بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده‌ی علوم پایه، گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی‌ارشد (M.Sc.)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

به‌کارگیری روش‌های عددی در حل مدل‌های DEA

استاد راهنما:
دکتر مهدی طلوع

استاد مشاور:
دکتر جلیل رشیدی‌نیا

پژوهشگر:
راحله جلیلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادرم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسبیم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند...

تقدیر و تشکر

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

تقدیر و تشکر شایسته دارم از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر مهدی طلوع، استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و ظلمت اندیشه مرا را نور بخشید آری در مقابل این همه عظمت و شکوه ایشان مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف.

از جناب آقای دکتر جلیل رشیدی نیا کمال امتنان را دارم که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند و راهنمایم بودند.

از جناب آقای دکتر فریبرزی که همواره راهنما و راه گشای نگارنده در به اتمام رساندن این پایان نامه بوده و داوری آن را به عهده داشتند صمیمانه قدردانی می کنم.

نهایت احترام و مراتب قدردانی و تشکر خود را از یکایک دوستانی که در تکمیل این مجموعه مرا یاری رساندند اعلام می دارم.

راحله جلیلی

تابستان ۹۱

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب راحله جلیلی دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی ۸۸۰۶۵۱۰۹۵۰۰ در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی که در تاریخ ۹۱/۰۶/ ۳۰ از پایان نامه خود تحت عنوان : به کارگیری روش های عددی در حل مدل های DEA با کسب نمره هجده و درجه عالی دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :

۱- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام .

۲- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم .

۴- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت .

نام و نام خانوادگی : راحله جلیلی

تاریخ و امضاء :

معاونت پژوهش و فناوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

بایاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خدا است و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضاء هیات علمی واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱- اصل برائت: التزام به برائت جویی از هرگونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلایند.

۲- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

۳- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۴- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۵- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.

۸- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه همکاران پژوهش.

۹- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

بسمه تعالی

در تاریخ ۹۱/۰۶/۳۰ دانشجوی کارشناسی ارشد آقای / خانم راحله جلیلی از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره ۱۸ بحروف هجده و با درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

چکیده

مساله‌ی اساسی در سیستم‌های خطی، پیدا کردن مقدار بردار xای است که در معادله‌ی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ صدق کند. مهمتر این‌که، حل این سیستم خطی در زمینه‌های بسیاری در ریاضیات کاربردی مورد نیاز است. روش تجزیه LU که مبنای آن روش حذفی گاوس است، وقتی مساله بسیار بزرگ و تُنک باشد مفید است و روشی دقیق و از نظر عددی پایدار است (خطای گرد کردن قابل کنترل است و تجمع پیدا نمی‌کند.) برنامه‌ریزی خطی (LP) روشی است جهت یافتن جواب بهینه برای یک سیستم خطی که در دهه‌های اخیر در زمینه‌های مختلف مورد استفاده قرارگرفته است. روش سیمپلکس یکی از پرکاربردترین روش‌های ریاضی است که با هدف حل مسایل برنامه‌ریزی خطی ابداع شده است. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، روشی غیرپارامتری جهت اندازه‌گیری کارایی و بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیری است که یک برنامه‌ریزی خطی است. هم‌چنین در DEA، حداقل به تعداد DMUها باید مساله برنامه‌ریزی خطی حل کنیم.

در این پایان‌نامه سعی بر آن شده تا با استفاده از روش غیرپارامتری DEA و روش‌های نوین عددی در برنامه‌ریزی خطی، حجم محاسباتی را تا حدودی کاهش دهیم. هدف اصلی این پایان‌نامه اجرای روش تجزیه LU روی مدل‌های پایه‌ای DEA است که روشی دقیق و از نظر عددی پایدار است. نشان می‌دهیم که به دلیل ساختار خاص مدل‌های DEA، حجم محاسباتی در به‌کارگیری روش حذفی گاوس به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد.

