دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

زیرکلاس‌های خاص توابع تحلیلی شامل مرتبه‌ی مختلط

استاد راهنمای اول:

دکتر شهرام نجف زاده

استاد راهنمای دوم:

دکتر علی عبادیان

استاد مشاور:

دکتر بیاض دارابی

پژوهشگر:

حکیمه حاجی

مرداد ۱۳۹۰

تقدیم به

همه آنهایی که

در تحصیل دانش معلّمم بودند...

سپاس‌گزاری...

و ستایش مخصوص خداست که خود را به ما شناسانید و از نعمت بی‌نهایت شکرش بهره‌ای به ما الهام کرد و گشود بر ما برخی از درهای علم به ربوبیتش. و از لطفش ما را راهنمایی کرد به مقام رفیع اخلاص در توحید و دور گردانید از شائبه‌ی شرک و تردید در امرش.

پیشاپیش بر خود وظیفه می‌دانم از استاد راهنمای اولم جناب آقای دکتر نجف زاده که در تمام مراحل انجام کار، نظارت مستمر بر آن داشتند و راهنمایی‌های لازم را در جهت رفع نواقص آن مبذول داشتند سپاسگزاری و تقدیر نمایم.

و از استاد راهنمای دوم جناب آقای دکتر عبادیان که در آماده‌سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر بیاض دارابی که زحمت مشاوره‌ی این پایان نامه را برعهده داشتند تشکر و قدردانی می‌کنم.

و در پایان از تمام کسانی که در کلیه‌ی مراحل آماده‌سازی این رساله اینجانب را یاری کرده، علی‌الخصوص از اعضای خانواده‌ام قدردانی می‌کنم.

۱۳۹۰

نام خانوادگی: حاجی نام: حکیمه

عنوان پایان‌نامه: زیرکلاس‌های خاص توابع تحلیلی شامل مرتبه‌ی مختلط

استاد راهنمای اول: دکتر شهرام نجف زاده
استاد راهنمای دوم: دکتر علی عبادیان
استاد مشاور: دکتر بیاض دارابی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض
گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مرداد ۱۳۹۰ تعداد صفحه :۹۷

کلیدواژه‌ها: ستاره‌گون، محدب، پیروی.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا در مورد توابع تک‌ارز و خواص تحلیلی و هندسی آنها مطالعه می‌کنیم.سپس زیرکلاس‌های $S^*(\varphi)$ و $S_b^*(\varphi)$ و $M[\alpha, b](\varphi)$ از توابع تک‌ارز با مرتبه‌ی مختلط را تعریف می‌کنیم و برآورد ضرایب و نتایج پیروی را در این زیرکلاس‌ها مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

کارهای این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی منتشر شده در سال ۲۰۰۸جمع آوری و مورد تجزیه و تحلیل قرارگرفته است. [۸]

فهرست مطالب

مقدمه

فرضیه‌ی توابع تک‌ارز یک موضوع قدیمی می‌باشد که در اوایل قرن مطرح گردید، اما هنوز هم به عنوان یک رشته‌ی فعال در تحقیقات اخیر باقی مانده است. پیشرفت‌های صورت گرفته طی سال‌های اخیر به طور خاصی سریع بوده است.
توابع تحلیلی تک‌ارز با مرتبه‌ی مختلط توسط بسیاری از مؤلفان بررسی شده که از جمله می‌توان به کارهای موروگاسوندرامورتی،[۱] سریواستاوا، [۲] سوچیدرا، [۳] آدولف استفن، [۴] سیواسوبرامیان،[۵] سلواراج [۶]و کارتیکیان [۷] اشاره نمود.

