

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

٦٠٨٢٤٢



کتابخانه مرکزی

دانشکده مهندسی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی مکانیک (طراحی کاربردی)

دینامیک و کنترل سیستم‌های فوق مقید چندمدلی

(دینامیک و کنترل سیستم جابجایی جسم توسط چند روبات متحرک)

توسط

حسین طاهری

اساتید راهنما:

دکتر مجتبی محزون

دکتر محمد اقتصاد

۱۳۸۷ / ۹ / ۲۳

شهریور ماه ۱۳۸۷

۱۰۸۲۴۲

به نام خدا

دینامیک و کنترل سیستم‌های فوق‌مقید چندمدلی
(دینامیک و کنترل سیستم جابجایی جسم توسط چند روبات متحرک)

به وسیله‌ی:

حسین طاهری

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت تحصیلی لازم برای اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

مهندسی مکانیک (طراحی کاربردی)

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی

دکتر مجتبی محزون، استادیار بخش مهندسی مکانیک (رئیس کمیته)

دکتر محمد اقتصاد، دانشیار بخش مهندسی مکانیک (رئیس کمیته)

دکتر سید احمد فاضل‌زاده، دانشیار بخش مهندسی مکانیک

دکتر مهرداد فرید، استادیار بخش مهندسی مکانیک

شهریورماه ۱۳۸۷

۷۳.۲
.....
.....
.....
.....
.....
.....

تقديم به

پدر و مادرم

سپاسگزاری

نگارنده بر خود لازم می‌داند از تمامی عزیزانی که به نوعی در تکمیل این پایان‌نامه به وی یاری رسانده‌اند تشکر نماید. در این بین همکاری و همدلی اساتید محترم راهنما، آقایان دکتر محزون و دکتر اقتصاد نقش به‌سزایی داشته است.

چکیده

دینامیک و کنترل سیستم‌های فوق‌مقید چندمدلی

(دینامیک و کنترل سیستم جابجایی جسم توسط چند روبات متحرک)

به وسیله‌ی:

حسین طاهری

قیود نقش تعیین کننده‌ای در حرکت سیستم‌های مکانیکی دارند. در یک طبقه‌بندی، قیودی که به زمان بستگی ندارند را می‌توان به دو دسته‌ی قیود هولونومیک و غیر هولونومیک تقسیم کرد. سیستمی که تعداد قیود آن از حدی بیشتر شود که حرکت تنها با نقض برخی قیود ممکن باشد، سیستم فوق‌مقید نام دارد. با توجه به نقش اساسی اصطکاک در رفتار این سیستم‌ها و ترکیبات مختلف ارض/نقض قیود، سیستم‌های فوق‌مقید را نمی‌توان با یک مدل یکتا بیان کرد و باید از چند مدل، که در هر لحظه و بنا به شرایط یکی از آنها فعال است، استفاده نمود. در ابتدای این پایان‌نامه، مطالبی کلی در مورد مدل‌سازی و تحلیل این سیستم‌ها بیان می‌شود. روش اتلاف توان به عنوان روشی ساده و قابل اتکا برای مدل کردن این سیستم‌ها معرفی و بررسی می‌شود. همچنین مباحثی پیرامون پایداری و کنترل‌پذیری این سیستم‌ها بیان می‌شود. به عنوان نوآوری، یک سیستم فوق‌مقید جدید ارائه شده است. این سیستم متشکل از چند روبات متحرک چرخ‌دار است که سعی دارند جسمی را بدون اینکه آن را بگیرند حمل کنند. به این شکل که جسم روی روبات‌ها قرار می‌گیرد و با حرکت آنها و به واسطه‌ی نیروی اصطکاک حرکت می‌کند. نشان داده می‌شود که معادلات حرکت این سیستم که با استفاده از روش اتلاف توان به دست می‌آیند صریح نیستند و به فرم دربرگیرنده‌های دیفرانسیلی بیان می‌شوند. برای اطمینان از صحت نتایج، آنها را با نتایج به دست آمده از روش نیوتون در یک حالت ساده سازی شده مقایسه کرده و اثر پارامترهای مختلف را بررسی شده است. سپس به تحلیل کنترل سیستم پرداخته شده و نشان داده شده است که چنین سیستمی کنترل‌پذیر محلی نیست. در نهایت با استفاده از روش فازی و با اتخاذ یک استراتژی نامتمرکز و سلسله مراتبی، یک سیستم کنترلی برای سیستم طراحی شده و نتایج مناسب آن را مشاهده می‌گردد.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
۱- مقدمه	۲
۱-۱- کلیات	۲
۲-۱- گفتارها	۴
۳-۱- مقدمات ریاضی	۵
۱-۳-۱- دربرگیرنده‌های دیفرانسیلی	۵
۲-۳-۱- پایداری به ظن لیپاتوف	۶
۳-۳-۱- قیود دیفرانسیلی	۷
۱-۳-۳-۱- انتگرال‌پذیری قیود	۷
۲-۳-۱- میدان‌های برداری	۱۰
۳-۳-۳-۱- گروه‌ی لی	۱۱
۴-۳-۳-۱- قضیه‌ی فروبنیوس و کنترل‌پذیری سیستم‌های مقید	۱۳
۲- مروری بر تحقیقات گذشته	۱۷
۱-۲- سیستم‌های فوق‌مقید و روش اتلاف توان	۱۷
۲-۲- آنالیز غیرهموار و دربرگیرنده‌های دیفرانسیلی	۱۸
۳-۲- سیستم‌های غیرهولونومیک	۱۸
۴-۲- جابجاکننده‌های گسترده و خودروی فوق‌مقید	۱۹
۵-۲- کنترل سیستم‌های چندمدلی	۲۰
۶-۲- جابجایی جسم توسط چند روبات متحرک چرخ‌دار همکار	۲۱
۳- سیستم‌های فوق‌مقید و روش اتلاف توان	۲۴
۱-۳- سیستم‌های مقید	۲۴
۲-۳- کمینه‌شدن انرژی در حرکت شبه‌ایستا	۲۶
۳-۳- ارتباط اصل اتلاف توان با سایر روش‌ها	۲۷
۴-۳- روش اتلاف توان	۲۹
۵-۳- مثال‌هایی از سیستم‌های فوق‌مقید چندمدلی	۳۲
۱-۵-۳- دوچرخه	۳۲
۲-۵-۳- خودروی فوق‌مقید	۳۳

۳۷	۳-۵-۳- جایجاکننده‌های گسترده
۴۳	۴- مباحثی در تحلیل پایداری و کنترل سیستم‌های فوق‌مقید چند مدلی
۴۳	۴-۱- پایداری سیستم‌های چند مدلی
۴۶	۴-۲- کروش‌های لی تعمیم یافته
۵۲	۵- تحلیل حرکت شبه‌ایستای جایجایی یک جسم به‌وسیله‌ی چند روبات متحرک
۵۲	۵-۱- مقدمات
۵۴	۵-۲- مدل‌سازی نقاط تماس
۵۵	۵-۳- معادلات سینماتیکی حاصل از روش اتلاف توان
۶۲	۵-۴- فرمول تقریبی
۶۴	۵-۵- شبیه‌سازی
۶۷	۵-۶- مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش اتلاف توان با مدل‌سازی نیوتونی
۶۸	۵-۶-۱- مدل‌سازی نیوتونی
۷۲	۵-۶-۲- شبیه‌سازی و مقایسه‌ی نتایج
۸۱	۶- تحلیل و طراحی کنترلی سیستم جایجایی یک جسم توسط چند روبات متحرک
۸۱	۶-۱- تحلیل کنترل‌پذیری محلی سیستم
۸۴	۶-۲- طراحی کنترلی
۸۴	۶-۲-۱- طراحی بر اساس قضیه‌ی لیاپانوف
۸۵	۶-۲-۲- خطی‌سازی پیش‌خورد
۹۰	۶-۲-۳- کنترل فازی
۹۰	۶-۲-۳-۱- منطق فازی
۹۲	۶-۲-۳-۲- توابع عضویت
۹۳	۶-۲-۳-۳- عمل‌گرهای منطقی
۹۵	۶-۲-۳-۴- قوانین اگر-آنگاه
۹۸	۶-۲-۳-۵- طراحی کنترلگر فازی برای سیستم
۱۰۲	۶-۲-۳-۱-۵- قوانین مربوط به لایه‌ی اول از سطح اول
۱۰۶	۶-۲-۳-۲-۵- قوانین مربوط به لایه‌ی دوم از سطح اول
۱۰۷	۶-۲-۳-۳-۵- قوانین مربوط به سطح دوم
۱۱۱	۶-۲-۳-۶- بررسی نتایج
	۷- نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات
۱۱۹	۷-۱- نتیجه‌گیری
۱۲۰	۷-۲- پیشنهادات
۱۲۱	ضمیمه (الف): الگوریتم شبیه‌سازی بخش ۵-۳
۱۲۲	ضمیمه (ب): الگوریتم شبیه‌سازی با استفاده از فرمول تقریبی بخش ۵-۴
۱۲۳	ضمیمه (پ): $f(q)$
۱۲۴	منابع و مراجع

فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان و شماره
۸۲	جدول ۱-۶: میدان‌های برداری رابطه -۵-۲۵
۸۳	جدول ۱-۶: ادامه
۹۳	جدول ۲-۶: عمل‌گرهای منطقی کلاسیک
۱۱۲	جدول ۳-۶: مشخصات سیستم فازی طراحی شده

فهرست شکل‌ها

صفحه		عنوان
۳	شکل ۱-۱	چند سیستم فوق‌مقید
۱۲	شکل ۲-۱	حرکت در راستای کروش‌ی لی
۲۲	شکل ۱-۲	دو روبات همکار
۲۴	شکل ۱-۳	میله‌ی لولا شده که دارای یک قید هولونومیک است
۲۵	شکل ۲-۳	مختصات تعمیم‌یافته‌ی یک چرخ ساده
۲۷	شکل ۳-۳	نمودارهای اصطکاک کولمب الف) بر حسب نیروی اعمالی ب) بر حسب سرعت لغزش
۳۱	شکل ۴-۳	ارابه و جسم روی آن
۳۲	شکل ۵-۳	دو چرخه به عنوان سیستمی که می‌تواند فوق‌مقید در نظر گرفته شود
۳۳	شکل ۶-۳	تابع اتلاف توان
۳۴	شکل ۷-۳	خودروی سینماتیکی
۳۶	شکل ۸-۳	خودروی فوق‌مقید
۳۷	شکل ۹-۳	یک جایجا کننده‌ی گسترده که عملگرهای آن به شکل دوایری نمایش داده شده‌اند
۳۸	شکل ۱۰-۳	میدان نیروی قابل برنامه ریزی
۳۸	شکل ۱۱-۳	چهار عملگر مرکزی
۴۰	شکل ۱۲-۳	مدل اصطکاک چرخ‌ها
۴۵	شکل ۱-۴	مسیرهای حرکت مرکز جرم به ازای شرایط اولیه‌ی مختلف
۴۵	شکل ۲-۴	تغییرات زاویه‌ی جسم برای نقاط شروع حرکت اولیه‌ی متفاوت
۴۸	شکل ۳-۴	شرایط مختلف کنترل‌پذیری به صورت شماتیک
۵۳	شکل ۱-۵	جسمی که روی سه روبات متحرک قرار داده شده است
۵۵	شکل ۲-۵	توزیع ضریب اصطکاک
۵۶	شکل ۳-۵	نمونه‌ی ساده شده‌ی روبات‌های متحرک به کار رفته
۶۰	شکل ۴-۵	نمایش هیبریدی سیستم
۶۱	شکل ۵-۵	شرایط سقوط جسم
۶۳	شکل ۶-۵	مواردی که به خطای قابل قبول و خطای غیر قابل قبول روش تقریبی منجر می‌شود

- شکل-۶-۱۸. تابع عضویت $contact_{ij}$ ۱۰۶
- شکل-۶-۱۹. تغییر جهت مناسب برای روبات‌ها جهت گریز از خطر برخورد ۱۰۷
- شکل-۶-۲۰. تابع عضویت $theta_{ij}$ ۱۰۷
- شکل-۶-۲۱. تابع عضویت فاصله‌ی مرکز جرم از مبدأ ۱۰۸
- شکل-۶-۲۲. اصلاح راستای روبات‌ها به منظور نزدیک شدن به مبدأ ۱۰۹
- شکل-۶-۲۳. توابع عضویت زاویه‌ی جسم ۱۰۹
- شکل-۶-۲۴. راستاهای مطلوب برای چرخاندن پادساعت‌گرد جسم ۱۱۰
- شکل-۶-۲۵. توابع عضویت مربوط به β ۱۱۱
- شکل-۶-۲۷. مدل ایجاد شده در Simulink برای کنترل نامتمرکز سیستم ۱۱۲
- شکل-۶-۲۸. تراژکتوری مرکز جرم جسم و روبات‌ها برای بازه‌های مختلف سرعت خطی و زاویه‌ای روبات‌ها ۱۱۳
- شکل-۶-۲۹. زاویه‌ی جسم بر حسب زمان برای انتخاب‌های مختلف بازه‌ی سرعت خطی و زاویه‌ای روبات‌ها. ۱۱۴
- شکل-۶-۳۰. تراژکتوری مرکز جرم جسم و روبات‌ها با ازای مقادیر مختلف فاصله‌ی آستانه‌ای از شرایط نهایی ۱۱۵
- شکل-۶-۳۱. فاصله‌ی مرکز جرم جسم از شرایط نهایی بر حسب زمان برای مقادیر مختلف فاصله‌ی آستانه‌ای ۱۱۵
- شکل-۶-۳۲. عکس‌های متوالی از حرکت سیستم (از آبی به قرمز) ۱۱۶
- شکل-۶-۳۳. الف) مسیر حرکت جسم و روبات‌ها برای شکل-۶-۳۲. ب) زاویه‌ی جسم بر حسب زمان ۱۱۷