فهرست مطالب

فصل اول آشنایی با تحلیل پوششی داده‌ها ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ مفاهیم اولیه‌ی تحلیل پوششی داده‌ها ۵

۱-۳ اصول حاکم بر تحلیل پوششی داده‌ها ۸

۱-۳-۱ مجموعه‌ی امکان تولید ۹

۱-۴ مدل‌های پایه‌ای DEA (CCRوBCC) ۱۲

۱-۴-۱ مدل‌های کسری و مضربی CCR ۱۴

۱-۴-۲ مدل پوششی CCR ۱۷
۱-۴-۳ مدل پوششی BCC ۲۰

فصل دوم تجزیه مثلثی (LU) یک ماتریس ۲۴

۲-۱ مقدمه ۲۴
۲-۲ دستگاه معادلات خطی و ماتریس‌ها ۲۵
۲-۳ اعمال سطری مقدماتی ۲۸
۲-۴ حل دستگاه‌های معادلات خطی ۲۸
۲-۵ حل دستگاه معادلات خطی در حالت‌های خاص ۲۹
۲-۶ روش حذفی گاوس ۳۱
۲-۷ تجزیه مستقیم LU ۳۹

فصل سوم روش‌های عددی در حل مدل‌های DEA ۴۰

۳-۱ اصلاح مدل‌های DEA ۴۱
۳-۲ حل مدل‌های DEA ۴۵
۳-۳ تجزیه LU یا فاکتورگیری پایه ۵۶
۳-۳-۱ حل دستگاه b=Ax با استفاده از روش حذفی گاوس . . ۵۷
۳-۴ تجزیه LU ماتریس‌های حاصل در مدل‌های DEA ۵۸

فصل چهارم‌به‌کارگیری تجزیه LU در حل مدل CCR ۶۷

۴-۱ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۷۴

فهرست اشکال

۱-۱ نمونه‌ای از مجموعه T_c شامل دو DMU ۱۸

۱-۲ مقایسه‌ی مجموعه‌های T_c و T_v ۲۰

فهرست جداول

۱-۳ جدول آغازین فاز I روش سیمپلکس ۵۳

۲-۳ جدول نهایی فاز I روش سیمپلکس RHS ۵۳

۳-۳ جدول نهایی فاز I روش سیمپلکس ۵۴

پیشگفتار

مساله‌ی اساسی در سیستم‌های خطی، پیدا کردن مقدار بردار xای است که در معادله‌ی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ صدق کند. مهمتر این‌که، حل این سیستم خطی در زمینه‌های بسیاری در ریاضیات کاربردی مورد نیاز است. روش تجزیه LU که مبنای آن روش حذفی گاوس است، وقتی مساله بسیار بزرگ و تُنک باشد مفید است و روشی دقیق و از نظر عددی پایدار است (خطای گرد کردن قابل کنترل است و تجمع پیدا نمی‌کند.) این نام به‌دلیل استفاده از فاکتورهای مثلثی پایینی و بالایی ماتریس پایه آمده است. تحقیق در عملیات (OR) که از زمان‌های خیلی دور مورد توجه دانشمندان و محققان بوده، فرآیندی است که طی آن با استفاده از مدل‌های ریاضی، نحوه‌ی واگذاری منابع به فعالیت‌های مختلف یک سیستم (با هدف بهینه‌سازی کارایی سیستم و با وجود محدودیت‌های مختلف) تعیین می‌گردد. از جمله شاخه‌های علم OR، شاخه برنامه‌ریزی خطی (LP) است که به علت قابلیت‌های بسیار بالای این مسایل، تحقیقات مؤثر و زیادی بر روی آن انجام گرفته و کاربردهای فراوانی پیدا نموده ست. برنامه‌ریزی خطی روشی است جهت یافتن جواب بهینه برای یک سیستم خطی که در دهه‌های اخیر در زمینه‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. روش سیمپلکس یکی از پرکاربردترین روش‌های ریاضی است که با هدف حل مسایل برنامه‌ریزی خطی ابداع شده است و به دلایل (۱) توانایی مدل‌سازی مسایل مهم و پیچیده مدیریتی (۲) توانمندی حل مسایل در مدت زمانی معقول در برنامه‌ریزی خطی کاربردهای وسیعی یافته است. اگرچه تا کنون چند نوع روش سیمپلکس به‌وجود آمده است و الگوریتم‌های رقیب جدید دیگری نیز پیشنهاد شده است ولی روش سیمپلکس ابزاری مورد قبول و ماندنی در حل مسایل برنامه‌ریزی خطی استمرار یافته است. کاربردهای برنامه‌ریزی

