو مشتق پذیری فرشه را نتیجه نمی دهد.*

لم ۶.۱.۲. *تابع نرم $\|.\|$ از فضای باناخ X در $x \in X \setminus \{0\}$ مشتق پذیر فرشه است اگر وتنها اگر حد*

$$lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\| + \|x-th\| - 2\|x\|}{t} = 0,$$

برای $h \in S_X$ به طور یکنواخت برقرار باشد. [۱۰] صفحه ۲۴۲ .

در سال ۱۹۴۰ اسمولین [۳] لم زیر را که یکی از اساسی ترین ابزار برای بررسی مشتق تابع نرم است ثابت کرد.

لم ۷.۱.۲. *فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد و $x \in X$.*

(الف) احکام زیر معادلند

(۱) *تابع $\|.\|$ در x مشتق پذیر فرشه است.*

(۲) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\| = 0$ *هرگاه* $f_n, g_n \in S_{X^*}$ *و*

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1.$$

[۳] Smulian

(۳) دنباله $\{f_n\} \in S_{X^*}$ همگرا باشد ، هرگاه $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

(ب) احکام زیر معادلند

(۱) تابع $\|.\|$ در x مشتق پذیر گاتو است.

(۲) $f_n - g_n \longrightarrow^{w^*} 0$ در X^* ، هرگاه $f_n, g_n \in X^*$ و

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1.$$

(۳) $\{f\} \in S_{X^*}$ یکتا موجود باشد به طوری که $f(x) = 1$. [۱۰] صفحه ۲۴۳.

لم ۸.۱.۲. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشدو f تابعی محدب و پیوسته روی زیر مجموعه ناتهی و محدب $D \subseteq X$ باشد. تابع f در $x \in D$ مشتق پذیر فرشه است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که*

$$\|f(x+ty) + f(x-ty) - 2f(x)\| \leqslant t\varepsilon,$$

برای $\|y\| = 1$ و $0 < t < \delta$. [۱۶] صفحه ۱۴.

لم ۹.۱.۲. *فرض کنیم X یک فضای باناخ و U یک زیر مجموعه باز X باشد. اگر φ در $x_0 \in U$ مشتق پذیر فرشه باشد ،آنگاه نگاشت خطی پیوسته $\varphi'(x_0)$ روی X موجود است به طوری که برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد که*

$$\|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|,$$

برای $\|h\| \leqslant \delta$.

$\varphi'(x_0)$ را مشتق فرشه φ می نامیم و $\varphi'(x_0)$ منحصر بفرد است. [۱۶] صفحه ۱۴.

قضیه ۱۰.۱.۲. *فرض کنیم X فضای باناخ جدایی پذیر باشد.اگر X یک نرم معادل مشتق پذیر فرشه بپذیرد آنگاه X^* جدایی پذیر است .* [۱۰] صفحه ۲۴۴.

تعریف ۱۱.۱.۲. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد.نرم $\|.\|$ را محدب اکید [۴] می نامیم اگر برای هر x, y در S_X که $\|x+y\| = 2$ نتیجه شود $x = y$. [۱۰] صفحه ۲۴۶.

[۴] Strictly convex

گزاره ۱۲.۱.۲. *فرض کنیم $(X,\|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. در این صورت گزاره های زیر معادل هستند:*

(۱) $\|.\|$ محدب اکید است.

(۲) اگر $x,y\in X$ و $۲\|x\|^۲+۲\|y\|^۲-\|x+y\|^۲=۰$ آنگاه $x=y$.

(۳) اگر $x,y\neq ۰$ و $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ آنگاه $x=\lambda y$ برای $\lambda>۰$. [۱۰] صفحه ۲۴۶.

قضیه ۱۳.۱.۲. *فرض کنیم $(X,\|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد و $\|.\|^*$ نرم فضای دوگان X^* باشد. اگر $\|.\|^*$ محدب اکید باشد آنگاه $\|.\|$ مشتق پذیر گاتو است.* [۱۰] صفحه ۲۴۶.

قضیه ۱۴.۱.۲. *هر فضای باناخ جدایی پذیر نرم معادلی می پذیرد که مشتق پذیر گاتو است.* [۱۰] صفحه ۲۷۴.