فصل اول

مقدمه

۱- مقدمه

۱-۱- کلیات

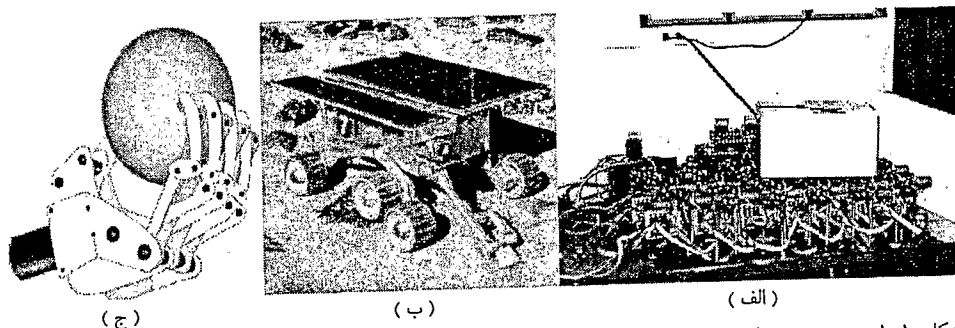
در این پایان‌نامه سیستم‌های مکانیکی فوق مقید چند مدلی مورد بررسی قرار خواهند گرفت. منظور از سیستم‌های چند مدلی سیستم‌هایی است که در هر لحظه از زمان، یک مدل از مجموعه‌ای محدود از مدل‌ها رفتار سیستم را مشخص می‌کند. اگر بخواهیم موشکافانه به سیستم‌های فیزیکی بنگریم، باید گفت رفتار اکثر سیستم‌های طبیعی را نمی‌توان تنها با یک مدل بیان کرد. اما عموماً وضع به گونه‌ای است که می‌توان با اعمال برخی محدودیت‌های قابل اغماض، به یک مدل کلی قابل اعتماد دست یافت. برای مثال ضریب کشسانی یک فنر مارپیچ معمولی در حالت واقعی یک مقدار ثابت نیست. این ضریب در تغییر طول‌های متفاوت مقادیری با اندکی تفاوت خواهد داشت. علاوه بر این اگر جرم فنر زیاد باشد و یا حرکات با بسامدهای بالا رخ دهد، نیروی لختی ناشی از جرم فنر بر نیروی دو سر فنر اثر خواهد گذاشت طوری که ممکن است دقت مدل‌سازی خطی با ضریب ثابت را تحت‌الشعاع قرار دهد. در نگاه اول ممکن است به نظر برسد برای رسیدن به دقت بیشتر مجبوریم مدل را به چند زیرمدل خطی تقسیم کنیم که ضریب کشسانی در هر کدام تابع بازه‌ی تغییر طول و/یا بازه‌ی بسامد اعمالی باشد. بدیهی است چنین تمهیدی دقت مدل‌سازی را بالا خواهد برد اما از طرفی به پیچیدگی زیادی منجر می‌شود و از طرف دیگر عموماً تأثیر جزئی در ارتقای دقت خواهد داشت. از این روست که در اکثر کاربردها عنصر فنر به صورت تک‌مدلی فرض می‌شود.

چنین مفروضاتی در بسیاری موارد، از جمله زمانی که اصطکاک خشک در مدل دینامیکی سیستم در نظر گرفته می‌شود، کارایی خود را از دست می‌دهند زیرا اصطکاک خشک یک ترم غیرخطی به اصطلاح شدید را به همراه دارد. غیرخطی شدید^۱ به ترم‌هایی اطلاق می‌شود که به نوعی موجبات ظهور ناپیوستگی در معادلات را فراهم می‌آورند. لازم به ذکر نیست که اصطکاک خشک به کمک تابع علامت^۲ مدل می‌شود. به عنوان یک گونه‌ی مهم در بین سیستم‌های مکانیکی، که به واسطه‌ی نقش اساسی اصطکاک به خوبی در این دسته می‌گنجد

¹ Hard nonlinearity

² Sign function

می‌توان به سیستم‌های فوق‌مقید^۱ اشاره کرد. این‌ها سیستم‌هایی هستند که تعداد قیود ناشی از اصطکاک در آن‌ها از تعداد مختصات تعمیم‌یافته‌ی سیستم بیشتر است. طبیعی است که در صورت بروز چنین وضعیتی تصور کنیم که سیستم قفل خواهد شد و نمی‌تواند حرکت کند ولی در عمل تعدادی از قیود لغزیده و سیستم حرکت خواهد کرد. لزوم مدل‌سازی به کمک چند مدل از همین نکته سرچشمه می‌گیرد. به این صورت که ترکیبات مختلف لغزش/عدم لغزش قیود به مدل‌های مختلفی ختم می‌شوند و نمی‌توان تحول سیستم را به کمک یک مدل بیان کرد. سه مثال مهم این سیستم‌ها عبارتند از: جابجا کننده‌های گسترده^۲، روبات‌های متحرک کاوشگر در مأموریت ره‌یاب مریخ^۳ و دست‌های روباتی که هر یک از آن‌ها منشأ سوالات و تحقیقات علمی گسترده‌ای طی سال‌های اخیر بوده‌اند (شکل-۱-۱).



شکل-۱-۱. چند سیستم فوق‌مقید. الف) یک جابجا کننده‌ی گسترده‌ی Carnegie Mellon [Lunz et al., 2000]. ب) Rocky7، روبات کاوشگر مریخ [Murphey, 2002]. ج) یک دست روباتی با قابلیت گرفتن اشیاء [murphey, 2006]

برای درک بهتر یک دست روباتی را در نظر بگیرید که از چند انگشت تشکیل شده است. هر انگشت را می‌توان به صورت یک زنجیره‌ی سینماتیکی باز یا یک بازوی جابجاکننده با تعداد محدودی میله و قید هولونومیکی فرض کرد. بنابراین هر انگشت درجات آزادی محدودی دارد و در وضعیت‌های مختلف تماس با یک جسم، نمی‌تواند در هر راستای دلخواهی حرکت کند. از طرفی برای بالا بردن پایداری دینامیکی جسم و اطمینان از عدم سقوط آن به بیش از سه انگشت نیاز داریم. این مسائل موجب بروز حالاتی می‌شوند که در بیشتر لحظات همه‌ی انگشت‌ها نتوانند با هم در وضعیت عدم لغزش با جسم قرار گیرند و برای انجام برخی حرکات تعدادی از آن‌ها مجبور به لغزش خواهند شد. مثال‌های دیگر سیستم‌های فوق‌مقید و تحلیل آن‌ها به طور مفصل در فصول آتی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

¹ Overconstrained

² Distributed manipulation systems

³ Sojourner vehicle of the Mars Pathfinder mission

معادلات حرکت سیستم‌های فوق مقید را می‌توان به فرم کلی $MMDA^1$ که حالت خاصی از سیستم‌های هیبریدی است نمایش داد. این سیستم‌ها در واقع سیستم‌های هیبریدی هستند که حالات پیوسته در هر حالت گسسته‌ی آن به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل افاین بدون دریافت ظاهر می‌شوند. در این راه دو راهکار روش اتلاف توان² برای بررسی دینامیک و آنالیز غیرهموار برای بررسی کنترل‌پذیری ابزارهای اصلی تئوریک ما خواهند بود.

روش اتلاف توان که بیشتر سویه‌ای شهودی دارد، برای به دست آوردن معادلات حرکت سیستم‌های فوق مقید بسیار مناسب است. مزیت این روش بر سایر روش‌ها سادگی اعمال آن می‌باشد که اهمیت خود را در مدل کردن سیستم‌های فوق مقید به خوبی نمایان می‌کند. از طرف دیگر چون استفاده از این روش تنها در صورتی که حرکت شبه‌ایستا باشد قابل قبول است، معادلات حرکت برای حالات پرشتاب را منعکس نمی‌کند. از آنجا که در عمل چنین حرکاتی به ندرت مورد نیاز است، روش اتلاف توان به یک سری معادلات ساده و راحت برای بررسی ختم می‌شود.

همان‌طور که پیش از این اشاره شد، فوق مقید بودن سیستم از تعدد قیود غیرهولونومیکی نشأت می‌گیرد. بنابراین، این سیستم‌ها ماهیتی غیر هولونومیکی دارند. بررسی کنترل‌پذیری سیستم‌های غیرهولونومیکی به صورت گسترده‌ای انجام شده و توجه عده‌ی زیادی را به خود معطوف داشته‌است. از طرف دیگر غیرهولونومیک بودن سیستم‌های فوق مقید در کنار هیبریدی بودن و غیرهمواری معادلات تحلیل آن‌ها را مشکل می‌سازد.

۱-۲- گفتارها

پس از ارائه‌ی یک سری مقدمات ریاضی در همین فصل، که عمدتاً برای درک بهتر سیستم‌های مقید ارائه شده‌اند، در فصل دوم اشاراتی به تحقیقات مرتبط به کار انجام شده در این پایان‌نامه طی سال‌های اخیر خواهیم داشت. در فصل سوم به بیان روش اتلاف توان و نحوه‌ی استفاده از آن برای سیستم‌های فوق مقید خواهیم پرداخت. در این راستا چند مثال عمده‌ی این سیستم‌ها به کمک روش اتلاف توان مدل شده است. فصل چهارم به روش‌های تحلیل پایداری و کنترل‌پذیری سیستم‌های فوق مقید اختصاص دارد. مثال‌های فصل دوم در این فصل به تفصیل مورد واکاوی قرار گرفته‌اند.

اما سهم اصلی این پایان‌نامه به فصل پنجم اختصاص دارد. در این فصل یک سیستم فوق مقید جدید که پیش از این با چنین مفروضاتی مد نظر قرار نگرفته است مورد ارزیابی قرار

¹ Multiple model driftless (driftfree) affine systems

² Power dissipation method

می‌گیرد. این سیستم متشکل از چند روبات متحرک همکار است که برای جابجایی یک جسم، بدون دخالت هر گونه وسیله‌ی مهار کننده به کار می‌روند، به این شکل که جسم آزاد است روی آن‌ها بلغزد. در این فصل، پس از استفاده از روش اتلاف توان برای یافتن مدل‌های حاکم بر حرکت، مباحث فصل چهارم به منظور تحلیل و درک بهتر سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. در فصل ششم، یک روش کنترل فازی برای سیستم فصل پنجم طراحی شده و نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌شود. این روش کاملاً کیفی است و به معادلات سیستم به‌طور کلی بستگی ندارد. در نهایت در فصل آخر به نتیجه‌گیری و پیشنهادات خواهیم پرداخت.

۱-۳- مقدمات ریاضی

تعریف ۱-۱ (سیستم MMDA): یک سیستم MMDA به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\dot{q} = f_1(q)u_1 + \dots + f_m(q)u_m, \quad f_i \in \{g_{\alpha_i} \mid \alpha_i \in I_i(q)\} \quad (1-1)$$

که در آن q بردار حالت سیستم (یا مختصات تعمیم یافته)، $g_{\alpha_i}(q)$ ها میدان‌های برداری، $I_i(q)$ مجموعه‌ی اندیس و u_i ورودی i ام سیستم است. چنین نمایشی برای بیان معادلات حرکت سیستم‌های فوق مقید مناسب است، زیرا هر کدام از این سیستم‌ها مدل‌های مختلفی و به فرم رابطه ۱-۱ دارد.

تعریف ۲-۱ (مجموعه‌ی محدب): مجموعه‌ی A محدب خوانده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$ و $\delta \in [0, 1]$ داشته باشیم: $\delta x + (1 - \delta)y \in A$.

تعریف ۳-۱ (جدار محدب): اشتراک تمامی مجموعه‌های محدبی که شامل A می‌شوند، جدار محدب^۱ A نام دارد و به شکل coA نمایش داده می‌شود.

۱-۳-۱- دربرگیرنده‌های دیفرانسیلی

یک دربرگیرنده‌ی دیفرانسیلی رابطه‌ای است به شکل

$$\frac{d}{dt}x(t) \in F(t, x(t)) \quad (2-1)$$

^۱ Convex hull

که آن را دربرگیرنده‌ی دیفرانسیلی معمولی^۱ می‌نامیم. در مورد یک دربرگیرنده‌ی دیفرانسیلی معمولی مسئله بر سر یافتن تابع پیوسته‌ی $x(\cdot)$ است به طوری که در یک بازه برای تقریباً همه‌ی t ها، $\frac{d}{dt}x(t)$ وجود داشته و عضوی از مجموعه‌ی $F(t, x(t))$ باشد. به علاوه شرایط اولیه و شرایط مرزی می‌توانند از قبل داده شده باشند.

در نگاه اول شاید به نظر برسد با یافتن یک تابع پیوسته f که عضو F است و حل معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t))$ خود به خود می‌توان حل دربرگیرنده‌ی دیفرانسیلی-۱-۲ را یافت. تابع f در صورت وجود یک "انتخاب" برای F خوانده می‌شود. اما عموماً مسئله بدین سادگی نیست زیرا از دربرگیرنده‌های دیفرانسیلی زمانی استفاده می‌شود که مدل به لحاظ فیزیکی یک انتخاب پیوسته نداشته باشد. به عبارت دیگر در شرایطی که بتوان یک انتخاب پیوسته داشت دیگر نیازی به دربرگیرنده‌های دیفرانسیلی نیست و همانند تمام سیستم‌های تک مدلی می‌توان از معادلات دیفرانسیل استفاده نمود.

۱-۳-۲- پایداری به ظن لیاپانوف

ابتدا به بیان تعاریف مربوط به پایداری می‌پردازیم. سیستم دینامیکی معمولی متغیر با زمان $\dot{x} = f(t, x)$ را در نظر بگیرید. x^* یک نقطه‌ی تعادل سیستم خوانده می‌شود اگر برای همه‌ی زمان‌های $t > t_0$ داشته باشیم $f(t, x^*) = 0$.

تعریف-۱-۴ (پایداری): نقطه‌ی تعادل $x^* = 0$ یک نقطه‌ی تعادل پایدار است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ غیر وابسته به t_0 طوری که اگر برای همه‌ی مسیرهای $\Phi(t, t_0, x_0)$ داشته باشیم $\|x_0\| < \varepsilon$ ، آنگاه برای همه‌ی زمان‌های $t > t_0$ داشته باشیم $\|\Phi(t, t_0, x_0)\| < \delta$.