خطی به گونه‌ای بوده که خود شامل چندین زیرشاخه گردیده است. یکی از این زیرشاخه‌ها علم تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است که هدف آن استفاده از روش‌های علمی به منظور ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) است. به بیان بهتر DEA روشی غیرپارامتری جهت اندازه‌گیری کارایی و بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیری است که یک برنامه‌ریزی خطی است و در سال‌های اخیر کاربردهای متفاوتی از آن در اغلب کشورهای جهان برای ارزیابی عملکرد نهادها و دیگر فعالیت‌های رایج در زمینه‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. در DEA، حداقل به تعداد DMUها باید مساله برنامه‌ریزی خطی حل کنیم. با توجه به پیچیدگی مسایل، افزایش حجم داده‌ها، و استفاده وسیع از کامپیوتر در سال‌های اخیر نیاز به ابزارهایی (روش‌هایی) است که بتواند داده‌ها را با سرعت و دقت بالا بررسی کند. با توجه به محدود بودن نرم‌افزارهای DEA در محاسبه‌ی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در داده‌های بسیار بزرگ، به‌کارگیری روش‌های عددی در حل مدل‌های DEA بسیار حایز اهمیت است. از آن‌جاکه روش‌های عددی متعددی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی موجود است، در این پایان‌نامه سعی بر آن شده تا با استفاده از روش غیرپارامتری DEA و روش‌های نوین عددی در برنامه‌ریزی خطی، حجم محاسباتی را تا حدودی کاهش دهیم.

هدف اصلی این پایان‌نامه اجرای روش تجزیه LU روی مدل‌های پایه‌ای DEA است که روشی دقیق و از نظر عددی پایدار است. نشان می‌دهیم که به دلیل ساختار خاص مدل‌های DEA، حجم محاسباتی در به‌کارگیری روش حذفی گاوس به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد. به بیان دیگر روشی را ارایه می‌دهیم که از طریق آن، ماتریس پایه‌ی این مدل‌ها به‌راحتی به ماتریس بالامثلثی تبدیل می‌شود و در مدت زمان کوتاه‌تری نسبت به روش حذفی گاوس به جواب می‌رسد. سپس برای حل دستگاه‌های

معادلات لازم در روش سیمپلکس، عملیات پیش‌رو و پس‌رو را استفاده می‌کنیم. هم‌چنین برای حفظ خاصیت بالامثلثی پایه نیز الگوریتمی ارایه می‌کنیم که حجم عملیات محاسباتی لازم را تا حدودی کاهش خواهد داد و دارای یک‌سری مزایای محاسباتی نیز است. بنابراین، در فصل اول این پایان‌نامه به آشنایی با تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در فصل دوم تجزیه مثلثی (LU) یک ماتریس را داریم. روش‌های عددی در حل مدل‌های DEA که موضوع اصلی می‌باشد، در فصل سوم به آن پرداخته شده است. در انتها در فصل چهارم، به‌کارگیری تجزیه LU در حل مدل CCR را بیان می‌کنیم.

فصل اول

آشنایی با تحلیل پوششی داده‌ها

۱-۱ مقدمه

علم تحقیق در عملیات[1] (OR) از زمان‌های خیلی دور مورد توجه دانشمندان و محققان بوده است اما صاحب‌نظران علم OR بر این عقیده هستند که این علم در خلال جنگ جهانی دوم بنا نهاده

1) Operation Research

شده است. بسیاری از مسایل استراتژیکی و تکنیکی جنگ به حدی پیچیده بودند که یک فرد یا گروه قادر به حل و تجزیه و تحلیل تمام مسایل نبود. در سال ۱۹۴۱ میلادی ارتش انگلستان به‌صورت رسمی تصمیم‌گیری با روش‌های علمی را وارد سیستم برنامه‌ریزی خود نمود اما پس از آن با خاتمه جنگ، دانشمندان به کاربردهای این علم در علوم دیگر پی بردند و توانستند این علم را به فعالیت‌هایی هم‌چون فعالیت‌های اقتصادی، اجتماعی، سیاسی و تمام فعالیت‌هایی که به تصمیم‌گیری ارتباط دارند گسترش دهند.

از جمله شاخه‌های علم تحقیق در عملیات، شاخه برنامه‌ریزی خطی[۲] (LP) است که به علت قابلیت‌های بسیار بالای این مسایل، تحقیقات مؤثر و زیادی بر روی آن انجام گرفته و کاربردهای فراوانی پیدا نموده است.

یکی از مهمترین وظایف مدیران اتخّاذ تصمیم در مواجه با شرایط و عملکرد واحدهای تحت کنترل‌شان است. تجربه نشان داده است که تصمیم‌گیری فردی بدون به‌کار بردن روش‌های علمی مشکلات فراوانی را ایجاد می‌کند. هم‌چنین با درنظرگرفتن این‌که رتبه‌ی هر مدیر با توجه به میزان صحّت تصمیمات اتخّاذ شده‌ی وی معین می‌گردد، اندازه‌گیری کارایی و بهره‌وری واحدهای تحت نظارت یکی از اقدامات ضروری به‌نظر می‌رسد.

کاربردهای برنامه‌ریزی خطی به گونه‌ای بوده که خود شامل چندین زیرشاخه گردیده است. یکی از این زیرشاخه‌ها جهت ارزیابی عملکرد واحدهای متجانس[۳]، تحلیل پوششی داده‌ها [۴] (DEA) است که یک برنامه‌ریزی‌خطی است. به‌طوری‌که هر واحد با دریافت مقدار معینی از ورودی‌های[۵]

2) Linear programming 3) Congruent 4) Data Envelopment Analysis 5) Input

مشابه، مقدار معینی از خروجی‌های[۶] مشابه را تولید می‌نماید. از آن‌جایی‌که مدیران در رابطه‌ی با نحوه‌ی مصرف و ادغام ورودی‌ها و نیز نحوه‌ی تولید خروجی‌ها تصمیم‌گیری می‌کنند آن‌ها را تصمیم‌گیرنده می‌نامند و هم‌چنین واحدی را که با مصرف این ورودی‌ها خروجی‌های مورد نظر را تولید می‌کند واحد تصمیم‌گیری[۷] DMU می‌نامند. لذا یک واحد تصمیم‌گیری عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ بردار خروجی مانند $(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s)$ را تولید می‌نماید. نمونه‌ای از این واحدها بیمارستان‌ها هستند که با دریافت ورودی‌هایی مثل پزشکان، پرستاران، داروها، لوازم بیمارستانی، و ... خروجی‌هایی مانند بیماران بستری و سرپایی خواهند داشت.

ورودی‌ها و خروجی‌های رایج برای هر DMU ویژگی‌های عمومی زیر را دارا هستند:

۱) داده‌های ورودی و خروجی، عددی هستند. با این فرض که داده‌ها برای تمام DMUها مثبت هستند.

۲) ورودی‌ها، خروجی‌ها، و انتخاب DMUها توجه یک تحلیل‌گر یا یک مدیر را به اجزایی که در ارزیابی کارایی نسبی DMUها دخالت دارند منعکس می‌کنند.

۳) مقادیر ورودی کمتر و مقادیر خروجی بزرگ‌تر، نسبت به سایر مولفه‌های ورودی و خروجی ارجح‌ترند و میزان کارایی هر DMU باید این اصل را منعکس کند.

۴) لزومی ندارد واحد اندازه‌گیری ورودی‌ها و خروجی‌ها یکسان باشد. (ممکن است شامل تعداد افراد یا فضای مورد نیاز و یا مقدار پول هزینه شده و غیره باشند.)

هدف در تحلیل پوششی داده‌ها تعیین میزان خوب عمل کردن واحد یا به اصطلاح کارایی[۸] واحد

6) Output 7) Decision Making Unit 8) Efficiency

است. برای به‌دست آوردن میزان کارایی واحد، از تابع تولید[9] استفاده می‌شود که عبارت است از تابعی که برای هر ترکیب از ورودی‌ها ماکزیمم خروجی را بدهد. در اغلب موارد تابع تولید به‌دلیل پیچیدگی فرایند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقداره بودن تابع تولید در دست نیست. از این رو ناچاریم تقریبی از تابع تولید را با یکی از روش‌های زیر به‌دست آوریم.

۱) روش‌های پارامتری[10]

۲) روش‌های ناپارامتری[11]

در **روش پارامتری** که اصطلاحاً به روش برازش منحنی[12] معروف است شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند. استفاده از این روش کاربر را با دو مشکل اساسی مواجه می‌کند. که عبارتند از:

۱) این روش فقط برای واحدهایی کاربرد دارد که با مصرف چندین ورودی، فقط یک خروجی تولید می‌کنند. این امر موجب محدودیت در استفاده از این روش خواهد بود.

۲) توابع مختلفی جهت محاسبه‌ی پارامترهای تابع، ارایه می‌شوند. روشی جهت انتخاب بهترین تابع برای کاربر موجود نیست.

در سال ۱۹۵۷ فارل[13] جهت رفع این مشکلات طی مقاله‌ای **روش‌های ناپارامتری** را جهت تعیین کارایی مطرح کرد. این مقاله اساس مقاله‌ی چارنز[14]، کوپر[15]، و رودز[16] در سال ۱۹۷۸، قرارگرفت که به مقاله CCR شهرت یافته است. پس از آن بنکر[17]، چارنز، و کوپر در سال ۱۹۸۴، مدل BCC را

9) Production Function 10) Parametric Method 11) Nonparametric Method
12) Curve Fitting 13) Farrell 14) Charnes 15) Cooper 16) Rhdes 17) Banker