برهان. فرض کنیم X یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد و $\{x_n\}\subset S_X$ یک دنباله چگال در S_X باشد. نرم $|||.|||$ روی X^* را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$|||f|||^۲=۲\|f\|^{*۲}+\sum ۲^{-i}f^۲(x_i),$$

که $f\in X^*$ و $\|.\|^*$ نرم اولیه روی فضای X^* است. با استفاده از قضیه (۲۰.۱.۱) $|||.|||$ یک نرم دوگان برای $\|.\|$ روی فضای X است. بنا به قضیه (۱۳.۱.۲) کافی است نشان دهیم که $\|.\|$ محدب اکید است. فرض کنیم $f,g\in X^*$ و $۲\|f\|^۲+۲\|g\|^۲-\|f+g\|^۲=۰$. چون

$$۲\|f\|^{*۲}+۲\|g\|^{*۲}-\|f+g\|^{*۲}\geqslant ۰,$$

و

$$۲f^۲(x_i)+۲g^۲(x_i)-(f+g)^۲(x_i)\geqslant ۰\quad \forall i\in\mathbb{N},$$

لذا داریم

$$۲f^۲(x_i)+۲g^۲(x_i)-(f+g)^۲(x_i)=(f-g)^۲(x_i)=۰.$$

پس روی یک مجموعه چگال $f=g$. در نتیجه $|||.|||$ محدب اکید است. لذا شرایط قضیه (۱۳.۱.۲) برقرار است و نرم فضای X مشتق پذیر گاتو است. □

مثال ۱۵.۱.۲. اگر Γ یک مجموعه دلخواه باشد .آنگاه $c_0(\Gamma)$ یک نرم موضعا محدب اکید می پذیرد. [۱۴] صفحه ۷۴.

قضیه ۱۶.۱.۲. *فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ با دوگان X^* باشد. اگر نرم فضای X^* محدب اکید (مشتق پذیر گاتو) باشد آنگاه نرم فضای X مشتق پذیر گاتو (محدب اکید) خواهد بود.* [۱۴] صفحه ۴۳ .

تعریف ۱۷.۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. نرم $\|.\|$ را موضعا محدب یکنواخت در $x_0 \in X$ می نامیم اگر برای هر $\{x_n\} \subset X$ که

$$\lim_{n\to\infty} 2\|x_0\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2 = 0$$

نتیجه شود $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

اگر نرم در هر نقطه از X موضعا محدب یکنواخت باشد آن نرم را موضعا محدب یکنواخت (به طور خلاصه LUR) [5] می نامیم.

مثال ۱۸.۱.۲. نرم فضای هیلبرت یک نرم LUR است. [۱۰] صفحه ۲۴۸.

گزاره ۱۹.۱.۲. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $\|.\|$ یک نرم روی X و $x_0 \in S_X$ . .در این صورت عبارات زیر معادل هستند*

(۱) $\|.\|$ موضعا محدب یکنواخت است.

(۲) اگر $x_n \in S_X$ و برای $n = 1, \ldots$ $\lim_{n\to\infty} \|x_n + x_0\| = 2$

آنگاه $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. [۱۴] صفحه ۴۲ .

قضیه ۲۰.۱.۲. *فرض کنیم X یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد در این صورت X یک نرم موضعا محدب یکنواخت می پذیرد.* [۱۰] صفحه ۲۴۸ .

قضیه ۲۱.۱.۲. *فرض کنیم X^* یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد دراین صورت X^* یک نرم موضعا محدب یکنواخت می پذیرد.* [۱۴] صفحه ۴۸ .

مثال ۲۲.۱.۲. نرم دی روی c_0 یک LUR نرم است. [۱۰] صفحه ۳۸۱.

---

[5] Locally uniformly rotund

گزاره ۲.۱.۲۳. *فرض کنیم X یک فضای باناخ و $\|.\|^*$ نرم دوگان روی X^* باشد. اگر $\|.\|^*$ موضعا محدب یکنواخت باشد آنگاه $\|.\|$ روی X مشتق پذیر فرشه است.* [۱۰] صفحه ۲۵۰ .

قضیه ۲.۱.۲۴. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و X^* جدایی پذیر باشد در این صورت X یک نرم معادل مشتق پذیر فرشه می پذیرد.* [۱۰] صفحه ۲۵۰ .

