بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

ارتباط خاصیت سایه زنی میانگین

مجانبی و خاصیت تعدی پذیری برای شارهای پیوسته

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مولایی

مولف:

فاطمه محبتی

مهر ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادر گرامی

و خواهر و برادر عزیزتر از جانم

سپاس خدای را که به من نعمت هستی داد تا نعمت را بر من تمام کند،پدر ومادر داد تـا عشـق را بیـاموزم، معلمانی داد تا چراغ راهم باشند، دوستانی داد تا شاد زندگی کنم

و خودش را، که هر چه هست اوست.

از پدر ومادر مهربانم که همواره با مهربانی های خویش به مـن امیـد مـی دهنـد، از اسـتاد بزرگـوارم دکتـر مولایی که با راهنمایی های دلسوزانه شان مرا با دنیـایی فراتـر از ریاضـیات آشـنا کردنـد، از دوسـتانم کـه زیباترین لحظات زندگی ام را در کنارشان احساس کردم، کمال تشکر را دارم .همچنـین از جنـاب آقـای دکتر یعقوبی و دکتر ابراهیمی که زحمت داوری این پایان نامه را قبول فرمودند تشکر می کنم.

چکیده

در این پایان نامه خاصیت سایه زنی میانگین مجانبی و خاصیت سایه زنی میانگین برای شارها معرفی شده است، رابطه های بین این خاصیت ها و خاصیت تعدی پذیری برای شارها بررسی شده است. همچنین نشان داده ایم یک شار روی یک فضای متریک فشرده، تعدی پذیر زنجیری است اگر خاصیت سایه زنی میانگین مجانبی مثبت (یا منفی) داشته باشد. یک شار پایدار لیاپونوف مثبت (منفی)، تعدی پذیر توپولوژیکی مثبت (منفی) است به شرط اینکه دارای خاصیت سایه زنی مثبت (منفی) باشد.

علاوه بر این، دو شرطی که یک شار را مینیمال میکند بدست آمده است.

در انتها ثابت می کنیم یک شار پیوسته با خاصیت سایه زنی میانگین، تعدی پذیر زنجیری است و یک شار پایدار لیاپونوف با خاصیت سایه زنی میانگین، یک شار مینیمال است.

مقدمه

همانطور که اسمیل[1] اشاره کرده است [۱۹]، یک مسئله ی خیلی مهم در تئوری سیستم های دینامیکی پیدا کردن مجموعه ی مینیمال است. یک خلاصه مختصر در این مورد در مرجع [۸] آورده شده است.

مفهوم خاصیت سایه زنی از مطالعه ی دیفئومورفیسم های انوسو[2] ناشی می شود [۱]. کارهای وجودی زیادی برای پیدا کردن مجموعه ی مینیمال در سیستم های با خاصیت سایه زنی وجود دارد. برای مثال کاتو[3] نشان داد که یک شار پایدار لیاپونوف با خاصیت سایه زنی، یک شار مینیمال است [۱۱].

کومورو[4] نشان داد تقریباً در زمان یکسان، شار متساوی الفاصله با خاصیت سایه زنی، یک شار مینیمال است [۱۲]. او و وانگ[5] نشان دادند که یک شار دیستال[6] با خاصیت سایه زنی، یک شار مینیمال است[۸]. اخیراً مائی[7] نشان داد که یک شار نقطه به نقطه بازگشتی با خاصیت سایه زنی، یک شار مینیمال است [۱۵].

به عنوان یک تعمیم مشخص از خاصیت سایه زنی در سیستم های دینامیکی تصادفی، بلانک[8] مفهوم خاصیت سایه زنی میانگین را در مطالعه ی سیستم های دینامیکی آشفته معرفی کرد [2]، که این خاصیت ابزار خوبی برای مشخص کردن دیفئومورفیسم های انوسو است [۸].