این پایان نامه در سه فصل به صورت زیر تنظیم شده است:
فصل اول شامل تعاریف اولیه و پیش زمینه‌هایی از توابع تک‌ارز و خواص تحلیلی و هندسی آنهاست.
فصل دوم شامل قضایا و لم‌های کمکی است.
فصل سوم شامل تعاریفی از زیرکلاس‌هایی از توابع تحلیلی تک‌ارز با مرتبه‌ی مختلط است و همچنین در این فصل برآورد ضرایب و نتایج پیروی را در این زیرکلاس‌ها مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

[۱] G.Murugusundaramoorthy
[۲] H.M.Srivastava
[۳] K.Suchithra
[۴] B.Adolf Stephen
[۵] S.Sivasubramanian
[۶] C.Selvaraj
[۷] K.R.Karthikeyan

فصل ۱
مفاهیم اولیه

فصل اول در چهار بخش ارائه شده است. در بخش اول به تعاریف و قضایایی که در فصول بعدی به آن نیاز خواهیم داشت، می‌پردازیم. در بخش دوم توابع تک‌ارز، محدب و ستاره‌گون را معرفی کرده و برخی از خواص اساسی آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، در بخش سوم به معرفی کلاس توابع نزدیک به محدب پرداخته و در بخش آخر مفهوم پیروی دیفرانسیلی و خواص آن را بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی باز و $f:\Omega\to\mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییم f در نقطه‌ی $z_\circ\in\Omega$ مشتق‌پذیر است هرگاه،

$$\lim_{z\to z_\circ}\frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}$$

موجود باشد و آن را با $f'(z_\circ)$ نشان می‌دهیم. هرگاه f در نقطه‌ی $z_\circ\in\Omega$ مشتق‌پذیر باشد، گوییم f در Ω تحلیلی[۱] است.

[۱] Analytic

تعریف ۲.۱.۱. اگر $r > ۰$ و a یک عدد مختلط باشد،

$$D(a;r) = \{z : |z-a| < r\}$$

یک قرص مستدیر باز[۲] به مرکز a و شعاع r است. $\bar{D}(a;r)$بست $D(a;r)$ است و

$$D'(a;r) = \{z : ۰ < |z-a| < r\}$$

قرص سفته به مرکز a و شعاع r می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. منظور از ناحیه[۳] یعنی زیرمجموعه‌ی باز همبند ناتهی از صفحه‌ی مختلط.

تبصره ۴.۱.۱. از حالا به بعدحرف Ω یعنی یک مجموعه‌ی باز در صفحه.

تبصره ۵.۱.۱. قرص واحد را در صفحه‌ی مختلط به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\Delta = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. اگر یک توپولوژی τ روی X داشته باشیم به طوری که، تک‌نقطه‌ای‌ها بسته باشد و جمع و ضرب اسکالر پیوسته باشد. آنگاه،X یک فضای برداری توپولوژیکی[۴] نامیده می‌شود. و آن را به اختصار با TVS نمایش می‌دهند.

تعریف ۷.۱.۱. (نگاشت همدیس)[۵] نگاشت پیوسته‌ای که اندازه‌ی زاویه‌ی بین خم‌های مار بر یک نقطه‌ی مفروض $z_۰$ را حفظ نماید، حافظ زاویه در نقطه‌ی $z_۰$ گوییم. اگر $f(z)$ در $z_۰$ حافظ زاویه باشد و به علاوه جهت زوایای بین خم‌های مار بر نقطه‌ی $z_۰$ را نیز حفظ نماید، گو ییم $f(z)$ در نقطه‌ی $z_۰$ همدیس است.

[۲] Open circular disc
[۳] Region
[۴] Topological vector space
[۵] Conformal mapping

قضیه ۸.۱.۱. هرگاه $f:G\to\mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد، آنگاه f در هر نقطه‌ی $z_\circ\in G$ که $f'(z_\circ)\neq \circ$ باشد، همدیس است.

برهان. رجوع شود به [۱۰]. ■

مثال ۹.۱.۱. نگاشت $f(z)=z^{۲}$ در هر نقطه‌ی $z_\circ\neq\circ$ همدیس است. زیرا مشتق آن یعنی $f'(z)=۲z$ در $z_\circ$ مخالف صفر است. اما $f(z)=z^{۲}$ در نقطه‌ی $z=\circ$ که f' صفر می‌شود، همدیس نیست.