۲.۲ نرم UG, UF

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم f یک تابع حقیقی مقدار روی زیر مجموعه باز U از فضای باناخ X باشد.نگاشت f روی U را به طور یکنواخت مشتق پذیر گاتو (UG) گوییم اگر برای هر $h \in S_X$ حد زیر برقرار باشد

$$\lim_{t\to ۰} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = F(h) = f^{'}(x)h.$$

تعریف ۲.۲.۲. گوییم نگاشت f به طور یکنواخت مشتق پذیر فرشه (UF) است اگر حد فوق در $x \in U$ و $h \in S_X$ به طور یکنواخت برقرار شود. [۱۰] صفحه ۲۸۹.

تعریف ۳.۲.۲. نرم $\|.\|$ از فضای باناخ X را به طور یکنواخت مشتق پذیر فرشه (گاتو) گوییم اگر روی S_X به طور یکنواخت مشتق پذیر فرشه (گاتو) باشد.

تعریف ۴.۲.۲. (۱) نرم $\|.\|$ از فضای باناخ X را یکنواخت محدب (مدور [۶] یا UR) می نامیم اگر به ازای دنباله های $x_n, y_n \in S_X$ که $lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = ۲$ نتیجه شود

$$lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = ۰.$$

(۲) نرم $\|.\|$ از فضای باناخ X را ضعیف یکنواخت محدب (WUR) می نامیم اگر در توپولوژی ضعیف X به ازای دنباله های $x_n, y_n \in S_X$ که $lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = ۲$ نتیجه شود

$$lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = ۰.$$

(۳) نرم $\|.\|^*$ ازفضای باناخ X^* را w^*-ضعیف یکنواخت محدب (مدور) (W^*UR) می نامیم اگر در w^* - توپولوژی X^* به ازای دنباله های $f_n, g_n \in S_{X^*}$ که $lim_{n\to\infty}\|f_n + g_n\|^* = ۲$ نتیجه شود

$$lim_{n\to\infty}(f_n - g_n) = ۰ .$$

[۱۴]. صفحه ۶۱.

[۶] rotund

گزاره ۵.۲.۲. نرم $\|.\|$ ازفضای باناخ X را ضعیف یکنواخت محدب (WUR) می نامیم اگروتنها اگر در توپولوزی ضعیف ،

$$lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = ۰.$$

در صورتی که $x_n, y_n \in S_X$ به طوری که

$$lim_{n\to\infty} ۲\|x_n\|^۲ + ۲\|y_n\|^۲ - \|x_n - y_n\|^۲ = ۰.$$

(۲) نرم $\|.\|^*$ فضای باناخ X^* را w^* -یکنواخت محدب (W^*UR) می نامیم اگر در w^*- توپولوزی X^*، $lim_{n\to\infty}(f_n - g_n) = ۰$ ، هرگاه $f_n, g_n \in S_X$ به طوری که

$$lim_{n\to\infty} ۲\|f_n\|^۲ + ۲\|g_n\|^۲ - \|f_n - g_n\|^۲ = ۰.$$

[۱۴] صفحه ۶۱.

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد .در این صورت

(۱) تابع $\|.\|$ یک UG است اگروتنها اگر نرم دوگان از فضای X^* یک W^*UR باشد.

(۲)تابع $\|.\|$ یک WUR است اگر وتنها اگر نرم دوگان از فضای X^* یک UG باشد. [۱۴] صفحه ۶۳.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنیم Y یک فضای باناخ با نرم UG و $E \subset X$ یک زیر مجموعه چگال در فضای باناخ X باشد. اگر $T : Y \longrightarrow E$ یک عملگر خطی و کراندار باشد آنگاه X یک نرم UG می پذیرد. [۱۴] صفحه ۶۵.

لم ۸.۲.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ جدایی پذیر باشدآنگاه یک عملگر خطی ، کراندار ، $w - w^*$ نیم پیوسته ، $T : X^* \longrightarrow l_۲(\mathbb{N})$ موجود است به طوری که

$$T^* : l_۲^*(\mathbb{N}) \simeq l_۲(\mathbb{N}) \longrightarrow X,$$

یک عملگر $w - w^*$ پیوسته و $T^*(l_۲^*(\mathbb{N}))$ در X چگال است. [۱۴] صفحه ۴۷ .

قضیه ۹.۲.۲. اگر X یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد آنگاه X یک نرم UG می پذیرد. [۱۴] صفحه ۶۶.