بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم

بخش فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد فیزیک(گرایش فیزیک بنیادی)

عنوان:

سیاهچاله باردار دیلاتونی چرخشی در فضا-زمان n-بعدی

اساتید راهنما:

دکتر مجید رهنما

پرفسور یوسف بهرام پور

مؤلف:

مسعود اله وردی زاده

بهار ۸۷

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش فیزیک

دانشکده علوم

دانشگاه شهید باهنرکرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مسعود اله ورودی زاده

اساتید راهنما: ۱- دکترمجید رهنما مجید رهنما

۲- دکتریوسف بهرامپور

داور ۱: دکترنصراله گرامی

داور ۲: دکتر احمد شیخی

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکترمحمدمهدی یزدانپناه

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم که موفقیتهایم را مدیون صبوریشان هستم.

تقدیم به:

خواهران و برادرانم که همواره مشوقم بوده اند.

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش خداوندی را سزاست که عشق به آموختن را در انسان به‌ودیعه نهاد عشقی که رسالت برانگیز است. رسالتی انبیاء گونه، شکرگذار هستم که در این راه یاریم نمود و از او می‌خواهم که مرا در جهت بکارگیری آموخته‌هایم در راه ثواب مدد فرمایید. در اینجا لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم که من را همواره با صبر و دلسوزی مورد مهر و حمایت خود قرار دادند، تشکر کنم و همچنین از برادران و خواهران عزیزم که شادی بخش و مایه دلگرمی من هستند نیز سپاس‌گذارم و از خدای بزرگ برای ایشان سلامتی و سعادت طلب می‌کنم.

از استاد ارجمندم آقای دکتر مجید رهنما به خاطر همکاریشان تشکر می‌کنم. از استاد فرزانه آقای دکتر یوسف بهرامپور به‌خاطر راهنماییهای ارزنده‌شان که همواره گره‌گشای راهم بودند کمال تشکر را دارم. از استاد گرامی آقای دکتر شیخی که با بزرگواری تمام و صبر و حوصله فراوان بنده را راهنمایی فرمودند و همچنین از استاد ارجمند آقای دکتر گرامی که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند نیز بسیار سپاس‌گذارم.

چکیده

سال ۱۹۰۵ میلادی البرت انشتین با انتشار مقالات معروفش نظریه نسبیت را بنا نهاد، و با این کار مفهوم فضا – زمان را وارد فیزیک نمود. که در واقع این مفهوم اساس نظریه نسبیت عام نیز می باشد. از آن زمان تا کنون مطالعات زیادی روی ساختار فضا – زمان انجام شده و در این راستا نتایج خوبی نیز بدست آمده است که از جمله معروفترین آنها می توان به جواب شوارتز شیلد و جواب کر- نیومن اشاره کرد. هر کدام از این جوابها تحت شرایط خاصی فضا –زمان تولید شده توسط اجرام کیهانی را توصیف می کنند، اما هر دو جواب به صورت مشترک پیش بینی می کنند که اگر چگالی جرم یک جسم به حد کافی (حد ساند را چاخار) افزایش یابد،آن جرم به یک سیاهچاله تبدیل می شود . به این معنی که در آن ناحیه ، فضا –زمان دیگر معنایی ندارد و در واقع تئوری نسبیت از توصیف این ناحیه عاجز است.

در این پایان نامه ابتدا جواب شوارتز شیلد مورد بررسی قرار می‌گی‌رد، سپس در فصل سوم سیاهچاله های دیلاتونی باردار استاتیک درفضا – زمان n بعدی مرور می شود و در نهایت در فصل چهارم جواب دقیقی را برای سیاهچاله دیلاتونی چرخشی با پارامتر کوچک دوران در فضا- زمان n بعدی بدست می آوریم .

فهرست مطالب

فصل اوّل

تانسورها

مقدمه

در این فصل سعی می کنیم به معرفی تانسورها و قوانین حاکم بر آنها بپردازیم ، چرا که تانسورها نقش اساسی در توصیف تئوری نسبیت (عام) ایفا می کنند. بعنوان مثال همانطور که بعدا خواهیم دید تانسور ریچی که یک تانسور مرتبه ۲ است در اغلب معادلات حضور دارد. بطور کلی تانسورها در فیزیک بسیار مفید هستند چرا که وقتی قوانین فیزیکی توسط تانسورها بیان می شوند با تبدیل مختصات شکل کلی آنها بدون تغییر باقی می ماند.