تعریف-۱-۵ (پایداری مجانبی): نقطه تعادل $x^* = 0$ پایدار مجانبی است اگر پایدار باشد و برای هر $\varepsilon, \delta > 0$ وجود داشته باشد $T > 0$ طوری که اگر $\|x_0\| < \varepsilon$ باشد آنگاه به ازای همه‌ی زمان‌های $t > t_0 + T$ داشته باشیم $\|\Phi(t, t_0, x_0)\| < \delta$.

تعریف-۱-۶ (پایداری نمایی): نقطه‌ی تعادل $x^* = 0$ به صورت محلی پایدار نمایی است اگر یک همسایگی U از آن و ثوابت $\alpha, \beta > 0$ وجود داشته باشند طوری که برای هر $t > t_0$ و $x_0 \in U$ داشته باشیم $\|\Phi(t, t_0, x_0)\| < \beta \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}$.

² Ordinary differential inclusion

قضیه-۱-۱ (قضیه‌ی لیاپانوف برای سیستم‌های خودگردان متغیر با زمان) : سیستم دینامیکی $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ را در نظر بگیرید که $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ نقطه‌ی تعادل آن است. اگر در محدوده‌ی بسته‌ی D ($t_0 \leq t < \infty, \|\mathbf{x}\| < \varepsilon_0$) توابع $V_0(\mathbf{x}) \in C, V(t, \mathbf{x}) \in C^1$ طوری وجود داشته باشند که در D داشته باشیم $V(t, \mathbf{0}) = 0, 0 < V_0(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}), \dot{V} = V_t + \nabla_{\mathbf{x}} V \mathbf{f} \leq 0$ اگر ۱- علاوه بر این اگر توابع مثبت معین $V_1(\mathbf{x}), W(\mathbf{x}) \in C$ در این محدوده موجود باشند که $0 < V_0(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq V_1(\mathbf{x}), V_1(\mathbf{0}) = 0, \dot{V} \leq -W(\mathbf{x}) < 0$ آنگاه مبدأ یک نقطه-ی تعادل پایدار مجانبی خواهد بود.

۳- نهایتاً اگر ثوابت مثبت $k_1, k_2, k_3, c > 0$ وجود داشته باشند که

$$V_0(x) \geq k_1 \|x\|^c$$

$$V_1(x) \leq k_2 \|x\|^c$$

$$W(x) \geq k_3 \|x\|^c$$

آنگاه مبدأ پایدار نمایی خواهد بود.

۱-۳-۳-۳-۳-۳ قیود دیفرانسیلی

۱-۳-۳-۱-۱-۳-۳-۱ انتگرال پذیری قیود

از آنجا که می‌خواهیم سیستم‌های فوق‌مقید را بررسی کنیم، لازم است درک صحیحی از ماهیت قیود داشته باشیم. قیود بسیاری از سیستم‌های روباتیک از جمله دست‌های روباتی، روبات‌هایی که با محیط اطراف برخورد دارند و جابجاکننده‌های بیش‌آزاد از نوع فافین^۱ هستند. شکل کلی این قیود به صورت زیر است

$$\omega_i(q) \dot{q} = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (3-1)$$

که در آن $\omega_i(q)$ ‌ها بردارهای سطری (در هر نقطه به صورت تابعی خطی که روی فضای مماسی عمل می‌کند) و q بردار مختصات تعمیم‌یافته است. فرض بر آن است که $\omega_i(q)$ ‌ها به ازای تمامی مقادیر $q \in R^n$ مستقل خطی‌اند. $\omega_i(q)$ ‌ها نشان دهنده‌ی جهاتی هستند که \dot{q} در راستای آن‌ها مجاز به داشتن مقدار نیست.

^۱ Pfaffian

یادآور می‌شویم که قیود هولونومیکی به قیودی گفته می‌شود که حرکت سیستم را به ابرصفحه‌هایی از فضای وضعیت محدود می‌کنند. بنابراین قید هولونومیک معادل مجموعه‌ای از قیود جبری

$$h_i(q) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (4-1)$$

در فضای وضعیت است و بُعد زیرمنیفولدی که حرکت سیستم روی آن انجام می‌شود $n-k$ خواهد بود.

تعریف ۱-۷: مجموعه‌ی k قید فافین به شکل رابطه ۱-۳ را انتگرال‌پذیر گوییم اگر توابع $h_i: R^n \rightarrow R, \quad i = 1, \dots, k$ موجود باشند به نحوی که

$$h_i(q) = 0 \Leftrightarrow \omega_i(q) \dot{q} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5-1)$$

بنابراین مجموعه‌ای از قیود فافین انتگرال‌پذیر است اگر معادل یک مجموعه قیود هولونومیک باشد.

تعریف ۱-۸: مجموعه‌ای از قیود فافین را غیرهولونومیک می‌خوانیم اگر معادل مجموعه‌ای از قیود هولونومیک نباشد.

در اینجا مراد ما نحوه‌ی استخراج معادلات قیود و یا حرکت یک سیستم غیرهولونومیک نیست. در واقع قرار است به این پرسش پاسخی داده شود که با داشتن دو نقطه‌ی q_0, q_f آیا مسیری وجود دارد که این نقاط را به هم متصل کند و با حرکت روی آن همه‌ی قیود ارضا شوند؟ مجموعه‌ی تمام نقاطی که با شروع از q_0 و ارضای قیود می‌توانیم به آن‌ها برسیم، مجموعه‌ی نقاط قابل‌حصول q_0 نام دارد. بنابراین سؤال این است که تحت چه شرایطی مجموعه‌ی نقاط قابل‌حصول، کل فضای وضعیت خواهد بود، که این مستقیماً به غیرهولونومیک بودن قیود بستگی دارد زیرا اگر قیود هولونومیک باشند، حرکت به سطوح $h_i(q) = h_i(q_0), \quad i = 1, \dots, k$ محدود خواهد بود.

بررسی هولونومیک یا غیرهولونومیک بودن یک قید کار ساده‌ای نخواهد بود. ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سیستم تنها یک قید سرعت دارد

$$\omega(q) \dot{q} = \sum_{j=1}^n \omega_j(q) \dot{q}_j = 0 \quad (6-1)$$

این قید انتگرال‌پذیر است اگر تابعی به صورت $h: R^n \rightarrow R$ وجود داشته باشد که

$$\omega(q) \dot{q} = 0 \Leftrightarrow h(q) = 0$$

و با مشتق‌گیری از $h(q) = 0$ نسبت به زمان می‌توان گفت که اگر قید هولونومیک باشد آنگاه

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(q) \dot{q}_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0 \quad (7-1)$$

پس باید تابعی مثل $\alpha(q)$ که به آن فاکتور انتگرال گیری می گویند وجود داشته باشد طوری که

$$\alpha(q)\omega_j(q) = \frac{\partial h}{\partial q_j}(q), \quad j=1, \dots, n$$

بنابراین یک قید فافین هولونومیک است اگر و تنها اگر فاکتور انتگرال گیری $\alpha(q)$ وجود داشته باشد که $\alpha(q)\omega(q)$ مشتق یک تابع h باشد. از روی معادله‌ی فوق نمی توان مستقیماً انتگرال پذیری را چک کرد زیرا شامل تابع نامعلوم h است. این وضعیت می تواند توسط این

واقعیت که $\frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}$ تعدیل شود. بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{\partial(\alpha\omega_j)}{\partial q_i} = \frac{\partial(\alpha\omega_i)}{\partial q_j}$$

و قید هولونومیک است اگر فاکتور انتگرال گیری $\alpha(q)$ وجود داشته باشد که عبارت فوق درست باشد. با این حال برای اثبات هولونومیک بودن می بایست $\alpha(q)$ را بیابیم. توجه کنید که در اینجا ω_i مؤلفه‌ی i ام بردار سطری قید است و نباید آن را با قید i ام اشتباه گرفت.

اثبات انتگرال پذیری در صورتی که تعداد قیود بیشتر از یک باشد حتی سخت تر هم می شود. اگر k قید به شکل رابطه ۱-۳ داشته باشیم، علاوه بر انتگرال پذیری تک تک آن ها،

انتگرال پذیری ترکیبات خطی آن ها $\sum_{i=1}^k \alpha_i \omega_i(q) \dot{q}$ نیز باید چک شود. زیرا هر چند ممکن است تک تک قیود انتگرال پذیر نباشند، این امکان وجود دارد که مجموعه‌ای از آن ها انتگرال پذیر باشد. پس ممکن است توابع $h_i, i=1, \dots, p, p \leq k$ طوری وجود داشته باشند که برای هر q

$$\text{span}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial q}(q), \dots, \frac{\partial h_p}{\partial q}(q)\right\} \subset \text{span}\{\omega_1(q), \dots, \omega_k(q)\}$$

اگر بتوانیم این توابع را به دست آوریم آنگاه حرکت سیستم محدود به مجموعه‌ی ابرصفحات زیر خواهد بود:

$$\{q: h_1(q) = c_1, \dots, h_p(q) = c_p\}$$

اگر $p=k$ باشد، آنگاه قیود هولونومیک هستند. اگر $p < k$ باشد قیود هولونومیک نیستند اما نقاط قابل حصول سیستم هنوز محدود است. به چنین قیودی هولونومیک پاره‌ای می گویند. به قیودی که نقاط قابل حصول را به هیچ عنوان محدود نمی کنند، قیود کاملاً غیرهولونومیک اطلاق می شود. نمونه‌هایی از سیستم‌های هولونومیک و غیرهولونومیک در فصل سوم و یک سیستم غیرهولونومیک پاره‌ای - که در مسائل مهندسی نادرند - در فصل پنجم مورد بررسی قرار خواهد گرفت.