دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد

عنوان:

# عملگرهای ضعیف فشرده و توپولوژی قوی* برای فضای باناخ

نگارش:

سمیه ابراهیمی

استاد راهنما:

دکتر حبیب امیری

استاد مشاور:

دکتر هادی خطیب زاده

مهر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

# تقدیم به

با تمام وجودم این پایان نامه را به پدر فداکار و مادر مهربانم و خواهران دوست داشتنی و برادر عزیزم تقدیم می‌کنم که همیشه همراه و همگام من بودند.

و تقدیم به همسر گرامی‌ام که این راه را با همراهی او به سرانجام رساندم.

و نیز تقدیم به کسانی که در مسیر علم و دانش گام بر می‌دارند و سختی‌های راه آنان را از ادامه‌ی راه منصرف نمی‌کنند و با امید و توکل به خداوند بی‌همتا در این جاده‌ی بی انتها پیش می‌روند.

# تقدیر و تشکر

از تمامی عزیزانی که در این پژوهش مرا یاری نمودند و بدون تردید بدون حمایت های آنان این پژوهش شکل نمی گرفت، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

از زحمات بی شائبه استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حبیب امیری قدردانی می کنم که در مدت انجام این پژوهش با رهنمودهای ارزشمندشان به بنده کمک فراوانی نمودند و از استاد مشاور محترم، جناب آقای دکتر هادی خطیب زاده کمال تشکر را دارم.

و همچنین با سپاس از خانواده ی عزیزم به ویژه پدر و مادر مهربانم که در همه حال مشوق و همراهم بودند .

# چکیده


توپولوژی قوی* $s^*(X)$ از فضای باناخ $X$ که با $s^*(X)$ نشان داده می‌شود، یک توپولوژی موضعاً محدب تولید شده توسط شبه نرم‌های $x \mapsto ||Sx||$ است که در آن $S$ روی نگاشت‌های خطی کراندار از $X$ به توی فضاهای هیلبرت تغییر می‌کند. $w.r$- توپولوژی $\rho(X)$ برای $X$ توپولوژی موضعاً محدب قوی‌تری است که به طور مشابه با جایگزین کردن فضاهای باناخ انعکاسی به‌جای فضاهای هیلبرت در $s^*(X)$ به دست می‌آید. برای هر فضای باناخ $Y$ نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ به طور ضعیف فشرده است زمانی که $T$ از $w.r$- توپولوژی به توپولوژی نرمی روی $Y$ پیوسته باشد. نتیجه‌ی اصلی انطباق این دو توپولوژی روی مجموعه‌های نرم کراندار را ثابت می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** فضای باناخ، $s^*$- توپولوژی، $w.r$- توپولوژی، عملگر به‌طور ضعیف فشرده.

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف وقضایای پایه‌ای که در روند اثبات قضایای مختلف این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته، می‌پردازیم. برای مطالب این بخش بیشتر از مراجع [۲۴، ۲۵، ۲۶] استفاده شده است.

## ۱.۱ تعاریف

**تعریف ۱.۱. توپولوژی:** یک توپولوژی روی یک مجموعه‌ی $X$ خانواده $\tau$ از زیر مجموعه‌های $X$ است که دارای خواص زیر باشد:

۱) $X, \varnothing \in \tau$،

۲) اجتماع هر گردایه از اعضای $\tau$ متعلق به $\tau$ باشد،

۳) اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای $\tau$ متعلق به $\tau$ باشد.

**تعریف ۲.۱. هاسدورف بودن:** فضای توپولوژیک $X$ را هاسدورف گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز از $X$ مثل $x, y$ $(x \neq y)$ همسایگی های $U$ حول نقطه $x$ و $V$ حول $y$ موجود باشند که $U \cap V = \varnothing$.

**تعریف ۱.۳. مجموعه‌ی محدب و مطلقاً محدب:** فرض کنید که $S$ یک فضای برداری روی اعداد حقیقی باشد. یک مجموعه‌ی $C$ در $S$ محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in C$،$y$ و هر $t$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ نقطه‌ی $(۱ - t)x + ty$ در $C$ باشد.
یک مجموعه‌ی $C$ **مطلقاً محدب** است اگروتنهااگر برای هر نقاط $x \in C$،$y$ و هر اعداد $\alpha$ و $\beta$ که در شرط $|\alpha| + |\beta| \leq ۱$ صدق می‌کنند، حاصل جمع $\alpha x + \beta y$ در $C$ باشد.

**تعریف ۱.۴. موضعاً محدب:** فرض کنید $X$ یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی $\tau$ باشد. $X$ را موضعاً محدب گوییم هرگاه پایه‌ی موضعی وجود داشته باشد که هریک از اعضای آن محدب باشند.

**تعریف ۱.۵. عملگر:** یک عملگر یک نگاشت بین فضاهای برداری است. مثلاً اگر $U, V$ دو فضای برداری باشند آن گاه $A : U \longrightarrow V$ یک عملگر بین فضاهای برداری ذکر شده است و نیز عملگر $A : U \longrightarrow U$ یک عملگر روی فضای برداری $U$ است.

**تعریف ۱.۶. تبدیل خطی:** فرض کنید $U, V$ دو فضای برداری روی میدان $F$ باشند، تابع $T : U \longrightarrow V$ را یک تبدیل خطی می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in U$ و هر $c \in F$ داشته باشیم،

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y)$$

هر تبدیل خطی از یک فضای برداری به خودش را یک عملگر خطی می‌گوییم.

**تعریف ۱.۷.** فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط بر مجموعه‌ی $E$ باشد. گوییم $\{f_n\}$ بر $E$ به‌طور یکنواخت همگرا به تابع مختلط $f$ است هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = ۰,$$

به عبارت دیگر

$$\forall \epsilon > ۰ \ \exists N(\epsilon) > ۰ \ \ \forall x \in E \ \ (\forall n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

**تعریف ۱.۸. فضای باناخ:** اگر $(X, \|.\|)$فضای برداری نرمدار باشد و $\|.\|$ روی X کامل باشد یعنی هر دنباله کشی در X همگرا باشد، آن‌گاه $(X, \|.\|)$ را یک فضای باناخ گوییم.

**تعریف ۱.۹. فضای هیلبرت:** فضای برداری $H$ را یک فضای هیلبرت می‌گوییم هرگاه روی H یک ضرب داخلی $(.|.)$ تعریف شود و اگر تعریف کنیم $(u|u) = \|u\|^{۲}$، $H$ با این نرم کامل باشد.

**تعریف ۱.۱۰. فرم یک و نیم خطی:** فرض کنید $K, H$ دو فضای هیلبرت باشند، نگاشت

$$f : K \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

را یک فرم یک ونیم خطی می‌گوییم هرگاه نسبت به مؤلفه‌ی اول خطی و به مؤلفه‌ی دوم مزدوج خطی باشد.

$$\begin{aligned} f(a+b,c) &= f(a,c)+f(b,c) \\ f(a,b+c) &= f(a,b)+f(a,c) \\ f(\lambda a,b) &= \lambda f(a,b) \\ f(a,\mu b) &= \overline{\mu} f(a,b) \end{aligned}$$

**تعریف ۱.۱۱. فرم دو خطی:** روی فضای برداری $V$ یک نگاشت $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ با ویژگی های زیر دو خطی است. $\mathbb{F}$ یک میدان اسکالر است.

$$\begin{aligned} B(a+b,c) &= B(a,c)+B(b,c) \\ B(a,b+c) &= B(a,b)+B(a,c) \\ B(\lambda a,b) &= B(a,\lambda b) = \lambda B(a,b) \end{aligned}$$

**تعریف ۱.۱۲. فضای برداری توپولوژیک:** فرض کنیم $X$ فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. اگر روی $X$ یک توپولوژی قرار دهیم که اعمال جمع برداری $+ : X \times X \longrightarrow X$ و ضرب در اسکالر $. : \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ پیوسته باشند آن‌گاه $X$ را یک فضای برداری توپولوژیک نامیم.

**تعریف ۱.۱۳. شبه نرم:** منظور از یک شبه نرم بر یک فضای برداری $X$ نگاشت $P : X \longrightarrow [0, \infty)$ است که،

۱) $\forall x, y \in X, \quad P(x + y) \leq P(x) + P(y)$،

۲) $\forall \alpha \in F, \forall x \in X, \quad P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

شبه نرم $P$ را یک نرم می‌گوییم هرگاه از $P(x) = 0$ نتیجه شود که $x = 0$.

**تعریف ۱.۱۴. شرط هاسدورف:** فرض کنید $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده‌ی از شبه نرمها بر فضای $X$ باشند، شرط زیر را شرط هاسدورف می‌گوییم،

$$\cap_{\alpha \in \Lambda} \{x \in X \quad : \quad P_\alpha(x) = 0\} = \{0\}$$

اگر خانواده‌ای از شبه نرمها روی فضای برداری $X$ موجود باشد که در شرط هاسدورف صدق کند، آن‌گاه $X$ را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب هاسدورف تبدیل می‌کند. عکس این مطلب نیز درست می‌باشد یعنی هر توپولوژی موضعاً محدب هاسدورف روی یک فضای برداری توپولوژیک توسط یک خانواده از شبه نرمها که در شرط هاسدورف صدق می‌کند ایجاد شده است.

همسایگی در توپولوژی ایجاد شده توسط شبه نرم‌های $\{P_\alpha\}$ حول نقطه‌ی $x_0$ به‌صورت زیر است:

$$\{x \in X \ ; \ |P_i(x - x_0)| < \epsilon, \quad i \in I, \epsilon > 0 \ \}$$

که $I$ مجموعه‌ای متناهی از اندیس‌ها و $\epsilon > 0$ عددی دلخواه است.

**تعریف ۱.۱۵. توپولوژی ضعیف:** اگر $X$ فضای برداری توپولوژیک و $X^*$ دوگان $X$ باشد. خانواده $\{P_f\}_{f \in X^*}$ که برای هر $f \in X^*$ به‌صورت $P_f(x) = |f(x)|$ تعریف می‌شود خانواده‌ای از شبه نرمها است که در شرط هاسدورف صدق می‌کند. توپولوژی تولید شده توسط این خانواده از شبه نرمها بر $X$ را توپولوژی ضعیف نامیم.

توپولوژی ضعیف $\sigma(X, X^*)$ روی $X$ کوچکترین توپولوژی روی $X$ است که تمام نگاشت‌های

$(P_f)_{f\in X^*}$ را پیوسته می‌سازد.

فرض کنیم $x_\circ \in X$، یک پایه همسایگی برای $x_\circ$ در توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ را با در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$V = \{x \in X \ \ ; | < f_i, x - x_\circ > | < \epsilon \ , \ \ \forall i \in I\}$$

که در اینجا $I$ مجموعه‌ی متناهی از اندیس‌ها، $f_i \in X^*$ و $\epsilon > \circ$ دلخواه است.

به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $x_n \to x$ با توپولوژی نرمی آن‌گاه $x_n \to x$ با توپولوژی ضعیف است.

**تعریف ۱.۱۶. توپولوژی ضعیف*:** اگر $X$ فضای نرمدار و $X^*$ دوگان $X$ باشد. خانواده $\{P_x\}_{x\in X}$ روی $X^*$ که به‌صورت $P_x(f) = |f(x)|$ تعریف می‌شود خانواده‌ای از شبه نرمها است که در شرط هاسدورف صدق می‌کند. توپولوژی تولید شده توسط این خانواده از شبه نرمها بر $X^*$ را توپولوژی ضعیف* نامیم.

توپولوژی ضعیف* $\sigma(X^*, X)$ ضعیف‌ترین توپولوژی روی $X^*$ است که تمام نگاشت‌های $(P_x)_{x\in X}$ را پیوسته می‌سازد.

چون $X \subset X^{**}$ واضح است که توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ ضعیف‌تر از توپولوژی $\sigma(X^*, X^{**})$ است.

فرض کنیم $f \in X^*$، یک پایه همسایگی برای $f$ در توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ را با در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های به شکل

$$V = \{g \in X^* \ \ ; | < g - f, x_i > | < \epsilon \ , \ \ \forall i \in I\}$$

که در اینجا $I$ مجموعه‌ی متناهی از اندیس‌ها، $x_i \in X$ و $\epsilon > \circ$ دلخواه است. لازم به ذکر است منظور از

$< g - f, x_i >$ یعنی اثر تابعک $g - f$ روی $x_i$ می‌باشد.

به سادگی قابل بررسی است اگر $f_n \to f$ با توپولوژی نرمی آن‌گاه $f_n \to f$ با توپولوژی ضعیف و به دنبال آن $f_n \to f$ با توپولوژی ضعیف* است.

**تعریف ۱.۱۷. فضای باناخ انعکاسی:** فرض کنید X فضای باناخ باشد.$J$ نشاننده‌ی متعارف

$$J : X \hookrightarrow X^{**}$$

$$x \longmapsto \hat{x}$$

با ضابطه

$$\hat{x}(f) = f(x)$$

برای $f \in X^*$ باشد. می‌گوییم $X$ انعکاسی است اگر $J(X) = X^{**}$. وقتی $X$ انعکاسی است، $X^{**}$ را با $X$ به طور ضمنی یکی می‌گیریم.

**تعریف ۱.۱۸. عملگر فشرده:** اگر $X$ و $Y$ دو فضای باناخ باشند. عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را فشرده می‌گوییم هرگاه $\overline{T(B_X)}$ در $Y$ فشرده باشد که در آن $B_X = \{x \in X \ : \ ||x|| \leq ۱\}$ گوی واحد بسته در $X$ است. به سادگی دیده می‌شود که هر عملگر فشرده کراندار است یعنی $T \in B(X, Y)$.
عملگر $T$ را از رتبه متناهی می‌گوییم هرگاه $dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$.
- $T$ فشرده است اگر وتنها اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در $X$ شامل زیر دنباله‌ی مانند $\{x_{n_i}\}$ باشد به‌طوری که $\{Tx_{n_i}\}$ به نقطه‌ی از $Y$ همگرا باشد.

**تعریف ۱.۱۹. عملگر فشرده ضعیف:** فرض کنید $X$ و $Y$ فضاهای باناخ باشند و$T \in B(X, Y)$. عملگر $T$ را فشرده‌ی ضعیف گوییم هرگاه $\overline{T(B_X)}$ فشرده ضعیف باشد.

**تعریف ۱.۲۰.** اگر $H, K$ فضاهای هیلبرت باشند، گردایه ی تمام نگاشتهای خطی کراندار از $H$ به توی $K$ را با $B(H, K)$ نشان می‌دهند. همچنین $B(H, H) = B(H)$. مجموعه‌ی $B(H, K)$ فضایی نرمدار است که نرم آن به‌صورت زیر می‌باشد

$$||T|| = sup\{||T(x)|| : \ ||x|| \leq ۱\}$$

مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده از $H$ به $K$ را با $K(H, K)$ نشان می‌دهیم و عملگرهای فشرده روی $H$ را با $K(H)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲۱.۱. فضاهای $L^p$:** فرض کنید $X$ یک فضای اندازه دلخواه با اندازه مثبت $\mu$ باشد. اگر $\infty > p > 0$ و $f$ یک تابع اندازه پذیر مختلط بر$X$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left( \int_X \|f\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام $f$های اندازه پذیر تشکیل شده باشد که $\|f\|_p < \infty$، فضایی است که عناصرش رده‌های هم ارزی از توابع می‌باشند.

**تعریف ۲۲.۱. فضاهای $l^p$:** هر عنصر $l^p$ را می‌توان یک دنباله‌ی مختلط $x = \{x_n\}$ در نظر گرفت که $||x||_p < \infty$. این نرم را به صورت زیر تعریف می‌کنبم:

$$||x||_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**تعریف ۲۳.۱. $l^p$-جمع مستقیم:** فرض کنید که $(X_i)$ یک دنباله از فضای نرمدار باشد. منظور از $l^p$-جمع مستقیم این فضاها که با $X = \bigoplus_{l^p} X_i$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر است:

$$X = \{(x_i) \in \prod X_i \ ; \ \sum ||x_i||^p < \infty\}$$

و نرم زیر را روی $X$ قرار می‌دهیم:

$$x = (x_i) \in X \qquad ; ||x||_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**تعریف ۲۴.۱. جبر:** یک مجموعه‌ی $A$ را به همراه دو عمل دوتایی $+$، $*$ یک جبر می‌نامیم یعنی $(A, +, *)$ یک جبر است در صورتی‌که $(A, *)$ یک حلقه و $(A, +)$ یک فضای برداری باشند و $\alpha \in \mathbb{C}$ و $a, b, c \in A$ در خواص زیر صدق کند،

۱) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$،

۲) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$،

۳) $(\alpha a) * b = \alpha(a * b)$،

۴) $a * (b * c) = (a * b) * c$.

**تعریف ۱.۲۵. $^*$-جبر:** فرض کنید $A$ یک جبر باشد تابع $* : A \longrightarrow A$ که در خواص زیر صدق کند یک برگشت بر $A$ نامیده می‌شود.

$$\forall a, b \in A \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad (\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$$

$$(ab)^* = b^* a^*$$

$$(a^*)^* = a$$

جفت$(A, *)$ را یک $^*$-جبر نامیم و $a \in A$ را **هرمیتی** نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$a^* = a.$$

**تعریف ۱.۲۶. باناخ $^*$-جبر:** یک جبر باناخ به همراه یک برگشت روی آن است که برای $a \in A$ داریم $\|a^*\| = \|a\|$.

**تعریف ۱.۲۷. $c^*$-جبر:** یک باناخ $^*$-جبر است به طوری‌که برای هر $a \in A$ داریم

$$\|a^* a\| = \|a\|^۲.$$

**تعریف ۱.۲۸. شبه پیوسته پایینی:** فرض کنید $E$ یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم $\varphi : E \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ شبه پیوسته پایینی است هرگاه برای هر $x \in E$ داشته باشیم:

$$\liminf_{y \to x} \varphi(y) \geq \varphi(x).$$

**تعریف ۱.۲۹. نقاط اکستریم:** فرض کنید $K$ زیر مجموعه‌ای از فضای برداری $X$ باشد. مجموعه‌ی ناتهی $S \subset K$ یک مجموعه‌ی اکستریم $K$ نام دارد اگر هیچ نقطه‌ای از $S$ یک نقطه درونی هیچ

بازه‌ای که نقاط انتهایی‌اش در $K$اند جز وقتی هر دو نقطه‌ی انتهایی در $S$اند نباشد. این شرط را می‌توان به طور تحلیلی به‌صورت زیر بیان کرد:

هرگاه $x \in K$ و $y \in K$ و $0 < t < 1$ و $(1-t)x + ty \in S$ آن‌گاه $x \in S$ و $y \in S$.

نقاط اکستریم $K$ مجموعه‌های اکستریمی هستند که فقط از یک نقطه تشکیل شده‌اند. مجموعه‌ی تمام نقاط اکستریم $K$ را با $E(K)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳۰.۱. پوش محدب:** اگر $X$ یک فضای برداری بوده و $E \subset X$، پوش محدب $E$ با $co(E)$ نموده می‌شود. $co(E)$ اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب $X$ است که شامل $E$ می‌باشند. به بیان معادل $co(E)$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب متناهی از اعضای $E$ می‌باشد.

اگر $X$ یک فضای برداری توپولوژیک بوده و $E \subset X$، پوش محدب بسته‌ی $E$ که به‌صورت $\overline{co}(E)$ نوشته می شود عبارت است از بستار $co(E)$ یا $\overline{co(E)}$.

## ۲.۱ قضایای مقدماتی

**قضیه:** اگر $T \in B(X,Y)$ و $dim\ R(T) < \infty$ آن‌گاه $T$ فشرده است.

*برهان.* رجوع شود به [۱۹] قضیه‌ی (۴.۱۸). □

**قضیه ۱.۲.۱.** ***(نامساوی کشی-شوارتز [۱]):***

*هرگاه $x \in H$ و $y \in H$ که در آن $H$ یک فضای ضرب داخلی است آن‌گاه:*

$$| < x, y > | \leq ||x||\ ||y||.$$

*برای هر $x \in H$ و $y$* ***(قانون متوازی الاضلاع)*** *را به صورت زیر بیان می‌شود:*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

[۱] Cauchy-Schwarz inequality

برهان. رجوع شود به [۲۵] گزاره‌ی (۲.۴). □

**قضیه ۲.۲.۱. *(اصل کرانداری یکنواخت):***

*فرض کنید $X$ فضای باناخ و $Y$ فضای برداری نرم‌دار باشد. فرض کنید $F$ مجموعه‌ی از عملگرهای خطی پیوسته از $X$ به $Y$ باشد. اگر برای همه $x \in X$ داشته باشیم $\sup_{T\in F} ||Tx|| < \infty$ آن‌گاه $\sup_{T\in F} ||T|| < \infty$.*

برهان. رجوع شود به [۱۹] قضیه‌ی (۴.۲). □

**قضیه ۳.۲.۱. *(قضیه گلدشتاین[۱]):***

*فرض کنیم $E$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت $J(B_E)$ در $B_{E^{**}}$ با توپولوژی $\sigma(E^{**}, E^*)$ چگال است.*

برهان. رجوع شود به [۲۴] لم (۳۰.۴). □

**قضیه ۴.۲.۱. *(نامساوی هولدر[۲]):***

*فرض کنیم $p$ و $q$ نماهای مزدوج بوده (یعنی $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) و $1<p<\infty$. همچنین $X$ یک فضای با اندازه‌ی $\mu$ باشد و نیز $f$ و $g$ توابعی اندازه‌پذیر بر $X$ با برد $[0,\infty]$ باشند. در این صورت:*

$$\int_X fg\,d\mu \le \{\int_X f^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}\ \{\int_X g^q d\mu\}^{\frac{1}{q}}$$

برهان. رجوع شود به [۲۵] قضیه‌ی (۵.۳). □

**قضیه ۵.۲.۱. *(کاکوتانی[۳]):***

*فرض کنیم $E$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت $E$ انعکاسی است اگروتنهااگر $B_E=\{x\in E\,;||x||\le 1\}$ با توپولوژی $\sigma(E,E')$ فشرده باشد.*

---

[۱] Goldstine's theorem

[۲] Holder inequality

[۳] Kakutani

برهان. رجوع شود به [۲۴] قضیه‌ی (۳.۱۶). □

**قضیه ۶.۲.۱.** ***(باناخ-آلااوقلو-بورباکی[۱]):***

*فرض کنید $E$ یک فضای باناخ باشد. مجموعه‌ی $B_{E'} = \{f \in E' \, ; ||f|| \leq ۱\}$ برای توپولوژی ضعیف* $\sigma(E', E)$ فشرده است.*

برهان. رجوع شود به [۲۴] قضیه‌ی (۳.۱۵). □

**قضیه ۷.۲.۱.** ***(کرین-میلمن[۲]):***

*فرض کنیم $X$ یک فضای برداری توپولوژیک باشد که $X^*$ بر آن نقاط را جداسازد. هرگاه $K$ یک مجموعه‌ی محدب فشرده‌ی ناتهی در $X$ باشد، آن‌گاه $K$ غلاف محدب بسته‌ی مجموعه نقاط اکستریم خود می‌باشد. با علامات، $K = \overline{co}(E(K))$.*

برهان. رجوع شود به [۱۹] قضیه‌ی (۲۳.۳). □

[۱] Banach-Alaoglu-Bourbaki

[۲] Krein-Milman

# فصل ۲

# ویژگی‌های پایه‌ای برای توپولوژی قوی* و w.r توپولوژی

در این فصل در بخش‌های یک و دو به معرفی توپولوژی قوی* و w.r توپولوژی پرداخته‌ایم. در هر توپولوژی، همگرایی و نیز همسایگی‌هایشان بسیار مهم می‌باشد که کمک بسیاری در شناخت توپولوژیها به ما می‌رسانند لذا در این دو بخش به آن‌ها پرداخته‌ایم.

در [۸] بخش ۲، توپولوژی تولید شده توسط شبه نرم های که در آن از نگاشت‌های خطی کراندار از $X$ به‌توی فضای هیلبرت استفاده شده است را با $P(\Gamma_2)(X)$ نمایش داده شده است. برای هر فضای باناخ $X$ توپولوژی مشخص شده با نماد $P(\Gamma_2)(X)$ را توپولوژی قوی* نامیم که آن را با $s^*(X, X^*)$ و برای سادگی با نماد $s^*(X)$ نمایش می‌دهیم.

در مقابل توپولوژی تولید شده توسط شبه نرم های که در آن از نگاشت‌های خطی کراندار از $X$ به‌توی فضای باناخ انعکاسی استفاده شده است که با نماد $P(W)(X)$ نمایش داده شده است. برای هر فضای باناخ $X$ توپولوژی مشخص شده با نماد $P(W)(X)$ را $w.r$ توپولوژی نامیم که آن را با $\rho(X, X^*)$ و برای سادگی با نماد $\rho(X)$ نمایش می‌دهیم.

در بخش‌های سه و چهار به برخی از ویژگی‌های پایه‌ای این دو توپولوژی پرداخته‌ایم. به دلیل شباهت‌های زیادی که به‌هم دارند در برهان‌ها فقط برای توپولوژی قوی* اثبات کرده ایم و از تکرار برای $w.r$ توپولوژی خودداری کرده‌ایم.

در بخش پنجم نیز به معرفی توپولوژی مکی و توپولوژی راست پرداخته و با بیان گزاره‌های (۱.۵.۲) و (۲.۵.۲) آن‌ها را به توپولوژی قوی* و $w.r$ توپولوژی ارتباط داده‌ایم. در این بخش نتیجه‌ی (۳.۵.۲) را بیان وثابت می‌کنیم که نقش اساسی در برهان قضایا وگزاره‌های این پایان‌نامه دارد.

**تذکر:** باتوجه به ادامه مطالب، $X$ نشان دهنده فضای باناخ عمومی‌می‌باشد، $F$ را زیر فضای جداکننده بسته اختیاری از دوگان $X^*$ از $X$ نمایش خواهیم داد. گوی واحد بسته از $X$ را با $B_X$ و به طور مشابه برای فضاهای باناخ دیگر نیز استفاده خواهیم کرد. مطلب دیگر این که میدان اسکالر $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ می‌باشند که از نماد $\mathbb{K}$ نیز استفاده می‌کنیم.

## ۱.۲ معرفی توپولوژی قوی*

فرض کنید $X$ یک فضای باناخ باشد و $S$ نگاشت‌های خطی کراندار از $X$ به توی فضاهای هیلبرت می‌باشند. شبه نرم $P_S : X \longrightarrow [0, \infty)$ رابه صورت

$$P_S(x) = \|Sx\|, \qquad x \in X$$

تعریف می‌کنیم. $P_S$ شبه نرم می‌باشد، زیرا:

$$\begin{aligned} ۱) \quad P_S(x+y) &= \|S(x+y)\| \\ &= \|Sx + Sy\| \\ &\leq \|Sx\| + \|Sy\| = P_S(x) + P_S(y) \end{aligned}$$