(۱-۱) بردارهای کنتراورینت

بطور کلی هر دو کمیت V^{μ} و V'^{ν} که به ترتیب بر حسب سیستم‌های مختصات $\{x^{\alpha}\}$ و $\{x'^{\beta}\}$ تعریف شده باشند و به وسیله قانون زیر به یکدیگر مرتبط باشند را یک بردار کنتراورنیت گویند. (N بعد فضا است)

$$V^{\mu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}V'^{\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,\dots,N) \qquad (۱-۱)$$

بردارهای کنتراورینت را همواره به وسیله یک اندیس بالا نمایش می‌دهند.

(۱-۲) بردارهای کوارنیت

از طرف دیگر هر دو کمیت V_{μ} و V'_{ν} که به ترتیب بر حسب سیستم‌های مختصات $\{x^{\alpha}\}$ و $\{x'^{\beta}\}$ تعریف شده باشند و به وسیله قانون زیر به یکدیگر مرتبط باشند را یک بردار کوارینت گویند.

$$V'_{\nu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}V_{\mu} \qquad (\mu,\nu=1,2,\dots,N) \qquad (۲-۱)$$

بردارهای کوارینت را با یک اندیس پایین نمایش می‌دهند.

(۱-۳) اسکالرها

ترکیبی از یک بردار کنتراورینت و یک بردار کوارینت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F = V^m U_m \qquad , \ (m = 1,2,\dots,N) \qquad (۱-۳)$$

فرض می‌کنیم عبارت بالا در مختصات $\{x^k\}$ نوشته شده باشد، در این صورت مقدار این عبارت در مختصات جدید $\{x'^k\}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$F' = V'^k U'_k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} V^m \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} U_n = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} V^m U_n \qquad (۱-۴)$$

که در رابطه بالا δ دلتای کرونکر است:

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} = \delta^n_m \qquad (k, m, n = 1,2,\dots,N) \qquad (۱-۵)$$

و در نتیجه رابطه (۱-۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F' = \delta^n_m \, V^m U_n = V^m U_m \qquad (۱-۶)$$

یا

$$F' = V'^k U'_k = V^m U_m = F \qquad (۱-۷)$$

رابطه (۱-۷) نشان می‌دهد که کمیت F در همه سیستمهای مختصات مقدار یکسانی دارد. چنین کمیتی را یک اسکالر گویند. ترکیب یک بردار کنتراورینت و یک بردار کوارینت را ضرب اسکالر گویند چرا که در یک تبدیل مختصات دلخواه همانند یک اسکالر رفتار می‌کند.

(۱-٤) تانسورهای کنتراورینت

حاصلضرب مؤلفه‌های دو بردار کنتراورینت V^m و U^n را به صورت زیر در نظر می‌گیریم تعداد جملات عبارت زیر N^2 می‌باشد. (N بعد فضا است)

$$T^{mn} = V^m U^n \qquad (۱-۸)$$

فرض می‌کنیم عبارت بالا در مختصات $\{x^k\}$ نوشته شده باشد. در این صورت با استفاده از رابطه (۱-۱) مقدار این عبارت در مختصات $\{x'^k\}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$T'^{jk} = V'^j U'^k = \frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n} V^m U^n = \frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n} T^{mn} \qquad (۱-۹)$$

کمیتهای T^{mn} و T'^{jk} که به وسیله N^2 کمیت به ترتیب در مختصات $\{x^k\}$ و $\{x'^k\}$ بیان شده‌اند و با معادله (۱-۹) با یکدیگر مرتبط هستند را تانسورهای کنتراورینت مرتبه ۲ گویند. به روش مشابه می‌توان تانسورهای کنتراورینت مراتب بالاتر را نیز تعریف کرد.

(۱-٥) تانسورهای کوارنیت

کمیتهای T_{mn} و T'_{jk} که به وسیله N^2 کمیت به ترتیب در مختصات $\{x^k\}$ و $\{x'^k\}$ بیان شده‌اند و با معادله زیر با یکدیگر مرتبط هستند را تانسورهای کوارینت مرتبه ۲ گویند. به روش مشابه می‌توان تانسورهای کوارینت مراتب بالاتر را نیز تعریف کرد.

$$T'_{jk} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T_{mn} \qquad (۱-۱۰)$$