تبصره ۱۰.۱.۱. مجموعه‌ی توابع تحلیلی بر Δ را با $H(\Delta)$ نمایش داده و قرار می‌دهیم:

$$A_n=\{f\in H(\Delta):f(z)=z+\sum_{k=n+۱}^{\infty}a_kz^k\}\ .$$

همچنین،

$$\begin{aligned}A_۱=A&=\{f\in H(\Delta):f(\circ)=f'(\circ)-۱=\circ\}\\&=\{f\in H(\Delta):f(z)=z+\sum_{k=۲}^{\infty}a_kz^k\}\ ,\end{aligned}$$

نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی توابع تحلیلی نرمالیزه بر قرص واحد Δ می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. تابع تعریف شده‌ی f در Ω به وسیله‌ی سری توانی قابل نمایش است، هرگاه برای هر قرص $D(a;r)\subset\Omega$ یک سری مانند $\sum_{n=\circ}^{\infty}c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به ازای هر $z\in D(a;r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

تذکر ۱۲.۱.۱. هرگاه f به وسیله‌ی سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f\in H(\Omega)$ و f' با سری توانی در Ω قابل نمایش است. در واقع به ازای هر $z\in D(a;r)$ اگر

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$، آنگاه به ازای این zها داریم:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_n(z-a)^n \; .$$

قضیه ۱۳.۱.۱ . (قضیه‌ی مدول ماکزیمم[۶]) فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ و $\bar{D}(a;r) \subset \Omega$ در این صورت،

$$|f(a)| \leq Max \left| f(a + re^{i\theta}) \right| \qquad , \qquad -\pi < \theta \leq \pi \; .$$

تساوی در عبارت فوق برقرار است اگر و فقط اگر f در Ω ثابت باشد. در نتیجه $|f|$ در هیچ نقطه‌ای از Ω ماکزیمم خود را نمی‌گیرد مگر اینکه f تابع ثابت باشد.

برهان. به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

لم ۱۴.۱.۱ . (لم شوارتز) [۷]فرض کنیم $f \in H(\Delta)$ ، $f(0) = 0$ و به ازای هر $z \in \Delta$ ، $|f(z)| < 1$. دراین صورت،

$$|f(z)| \leq |z| \qquad , \qquad (z \in \Delta), \qquad\qquad (۲)$$

و

$$\left| f'(0) \right| \leq 1 \; . \qquad\qquad (۳)$$

هر گاه نامساوی (۲) یا (۳) به ازای یک z برقرار باشد، آنگاه $f(z) = \lambda z$ که در آن λ ثابت است و $|\lambda| = 1$. به تعبیر هندسی، فرض این است که f یک نگاشت تحلیلی از Δ به توی Δ است که مبدأ را ثابت نگه می‌دارد. بخشی از این نتیجه این است که f یک دوران است یا هر نقطه‌ی $z \in \Delta - \{0\}$ را از هرچه که بود، به مبدأ نزدیک‌تر می‌سازد.

---

[۶] Maximum modulus Theorem

[۷] Schwarz's Lemma

برهان. به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

تذکر ۱.۱.۱۵ . تابعی که در لم شوارتز صدق کند، به تابع شوارتز [۸]معروف است.

[۸] Schwarz Teorem

۲.۱ توابع تک‌ارز، ستاره‌گون و محدب

تعریف ۱.۲.۱ . تابع $f(z)$ را روی Δ تک‌ارز[۹] گوییم هرگاه برای هر z_1 و z_2 در Δ که $z_2 \neq z_1$ داشته باشیم، $f(z_1) \neq f(z_2)$.

مثال ۲.۲.۱ . تابع $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ را در نظر می‌گیریم این تابع در Δ تحلیلی و تک‌ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه‌ی توابع تحلیلی دارد و به تابع کوبه[۱۰] معروف است.

تعریف ۳.۲.۱. تابع $f(z)$را در نقطه‌ی $z_0 \in \Omega$ موضعاً تک‌ارز [۱۱] گو ییم، هرگاه در یک همسایگی z_0 تک‌ارز باشد.

تذکر ۴.۲.۱ . یک تابع تحلیلی روی یک دامنه ممکن است موضعاً تک‌ارز باشد، اما تک‌ارز نباشد.

مثال ۵.۲.۱ . تابع $f(z) = z^2$ در دامنه‌ی $\Delta = \{z : 1 < |z| < 2 \ , \ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ موضعاً تک‌ارز است، اما تک‌ارز نیست.

تعریف ۶.۲.۱. یک نامساوی دقیق[۱۲]است، اگر به ازای حداقل یک تابع آن نامساوی تبدیل به مساوی شود.

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه‌ی توابع تحلیلی و تک‌ارز f که در دیسک

$\Delta = \{z : z \in \mathbb{C} \ , |z| < 1\}$ تعریف شده و در شرایط نرمالیزه ی $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق

[۹] Univalent
[۱۰] Koebe function
[۱۱] Locally Univalent
[۱۲] Sharp

می کنند را با S نمایش می‌دهیم.

می‌توان دید که هر $f\in S$ دارای بسط تیلور به فرم زیر است:

$$f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n \quad , \quad |z|<۱ .$$

تذکر ۸.۲.۱. حال به معرفی تبدیلات اولیه می‌پردازیم که تحت آن تبدیلات، خانواده‌ی S حفظ می شوند:

الف) تزویج: [۱۳] اگر $f\in S$ و... $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a_۲}z^۲+\overline{a_۳}z^۳+\ldots$، آنگاه $g\in S$.

ب) دوران: [۱۴] اگر $f\in S$ و $g(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$، آنگاه $g\in S$.

ج) انبساط: [۱۵] اگر $f\in S$ و $g(z)=r^{-۱}f(rz)$ که $۰<r<۱$، آنگاه $g\in S$.

د) خودریختی دیسکی: [۱۶] اگر $f\in S$ و

$$g(z)=\frac{f(\frac{z+\alpha}{۱+\overline{\alpha}z})-f(\alpha)}{(۱-|\alpha|^۲)f'(\alpha)} \quad , \qquad |\alpha|<۱$$

آنگاه $g\in S$.

ه) تبدیل ریشه ی دوم: [۱۷] اگر $f\in S$ و $g(z)=\sqrt{f(z^۲)}$، آنگاه $g\in S$.

و) تبدیل مقدار حذف شده: [۱۸] اگر $f\in S$ و $f(z)\neq\gamma$، آنگاه $g(z)=\frac{\gamma f(z)}{\gamma-f(z)}$ به S تعلق دارد.

تعریف ۹.۲.۱. اگر $f\in S$،در این صورت تبدیل ریشه‌ی دوم f به صورت $h(z)=\sqrt{f(z^۲)}$ تعریف می‌شود و برابر است با:

$$h(z)=\sqrt{f(z^۲)}=z+c_۳z^۳+c_۵z^۵+\ldots$$

---

[۱۳] Conjugation
[۱۴] Rotation
[۱۵] Dilation
[۱۶] Disk Automorphism
[۱۷] Square-root transformation
[۱۸] Omitted-value transformation

پس تبدیل ریشه‌ی دوم هر تابع f یک تابع تک‌ارز فرد است و برعکس.

تبصره ۱۰.۲.۱ . مجموعه‌ی توابع تک‌ارز فرد را با نماد $S^{(2)}$ نمایش می‌دهیم و همچنین تبدیل ریشه‌ی mام توابع $f \in S$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$h(z) = \{f(z^m)\}^{\frac{1}{m}} = z + c_{m+1}z^{m+1} + c_{2m+1}z^{2m+1} + \dots .$$

قضیه ۱۱.۲.۱ . (حدس بایبرباخ)[19] اگر $f \in S$ آنگاه ، $|a_2| \leq 2$.
تساوی برقرار است اگر و فقط اگر f دورانی از تابع کوبه باشد.

برهان. به مرجع [۱۰] رجوع شود. ■

قضیه ۱۲.۲.۱ . (قضیه‌ی $\frac{1}{4}$- کوبه [20]) تصویر هر تابع از کلاس S شامل دیسک $\left\{\omega : |\omega| < \frac{1}{4}\right\}$است.