---

1 *Smale*
2 *Anosov*
3 *kato*
4 *Komouro*
5 *Wang*
6 *Distal*
7 *Mai*
8 *Blank*

در این پایان نامه نشان داده ایم که یک شار پایدار لیاپونوف با خاصیت سایه زنی میانگین، مینیمال است [۹].

ایرولا[9] و همکاران مفهوم خاصیت سایه زنی حدی را معرفی کردند [۱۰]. این خاصیت از دید عددی یعنی اگر ما یک روش عددی به کار ببریم که سیستم را با " دقت اصلاح شده " تقریب بزند، در صورتی که قدم اشتباه وقتی زمان به بینهایت میرود، به صفر میل کند، آنگاه مدارهای عددی بدست آمده به مدارهای حقیقی میل می کند.

در این پایان نامه ما مفهوم خاصیت سایه زنی میانگین مجانبی[10] یا به طور خلاصه $AASP$ برای شارها را معرفی می کنیم که یک تعمیم از خاصیت سایه زنی حدی در سیستم های دینامیکی تصادفی است.

[9] *Eirola*
[10] *Asymptotic Average Shadowing Property*

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و اندیشه های پایه

تئوری مدرن سیستم های دینامیکی در اواخر قرن نوزدهم با سوالهای اصلی در مورد پایداری و تکامل منظومه شمسی آغاز شد. تلاش ها برای جواب دادن به این سئوالات منجر به گسترش و پیشرفت یک رشته ی قوی و غنی با کاربرد در فیزیک، زیست شناسی، هواشناسی، نجوم، اقتصاد و باقی زمینه ها شد.

سیستم های دینامیکی مطالعه ی رفتار های درازمدت از سیستم های تکامل است. تکامل یک سیستم دینامیکی به معنی تغییر در حالت سیستم، با زمان $t \in T$ است که T یک مجموعه ی مرتب می باشد. ما دو نمونه از سیستم های دینامیکی را در نظر می گیریم، آنهایی که با زمان پیوسته $T = \mathbb{R}$ هستند و آنهایی که با زمان گسسته $T = \mathbb{Z}$ هستند. سیستم های نوع اول را سیستم های دینامیکی با زمان پیوسته و نوع دوم را سیستم های دینامیکی با زمان گسسته می نامیم.

سیستم های دینامیکی به طور طبیعی در محیط زیست و اقتصاد ظاهر می شوند، وقتی که حالت یک سیستم در لحظه ی معین t، کاملا حالت بعد از یکسال آن را یعنی در زمان $t + 1$ مشخص می کند.

۱-۱ سیستم های دینامیکی گسسته

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم مجموعه $\{ f^t : X \to X \,;\, t \in \mathbb{Z} \}$، مجموعه ای از نگاشت ها و X مجموعه ای ناتهی باشد. $(X , \{ f^t \}_{t\in\mathbb{Z}})$ را یک سیستم دینامیکی با زمان گسسته (یا به طور خلاصه یک سیستم دینامیکی گسسته) می نامیم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

۱) $f^0 = id$،

۲) $\forall\, s, t \in \mathbb{Z} \qquad f^t o f^s = f^{t+s}$،

(id تابع همانی است که در اینجا از X به X می باشد).

گــزاره ۱-۱-۲. اگـر X یـک فضـای توپولوژیـک و $f: X \to X$ همئومورفیسـم باشـد، $(X , \{ f^n \}_{n\in\mathbb{Z}})$ یک سیستم دینامیکی گسسته است، وقتی کـه f^n بـه صـورت زیـر تعریـف می شود:

$$f^n = \begin{cases} f o \cdots o f \ \ (n \text{ مرتبه}) & n \geq 1 \\ id & n = 0 \\ f^{-1} o \cdots o f^{-1} \ \left(-n \text{ مرتبه} \right) & n \leq -1 \end{cases} .$$

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنیم $(X , \{ f^t \}_{t\in\mathbb{Z}})$ یک سیستم دینامیکی گسسته باشد. برای نقطه $p \in X$، مدار p را که با $O(p)$ نمایش می دهیم، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$O(p) = \{ f^t(p) \,;\, t \in \mathbb{Z} \}.$$

اگر $f(p) = p$ باشد، p را نقطه ی ثابت سیستم می نامیم. در این صورت مدار p به تک نقطه p کاهش می یابد ($O(p) = \{ p \}$).

تعریف ۱-۱-۴. فرض کنیم $(X , \{ f^t \}_{t\in\mathbb{Z}})$ یک سیستم دینامیکی گسسته باشد. ω- حد نقطه ی $p \in X$ را با $\omega(p)$، و α- حد p را با $\alpha(p)$، نمایش داده و به صورت های زیر تعریف می کنیم:

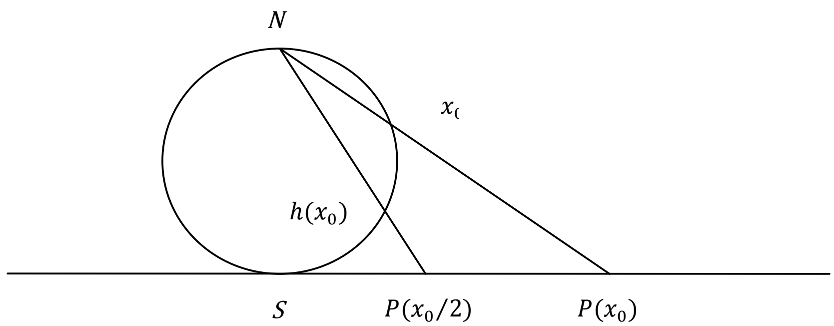
$$\omega(p) = \{ q \in X \;;\quad \exists\{t_n\}\;\; s.t.\;\; t_n \to +\infty , f^{t_n}(p) \to q \},$$

$$\alpha(p) = \{ q \in X \;;\quad \exists\{t_n\}\;\; s.t.\;\; t_n \to -\infty , f^{t_n}(p) \to q \}.$$

مثال ۱-۱-۵. تابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه ی $f(x) = x/2$ را در نظر می گیریم. هنگامی که دایره ی S^1 و خط $\mathbb{R}$ مماس بر دایره را داشته باشیم، تابع استیو گرافیک نقطه ی $x_0 \in S^1$ را به نقطه ای از $\mathbb{R}$ می نگارد که محل تقاطع خط گذرنده از N و x_0، با $\mathbb{R}$ می باشد (شکل ۱).

حال تابع استیو گرافیک را با P نشان داده و $h: S^1 \to S^1$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(x) = \begin{cases} N & x = N \\ S & x = S \\ P^{-1}\left(f\left(P(x)\right)\right) = P^{-1}(P(x)/2) & x \notin \{N,S\} \end{cases}.$$



شکل ۱

$(S^1, \{ h^n \}_{n\in\mathbb{Z}})$ یک سیستم دینامیکی گسسته است. ملاحظه می شود که برای هر $x \in S^1$ مخالف N و S، رابطه های $lim_{n\to\infty} h^n(x) = S$ و $lim_{n\to\infty} h^{-n}(x) = N$ برقرار است و یا به عبارتی $\omega(x) = S$ و $\alpha(x) = N$ می باشند. همچنین N و S نقاط ثابت این سیستم می باشند.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم $(X , \{ f^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ یک سیستم دینامیکی گسسته باشد. نقطه ی $x \in X$ را نقطه ی متناوب گوییم، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ ی وجود داشته باشد به قسمی که $f^n(x) = x$ باشد. همچنین کوچکترین n که در $f^n(x) = x$ صدق کند را دوره ی تناوب x می نامیم.

مثال ۱-۱-۷. گروه S^1 را با عمل ضرب اعداد مختلط و تابع $f: S^1 \to S^1$ که $f(x) = ax$ است را در نظر می گیریم. اگر $a \in S^1$ و a ریشه ی n-ام واحد باشد، آنگاه $a^n = 1$ است و برای هر $x \in S^1$ مدار x به شکل زیر است:

$$O(x) = \{ f^n(x) \,; n \in \mathbb{Z} \} = \{ x, ax, \cdots , a^{n-1}x \}.$$

در این حالت برای هر $x \in S^1$، مدار x متناوب و از دوره ی تناوب n می باشد.

اگر $a \in S^1$ ولی a ریشه ی n-ام واحد نباشد، آنگاه مدار x، برای هر $x \in S^1$، نامتناهی و در X چگال است.

۱-۲ سیستم های دینامیکی پیوسته (شارها)

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم مجموعه ی $\{ \varphi^t : X \to X \ ; \ t \in \mathbb{R} \}$ مجموعه ی نگاشت ها و X مجموعه ای ناتهی باشد. $(X , \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}})$ را یک سیستم دینامیکی با زمان پیوسته (یا به طور خلاصه یک سیستم دینامیکی پیوسته) می نامیم هرگاه دو شرط زیر وجود داشته باشد:

(۱) $\varphi^0 = id$،

(۲) $\forall \, s,t \in \mathbb{R} \qquad \varphi^t o \varphi^s = \varphi^{t+s}$.

یک سیستم دینامیکی پیوسته را اصطلاحا، یک شار می نامیم.

در یک شار φ^t معکوس پذیر است. زیرا به ازای هر t، φ^t یک نگاشت است و با توجه به شرط (۱) و (۲)، $\varphi^t o \varphi^{-t} = \varphi^0 = id$ و $\varphi^{-t} o \varphi^t = \varphi^0 = id$. لذا $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$ است و بنابراین φ^t، به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ معکوس پذیر است.

گزاره ۱-۲-۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\varphi: \mathbb{R} \times X \to X$ نگاشتی پیوسته با این خواص باشد که:

$$\forall x \in X \qquad \varphi(0, x) = x \tag{۱}$$،

$$\forall\, t, s \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in X \qquad \varphi\big(t\,, \varphi(\,s\,, x\,)\big) = \varphi(\,t + s\,, x\,) \tag{۲}$$،

آنگاه $(\,X\,, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}\,)$ یک سیستم دینامیکی پیوسته است، که $\varphi^t: X \to X$ با ضابطه ی $\varphi^t(x) = \varphi(\,t\,, x)$ می باشد. در این حالت $\varphi: \mathbb{R} \times X \to X$ یک شار است.

مثال ۱-۲-۳. صفحه ی $X = \mathbb{R}^2$ و خانواده ی تبدیلات خطی معکوس پذیر φ^t روی X که به وسیله ی ماتریس وابسته به متغییر $t \in \mathbb{R}$ زیر داده شده است، را در نظر می گیریم:

$$\varphi^t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

که $\lambda\,, \mu\ \neq 0$ اعداد حقیقی می باشند. این، یک سیستم دینامیکی پیوسته روی X است [۱۳].

تعریف ۱-۲-۴. فرض می کنیم $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ یک منیفلد هموار باشد. یک میدان برداری از کلاس C^r روی M، یک نگاشت C^r، $X: M \to \mathbb{R}^k$ است که به هر نقطه ی $p \in M$، یک بردار $X(\,p) \in T_pM$ نسبت می دهد.

M^m، منیفلد M است که $dim\, M = m$ می باشد. T_pM فضای مماس بر M در نقطه ی p است. و نگاشت از کلاس C^r، نگاشتی است که مشتقات جزئی آن تا مرتبه ی r موجود و پیوسته باشند. مجموعه ی همه ی میدان های برداری C^r روی M را با $\chi^r(M)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۲-۶. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و $X \in \chi^r(M)$ برای $r \geq 1$ باشد. نگاشت C^{r+1}، $\alpha: (-\varepsilon , \varepsilon) \to M$ را یک منحنی انتگرال X، گذرنده از نقطه ی $p \in M$ می گوییم، هرگاه:

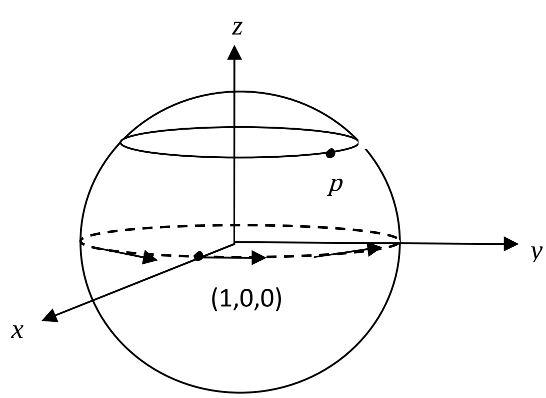
$$\alpha(0) = p \quad , \quad \alpha'(t) = X\big(\alpha(t)\big) \qquad\qquad \forall t \in (-\varepsilon , \varepsilon).$$

مثال ۱-۲-۷. منیفلد $M = S^2$ را در نظر می گیریم. $X: S^2 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه ی $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ داده شده است (شکل ۳).

$$S^2 = \{ (x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

به ازای نقطه ی دلخواه $p = (p_1, p_2, p_3)$ روی کره ی S^2، $X(p). p = 0$ است. بنابراین $X(p)$ بر بردار p عمود و لذا $X(p) \in T_p(S^2)$ می باشد. یعنی $X \in \chi^r(M)$ است. فرض کنیم $\alpha_p: (-\varepsilon , \varepsilon) \to S^2$ یک منحنی انتگرال X، گذرنده از $p \in S^2$ باشد پس

$$\alpha_p(0) = p \ , \qquad X\left(\alpha_p(t)\right) = \alpha_p'(t) .$$



شکل ۳

اگر $\alpha_p(t) = (\alpha_{p_1}(t)\,, \alpha_{p_2}(t)\,, \alpha_{p_3}(t)\,)$ بگیریم، به عبارت دیگر داریم:

$$X\left(\,\alpha_p(t)\right) = \left(-\alpha_{p_2}(t)\,, \alpha_{p_1}(t)\,, 0\,\right) = \left(\alpha_{p_1}'(t)\,, \alpha_{p_2}'(t)\,, \alpha_{p_3}'(t)\,\right),$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \alpha_{p_1}'(t) = -\alpha_{p_2}(t) \\ \alpha_{p_2}'(t) = \alpha_{p_1}(t) \\ \alpha_{p_3}'(t) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \alpha_{p_1}''(t) + \alpha_{p_1}(t) = 0$$

با حل دستگاه بالا به ازای مقدار اولیه ی $\alpha_p(0) = p$، $\alpha_p(t)$ را بدست می آوریم

$$\alpha_p(t) = (\,p_1\cos t - p_2 \sin t\ \ , p_1 \sin t + p_2 \cos t\ \ , p_3\,).$$

اگر $p = (1,0,0)$ باشد، $\alpha_p(t)$ به $(\cos t\ \ , \sin t\ \ , 0\,)$ تبدیل می شود که این قسمتی از دایره ی حاصل از تقاطع S^2 با صفحه ی xy است. به همین ترتیب، باقی منحنی ها، قسمت هایی از دایره هایی است که از تقاطع صفحات موازی با صفحه ی xy، با S^2 حاصل می شوند.

در این حالت $(\,S^2\,, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}\,)$ یک سیستم دینامیکی (پیوسته) است که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ و $p \in S^2$، $\varphi^t(\,p) = \alpha_p(t)$ تعریف می شود.

تعریف ۱-۲-۸. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و $X \in \chi^r(M)$ باشد. شار موضعی X در نقطه ی $p \in U$ (U زیرمجموعه ی باز M شامل p)، نگاشت $\varphi: (-\varepsilon\,, \varepsilon) \times V \to U$ است که V همسایگی از p و زیرمجموعه ی U می باشد.

بعلاوه برای هر $q \in V$، نگاشت $\varphi_q: (-\varepsilon\,, \varepsilon) \to U$ که $\varphi_q(t) = \varphi(t, q)$ است، یک منحنی انتگرال گذرنده از q است. یعنی:

(۱) $\varphi(0,q) = q$ ،

(۲) $\forall (t,q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \qquad (\partial/\partial t)\, \varphi(t,q) = X\big(\varphi(t,q)\big)$.

گزاره ۱-۲-۹. اگر M یک منیفلد فشرده و $X \in \chi^r(M)$ باشد، آنگاه یک شار سرتاسری C^r روی M وجود دارد. به این معنی که یک نگاشت C^r، $\varphi: \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ وجود دارد که:

$$\varphi(0,p) = p, (\partial/\partial t)\, \varphi(t,p) = X\big(\varphi(t,p)\big), \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in M.$$

اثبات. به مرجع [۱۶] مراجعه شود.

گزاره ۱-۲-۱۰. برای هر منیفلد فشرده ی M و میدان برداری X روی M، یک سیستم دینامیکی تعریف می شود [۱۶].

اثبات. برای هر $t \in \mathbb{R}$، $X_t: M \to M$ را با ضابطه ی $X_t(p) = \varphi(t,p)$ تعریف می کنیم، که φ نگاشت تعریف شده در گزاره ی قبل است. و بنابه گزاره ی قبل چون φ شار است، داریم:

$$X_0 = id \quad , \qquad X_t \, o \, X_s = X_{t+s} \, .$$

نتیجه ۱-۲-۱۱. فرض کنیم M یک منیفلد فشرده هموار، $X \in \chi^r(M)$ و $\varphi: \mathbb{R} \times M \to M$ شار میدان برداری X باشد. نگاشت $X_t: M \to M$ تعریف شده در گزاره ی قبل، یک دیفئومورفیسم C^r است.

تعریف ۱-۲-۱۲. اگر X میدان برداری روی منیفلد M و $p \in M$ باشد، مدار p، مجموعه ی

$$O(p) = \{ X_t(p) \, ; \, t \in \mathbb{R} \}$$

می باشد. هنگامی که $\varphi: \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ شار میدان برداری X است، مـدار گذرنـده از p کـه بـا $\gamma(p,\varphi)$ نمایش می دهیم به صورت زیر در می آید

$$\gamma(p,\varphi) = \{\, \varphi(t,p); t \in \mathbb{R} \,\}.$$

اگر $X(p) = 0$ باشد، مدار p به تک نقطه ی p کاهش مـی یابـد. در ایـن حالـت نقطـه ی p را نقطه ی تکین X می گوییم. به عبارتی به ازای هـر $t \in \mathbb{R}$، $X_t(p) = p$ اسـت. یـا بـه ازای هـر $t \in \mathbb{R}$، $\varphi(t,p) = p$ است. یعنی $\gamma(p,\varphi) = \{p\}$.

تعریف ۱-۲-۱۳. فرض کنیم M یـک منیفلـد همـوار و $X \in \chi^r(M)$ باشـد. مـدار p را بسـته گوییم، هرگاه $T > 0$ موجود باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$، رابطـه ی $X_{t+T}(p) = X_t(p)$ برقرار باشد.

تعریف ۱-۲-۱۴. فرض کنیم M یـک منیفلـد همـوار، $X \in \chi^r(M)$ و $\varphi: \mathbb{R} \times M \to M$ شـار میـدان بـرداری X باشـد. ω- حـد و α- حـد نقطـه ی $p \in M$ را بـه صـورت زیـر تعریـف می کنیم:

$$\omega(p) = \{\, q \in M \quad ; \quad \exists \{t_n\} \quad s.t. \quad t_n \to +\infty \,, X_{t_n}(p) \to q \,\}.$$

$$\alpha(p) = \{\, q \in M \quad ; \quad \exists \{t_n\} \quad s.t. \quad t_n \to -\infty \,, X_{t_n}(p) \to q \,\}.$$

به عبارت دیگر، ω- حد و α- حد نقطه ی $p \in M$ به ترتیـب آینـده ی نقطـه ی p و گذشـته ی نقطه ی p است.