(۱-٦) تانسورهای آمیخته

کمتیهـای T_{ps}^{mn} و $T_{kl}^{\prime ij}$ کـه بـه وسـیله N^4 کمیـت بـه ترتیـب در مختـصات $\{x^k\}$ و $\{x'^k\}$ بیان شـده‌انـد ایـن کمیتهـا کـه بـه وسیله معادلـه زیـر بـا یکـدیگر مـرتبط هـستند را یـک تانـسور مخلـوط مرتبـه ۴ گوینـد. بـه روش مـشابه مـی‌تـوان تانـسورهای مخلـوط مراتـب بـالاتر را نیـز تعریف کرد.

$$T_{kl}^{\prime ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}\frac{\partial x^s}{\partial x'^l}T_{ps}^{mn} \qquad (۱۱-۱)$$

(۱-۷) تانسور متریک

یک فـضا را متریـک گـوئیم اگـر بتـوانیم بـرای هـر دو نقطـه‌ای کـه در همـسایگی یکـدیگر قـرار دارنـد یـک فاصـله اسـکالر تعریـف کنـیم. بـه عنـوان مثـال فـضای سـه بعـدی اقلیدوسـی یـک فضای متریک است. در ایـن فـضا مجـذور فاصـله بـین دو نقطـه را مـی‌تـوان بـه صـورت مجمـوع مربعات دیفرانسیل مختصه‌ها نوشت. بعنوان مثال می‌توانیم رابطه مقابل را داشته باشیم.

$$ds^2 = \delta_{jk} dy^j \ dy^k \qquad (k, j = 1,2,\ldots,N) \qquad (۱۲-۱)$$

مختصات دلخواه $\{x^k\}$ را به وسیله معادله زیر معرفی می‌کنیم.

$$y^k = y^k\left(x^1, x^2, \ldots, x^N\right) \ \left(k = 1,2,\ldots,N\right) \qquad (۱۳-۱)$$

در این صورت رابطه زیر را خواهیم داشت.

$$dy^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^m} dx^m \qquad \left(k, m = 1,2,\ldots,N\right) \qquad (۱۴-۱)$$

با استفاده از این رابطه ds^2 را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n \quad \left(m, n = 1,2,\ldots,N\right) \qquad (۱۵-۱)$$

که در این رابطه داریم:

$$g_{mn} = \delta_{jk} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \qquad (۱۶-۱)$$

g_{mn} یـک کمیـت متقـارن اسـت. ds یـک اسـکالر اسـت و dx^m یـک بـردار اسـت. بنـابراین با استفاده از تعریـف تانسور و ایـن واقعیـت کـه g_{mn} یـک کمیت متقـارن اسـت مـی‌تـوان نتیجـه گرفـت کـه g_{mn} دقیقـاً یـک تانـسور کوارینـت مرتبـه ۲ اسـت. ایـن تانـسور را تانـسور متریـک گوینـد. عـلاوه بـر تانـسور متریـک کوارینـت g_{mn} همچنـین مـی‌تـوان تانـسور متریـک کنتراورینت g^{mn} را نیز تعریف کرد که g^{mn} معکوس تانسور کوارینت g_{mn} است.

و به شکل زیر با یکدیگر رابطه دارند.

$$g^{mn} = \frac{\Delta^{mn}}{g}$$

در ایـن رابطـه g دترمینـان مـاتریس g_{mn} اسـت و Δ^{mn} کوفـاکتور مولفـه g_{mn} اسـت کـه عبـارت اسـت از کهـاد مولفـه مـذکور کـه در $(-1)^{m+n}$ ضـرب شـده باشـد. همـانطور کـه مـی دانـیم کهـاد مولفـه g_{mn} از یـک دترمینـان مرتبـه N دترمینـانی اسـت از مرتبـه $N-1$ کـه از حـذف ردیـف m ام و سـتون n ام از دترمینـان اولیـه بـاقی مـی مانـد. بـا توجـه بـه توضـیحات بـالا مـی تـوان رابطـه زیـر را بـین تانـسور کوارنیـت متریـک g_{mn} و تانـسور کنتراورنیـت متریـک g^{mn} نوشت.

$$g_{mn} g^{nk} = \delta_m^k$$

بـه وسـیله دوتانـسور g_{mn},g^{kj} مـی تـوان اندیـسهای یـک تانـسور دلخـواه را بـالا و پـایین بـرد. این کار به صورت زیر انجام می شود.

$$T^{mn} = g^{mk} \, T_k^n$$

$$T_{kj} = g_{kn} \, T_j^n$$

(۱-۸) عمل انقباض:

از یک تانسور مخلوط مرتبه n می توان تانسور جدیدی از مرتبه n-2 ساخت. این کار با جمع روی مقادیر یک اندیس بالا و یک اندیس پایین انجام می شود. برای مثال تانسور مخلوط مرتبه چهار $T^{\mu}_{\alpha\upsilon\beta}$ را در نظر می گیریم و کمیت $T_{\alpha\beta}$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T_{\alpha\beta} = T^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$$

تحت تبدیل مختصات رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned}
T'_{\alpha\beta} &= T'^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} T^{\rho}{}_{\gamma\delta\delta} \\
&= \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\delta}_{\rho} T^{\rho}{}_{\gamma\delta\delta} \\
&= \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} T_{\gamma\delta}
\end{aligned}$$

در اینجا $T_{\alpha\beta}$ یک تانسور کوارینت مرتبه دو است. عملی که در بالا شرح داده شد را عمل انقباض گویند. عمل انقباض همواره شامل جمع روی یک اندیس بالا و یک اندیس پایین می شود. جمع روی دو تا اندیس از یک نوع، یک تانسور را نتیجه نمی دهد، اسکار T^{α}_{α} که با عمل انقباض روی تانسور مخلوط مرتبه دو T بدست می آید را رد T^{α}_{β} گویند.

(۱-۹) تقارن تانسورها

یـک خاصـیت مهـم بـرای یـک تانـسور تقـارن یـا عـدم تقـارن آن نـسبت بـه جابجـائی بعـضی از اندیـسها مـی باشـد. اگـر بـا جابجـا کـردن دو انـدیس کوارینـت یـا دو انـدیس کنتراورنیـت (اندیـسهای جابجـا شـونده لزومـا بایـد از یـک نـوع باشـند) تانـسور بـدون تغییـر بـاقی بمانـد، گـوئیم تانـسور مـورد نظـر نـسبت بـه دو انـدیس مـذکور متقـارن اسـت. اگـر تانـسور حاصـل از جابجـا کـردن دو انـدیس تنهـا در علامـتش بـا تانـسور اولیـه متفـاوت باشـد گـوئیم ایـن تانـسور نسبت به دو اندیس مذکور پادمتقارن است.

خواص تقـارنی تانـسورها تحـت تبـدیل مختـصات حفـظ مـی شـود. بـرای مثـال فـرض مـی کنـیم $S_{\alpha\beta}$ یک تانسور متقارن باشد.

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$$

و $A_{\alpha\beta}$ یک تانسور پاد متقارن باشد.

$$A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$$

تانـسورهای $A_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}$ کـه در یـک دسـتگاه مختـصات بـه ترتیـب متقـارن و پادمتقـارن هـستند، در هر دستگاه مختصات دیگری نیز خواص تقارنیشان را حفظ می کنند.

$$S'_{\alpha\beta} = S'_{\beta\alpha} \qquad\qquad A'_{\alpha\beta} = -A'_{\beta\alpha}$$

در اینجـا $A'_{\alpha\beta}, S'_{\alpha\beta}$ بـه ترتیـب مولفـه هـای $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{S}_{\alpha\beta}$ در مختـصات جدیـد مـی باشـند. ایـن خاصیتها را برای تانسورهای کنتراورنیت نیز داریم.

هـر تانـسور کوارنیـت مرتبـه دو $T_{\alpha\beta}$ را مـی تـوان بـه صـورت مجمـوع یـک قـسمت متقـارن $S_{\alpha\beta}$ و یـک قـسمت پادمتقـارن $A_{\alpha\beta}$ نوشـت. تانـسورهای $A_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}$ بـه طـور منحـصر بفـردی به صورت زیر معین می شوند.

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right)$$
$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}\right)$$

تانسورهای متقارن و پادمتقاران $A_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}$ را معمولا به صورت زیر نمایش می دهند.

$$S_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} \qquad\qquad A_{\alpha\beta} = T_{[\beta\alpha]}$$

لازم بـه ذکـر اسـت کـه اگـر فـرض کنـیم $T'_{[\alpha\beta]}, T'_{(\alpha\beta)}$بـه ترتیـب قـسمتهای متقـارن و پادمتقـارن تانـسور تبـدیل یافتـه $T'_{\alpha\beta}$(تانـسور متنـاظر $T_{\alpha\beta}$ در مختـصات جدیـد) باشـند. آنگـاه می توان نشان داد که $T'_{[\alpha\beta]}, T'_{(\alpha\beta)}$ به ترتیب تنها توابعی از $T_{[\alpha\beta]}, T_{(\alpha\beta)}$هستند.