برهان. فرض کنیم $f \in S$، یک مقدار $\omega \in \mathbb{C}$ را درنظرگرفته و تابع $g\left(z\right) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)}$ را تعریف می‌کنیم. با جایگذاری f داریم،

$$f \in S \Longrightarrow f\left(z\right) = z + a_2 z^2 + \dots\ .$$

$$g\left(z\right) = \frac{\omega z + a_2^2 + a_3\omega z^3 + \dots}{\omega - z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \dots} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right) z^2 + \dots\ .$$

با توجه به قضیه‌ی بایبرباخ، $\left|a_2 + \frac{1}{\omega}\right| \leq 2$ پس،

$$\left|\frac{1}{\omega}\right| - |a_2| \leq \left|\frac{1}{\omega} + a_2\right| .$$

لذا،

$$\left|\frac{1}{\omega}\right| - |a_2| \leq \left|\frac{1}{\omega} + a_2\right| \leq 2 .$$

[19] Bieberbach's Theorem
[20] Koebe one-quarter Theorem

در نتیجه،

$$\left|\frac{۱}{\omega}\right| \leq |a_۲| + ۲ \Longrightarrow \left|\frac{۱}{\omega}\right| \leq ۴ \, .$$

$$\Longrightarrow |\omega| \geq \frac{۱}{۴}$$

به عبارت‌دیگر هر مقدار حذف شده‌ی ω خارج دیسک $|\omega| \leq \frac{۱}{۴}$ قرار دارند. ■

قضیه ۱۳.۲.۱ . به ازای هر $f \in S$،

$$\left|\frac{zf''}{f'} - \frac{۲r^۲}{۱ - r^۲}\right| \leq \frac{۴r}{۱ - r^۲} \, .$$

برهان. با استفاده از تبدیل دیسک اتومورفیسم و $f \in S$ و $\mu \in \Delta$ ، تابع F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(z) = \frac{f\left(\frac{z+\mu}{۱+\bar{\mu}z}\right) - f(\mu)}{\left(۱ - |\mu|^۲\right) f'(\mu)} \in S$$

پس $F(z) = z + A_۲ z^۲ + A_۳ z^۳ + \ldots$. با توجه به این که،

$$F(z) = z + \frac{۱}{۲}\left\{\left(۱ - |\mu|^۲\right)\frac{f''(\mu)}{f'(\mu)} - ۲\mu\right\} z^۲ + \cdots \in S \, .$$

بنا به قضیه‌ی بایبرباخ،

$$\left|\frac{۱}{۲}\left\{\left(۱ - |\mu|^۲\right)\frac{f''(\mu)}{f'(\mu)} - ۲\mu\right\}\right| \leq ۲.$$

لذا،

$$\left|\left\{\left(۱ - |\mu|^۲\right)\frac{f''(\mu)}{f'(\mu)} - ۲\mu\right\}\right| \leq ۴ \, .$$

با فرض اینکه $\mu > ۰$ ، طرفین را μ ضرب می‌کنیم.

$$\left|\left\{\mu\left(۱ - |\mu|^۲\right)\frac{f''(\mu)}{f'(\mu)} - ۲\mu^۲\right\}\right| \leq ۴\mu \, .$$

حال طرفین را بر $\left(1-|\mu|^2\right)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\left|\frac{\mu f''(\mu)}{f'(\mu)}-\frac{2\mu^2}{1-|\mu|^2}\right|\leq\frac{4\mu}{1-|\mu|^2}\ .$$

چون، $|\mu|=r<1 \quad , \quad \mu=z \quad , \quad |z|=r<1$ پس،

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2z^2}{1-|z|^2}\right|\leq\frac{4z}{1-|z|^2}\ .$$

آنگاه،

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}\ .$$

■

قضیه ۱۴.۲.۱ . قضیه‌ی دگر شکلی[21]: برای هر $f\in S$ داریم،

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq\left|f'(z)\right|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3}\quad , \quad (z\in\Delta)\ .$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دوران مناسبی از تابع کوبه باشد.

برهان. بنا به قضیه‌ی قبل،

$$\left|\frac{zf''}{f'}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}\ .$$

و چون به ازای هر عدد مختلط z،

$$Re z\leq|z|,$$

پس،

$$\frac{-4r}{1-r^2}\leq Re\left\{\frac{zf''}{f'}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right\}\leq\frac{4r}{1-r^2}.$$

و داریم،

$$\frac{2r^2}{1-r^2}-\frac{4r}{1-r^2}\leq Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\leq\frac{2r^2}{1-r^2}+\frac{4r}{1-r^2}.$$

---

[21] Distortion Teorem

پس،

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲}\leq Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\leq\frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}.$$

حال اگر تابع $log\left(f'(z)\right)$ را در نظر بگیریم، چون تابع لگاریتم چند شاخه دارد، برای این تابع شاخه‌ای را در نظر می‌گیریم که در مبدأ صفر شود.

$$Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=r\frac{\partial}{\partial r}Re\left[log\left(f'(z)\right)\right],\qquad z=re^{i\theta}.$$

حال با جایگذاری داریم،

$$\frac{۲r-۴}{۱-r^۲}\leq\frac{\partial}{\partial r}Re\left[log\left(f'(z)\right)\right]\leq\frac{۲r+۴}{۱-r^۲}.$$

از طرفین نسبت به r انتگرال می‌گیریم.

$$\int_۰^R\frac{۲r-۴}{۱-r^۲}dr\leq Re\left[log\left(f'(z)\right)\right]\leq\int_۰^R\frac{۲r+۴}{۱-r^۲}dr.$$

با محاسبه‌ی انتگرال بالا،

$$\begin{aligned}\int_۰^R\frac{۲r-۴}{۱-r^۲}dr&=\int_۰^R\left(\frac{-۱}{۱-r}+\frac{-۳}{۱+r}\right)dr\\&=Ln(۱-R)-۳Ln(۱+R)\\&=Ln\frac{(۱-R)}{(۱+R)^۳}\\&=Ln\frac{(۱+R)}{(۱-R)^۳}\end{aligned}$$

به طور مشابه طرف دیگر انتگرال نیز به راحتی به دست می‌آید. در نتیجه،

$$Log\frac{۱-R}{(۱+R)^۳}\leq Re\left[log\left(f'(z)\right)\right]\leq Log\frac{۱+R}{(۱-R)^۳}.$$

با تأثیر تابع نمایی و با فرض $R\to r$ داریم،

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳}\leq\left|f'(z)\right|\leq\frac{۱+r}{(۱-r)^۳},$$

و حکم اثبات می‌شود. ■

قضیه ۱.۲.۱۵ . (قضیه‌ی رشد[۲۲])برای هر $f \in S$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دورانی از تابع کوبه باشد.

به مرجع [۴]رجوع شود. ■

تعریف ۱.۲.۱۶ . تابع $p-$ ارز، تابعی است که هر مقداری را p بار می‌پذیرد. اگر تابعی $p-$ارز باشد و $f(a)=b$، آنگاه $f(z)-b$ یک صفر از مرتبه‌ی p در $z=a$ دارد.

مجموعه‌ی توابع $p-$ارز بر قرص واحد Δ را با Σ_p نمایش می‌دهیم. به‌عبارت‌دیگر،

$$\Sigma_p = \{f \in H(\Delta) : f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k\} .$$

تعریف ۱.۲.۱۷ . دامنه‌ی $\Omega \subset \mathbb{C}$ را نسبت به z_0 ستاره‌گون [۲۳] گوییم هرگاه هر پاره‌خطی که نقاط Ω را به z_0 وصل می‌کند، دقیقاً در داخل Ω قرار گیرد.

تعریف ۱.۲.۱۸ . تابع ستاره‌گون، نگاشت همدیسی است که دیسک واحد را به مجموعه‌ی ستاره‌گونی نسبت به مبدأ متناظر می‌کند. در واقع تابع تک‌ارز $f \in H(\Delta)$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون می نامیم، هرگاه $f(\Delta)$ نسبت به مبدأ ستاره‌گون باشد.

مجموعه‌ی تمام توابع ستاره‌گون نسبت به مبدأ در A_1 را با S^* نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۲.۱۹ . تابع کوبه $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ یک تابع ستاره‌گون است. برای اثبات، ملاحظه می‌شود که تصویر $|z|<1$ تحت تابع $k(z)$ ، صفحه‌ی W است که در امتداد پرتو $-\frac{1}{4}$ تا $-\infty$بریده

[۲۲] Growth Teorem

[۲۳] Starlike

شده است.

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + ...$$
$$= \frac{1}{4}(\frac{1+z}{1-z})^2 - \frac{1}{4}.$$

بنابراین تصویر قرص واحد تحت این نگاشت ناحیه‌ای ستاره‌گون است .

تذکر ۲۰.۲.۱. زیرکلاس P را که کلاس توابع تحلیلی است به صورت

$$P = \{\phi \in H(\Delta) : Re\phi > 0, \phi(0) = 1\}$$

در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲۱.۲.۱. (منحنی ژردن)[24] منحنی ژردن، منحنی صفحه‌ای است که به طور توپولوژیکی با یک تصویر هومومورفیسم از دایره‌ی واحد معادل است، یعنی، ساده و بسته است. (به عبارت دیگر، منحنی است که نمایش پارامتری با دو مشتق پیوسته داشته باشد. یعنی، مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم آن پیوسته باشد.)

تعریف ۲۲.۲.۱. (اصل آرگومان) [25] f را تابعی تحلیلی در بستار ناحیه‌ی کراندار Δ می‌گیریم که توسط خم ژردن C احاطه شده است و فرض کنیم $f(z) \neq 0$ (در C). پس تعداد صفرهای f در Δ با احتساب بستاییشان برابر است با $\frac{1}{2\pi}$ برابر تغییرات اندازه‌ی آرگومان $f(z)$ در C درجهت مثبت.

به طور دقیق‌تر، هرگاه $\Delta_c\, argf$ نشان دهنده‌ی تغییرات آرگومان f باشد داریم:

$$i\Delta_c\, argf = 2\pi i\{m_1 + m_2 + ...\} = \Delta_c\, Logf = \int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

[24] Jordan curve
[25] Argument Principle

که در آن $i = 1, 2, \ldots$ و m_i نشان دهنده‌ی بستایی صفرهای f در Δ $z_i \in \Delta$ می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۲۳. فرض کنیم f تابعی تحلیلی در Δ باشد و $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. در این‌صورت $f \in S^*$ اگر و تنها اگر،

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P \, .$$

برهان. به مرجع [۴] رجوع شود. ■

تعریف ۱.۲.۲۴. دامنه‌ی $D \subseteq \mathbb{C}$ را محدب [26] گوییم، هرگاه D نسبت به هر نقطه‌اش ستاره‌گون باشد. به‌عبارت‌دیگر، پاره‌خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند، تماماً داخل D قرار گیرد.

تعریف ۱.۲.۲۵. تابع محدب، نگاشت همدیسی است که دیسک واحد را به یک مجموعه‌ی محدب می‌نگارد. فرض کنیم $f \in H(\Delta)$ تک‌ارز باشد، گوییم f بر Δ محدب است هرگاه $f(\Delta)$ محدب باشد.

مجموعه‌ی تمام توابع محدب بر Δ را با C نمایش می‌دهیم. به‌وضوح،

$$C \subset S^* \subset S \subset A \, .$$

مثال ۱.۲.۲۶. تابع $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$ بر Δ یک تابع محدب است. و تابع کوبه

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n \ , \qquad\qquad (z \in \Delta) \ ,$$

قرص $|z| < 1$ را بر مجموعه‌ی ستاره‌گونی می‌نگارد که محدب نیست. (تصویر شامل $-\frac{1}{4} - i$ و $-\frac{1}{4} + i$ هست ولی شامل نقطه‌ی $-\frac{1}{4}$ نیست.)

---
[26] Convex