روشـی کـه بـرای سـاختن قـسمتهای متقـارن و پادمتقـارن از یـک تانـسور مرتبـه دو در بـالا شـرح داده شـد را مـی تـوان بـه تانـسورهای مراتـب بـالاتر نیـز تعمـیم داد. بطـوری کـه بـرای یـک تانسور دلخواه $T_{a_1 \dots a_n}$داریم:

$$T_{(a_1 \dots a_n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \quad T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(n)}}$$
$$T_{[a_1 \dots a_n]} = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \quad \delta_\pi \, T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(n)}}$$

در اینجـا جمـع روی همـه جایگـشتهای $1,\dots,n$ اسـت و δ_πبـرای جایگـشتهای زوج ۱+ و برای جایگشتهای فرد ۱- است. بحث بالا برای تانسورهای کنتراورنیت نیز صادق است.

بـا اسـتفاده از نمـایش بـالا مـی تـوان شـرایط متقـارن و پادمتقـارن بـودن یـک تانـسور را بـه صورت زیر نوشت . تانسور $T_{a_1 \dots a_n}$متقارن است اگر:
$$T_{a_1 \dots a_n} = T_{(a_1 \dots a_n)}$$

و پادمتقارن است اگر:

$$T_{a_1 \dots a_n} = T_{[a_1 \dots a_n]}$$

(۱-۱۰) ضرایب کریستوفل

از تانسورمتریک $g_{\mu\nu}$ و معکوسش $g^{\alpha\beta}$، می توانیم دو تابع را به صورت زیر بسازیم:

$$\Gamma_{\alpha\rho\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\delta}}{\partial x^{\alpha}}\right) \qquad (۱۷-۱)$$

و

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\delta} = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\rho\delta} \qquad (۱۸-۱)$$

هر دو تابع بالا نسبت به اندیسهای ρ و δ متقارن هستند. که به ترتیب ضرایب کریستوفل نوع اول و دوم نامیده می‌شوند. با استفاده از تعاریف بالا روابط زیر به راحتی نتیجه می‌شوند.

$$\Gamma^{\alpha}_{\rho\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial g_{\lambda\delta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\delta}}{\partial x^{\lambda}}\right) \qquad (۱۹-۱)$$

و

$$\Gamma_{\alpha\rho\delta} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\delta} \qquad (۲۰-۱)$$

گاهی اوقات ضرایب کریستوفل نوع اول و دوم به ترتیب به صورت $[\alpha و \rho\delta]$ و $\begin{Bmatrix}\mu \\ \rho\delta\end{Bmatrix}$ نمایش داده می‌شوند.

(۱-۱۰-۱) مشتق کوارینت

دیفرانسیل یک تانسور $dT^{\mu\ldots\ldots}_{\nu\ldots\ldots}$ برابر تفاضل تانسورهائیست که در دو نقطه فضا ـ زمانی جدا از هم قرار دارند و فاصله این دو نقطه از یکدیگر بسیار ناچیز است. اما در دو نقطه مختلف انتقال تانسورها از یک دستگاه مختصات به دیگری متفاوت خواهد بود چرا که ضرایب در رابطه انتقال تانسورها (رابطه (۱-۱۱)) توابعی از مختصات هستند.

اجازه دهید V^{μ} و V'^{ν} که به ترتیب مؤلفه‌های یک بردار کنتراورینت در دو سیستم x^{α} و x'^{β} هستند را در نظر بگیریم.

V^{μ} و V'^{ν} به صورت زیر با یکدیگر رابطه دارند.

$$V^{\mu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}V'^{\nu} \qquad (۲۱-۱)$$

با مشتقگیری از معادله بالا نسبت به x^{α} داریم:

$$\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial V'^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}+\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}x'^{\rho}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}V'^{\nu} \qquad (۲۲-۱)$$

جمله اول طرف راست معادله بالا آن چیزیست که انتظار می‌رود در صورت تانسور بودن $\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$ ظاهر شود. این جمله دوم معادله بالا است که رفتار تانسوری مشتق جزئی بردار V^{μ} را از بین می‌برد. تنها اگر مشتق مرتبه دو $\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}x'^{\rho}}$ صفر شود یعنی اگر مختصه x^{μ} تابع خطی از مختصات x'^{β} باشد معادله (۱-۲۲) قانون انتقال یک تانسور را به ما می‌دهد.

از قانون انتقال ضرایب کریستوفل از یک سیستم به سیستم دیگر رابطه زیر را بدست می‌آوریم: