[section] 0.0

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (شاخه‌ی جبر)

عنوان

گرنشتاین انژکتیو بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی خاص

تدوین

امیر حسن‌پور

استاد راهنما

دکتر حسین ذاکری

اسفند ۱۳۹۰

چکیده

فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و نوتری گرنشتاین از بعد $d \leq ۲$ است، نشان می‌دهیم برای‌هر ایده‌آل ناصفر $\mathfrak{a}$ از R، $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(R)$ گرنشتاین انژکتیو است. هم‌چنین، ثابت می‌کنیم که اگر R یک حلقه گرنشتاین باشد، دراین‌صورت برای‌هر $R-$مدول M، مدول کوهمولوژی موضعی آن را می‌توان با استفاده از تحلیل گرنشتاین انژکتیو M محاسبه نمود.

در ادامه، ثابت خواهیم کرد که شرط بعد نابیشتر از ۲ در نتیجه بالا ضروری است، ولی درصورتی‌که حلقهٔ R یک ابر رویهٔ موضعی کامل باشد، می‌توان از شرط مذکور در بعد چشم‌پوشی کرد.

واژه‌های کلیدی: کوهمولوژی موضعی، مدول‌های گرنشتاین انژکتیو، کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته، حلقه گرنشتاین.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۱۰): $13D05$، $13D45$.

مقدمه

به عنوان یک ابزار توانمند در مطالعه حلقه‌های موضعی می‌توان به مدول‌های کوهمولوژی موضعی اشاره کرد که خود موجب پیدایش یک شاخه از جبر همولوژی شده است. Grothendieck و Hartshorn را می‌توان از اولین کسانی دانست که مفهوم کوهمولوژی موضعی را از علم فیزیک به زبان جبر (هندسه جبری) به صورت مدرن بررسی کردند. بالاخره در سال ۱۹۶۹ مدول‌های کوهمولوژی موضعی توسط شارپ از هندسه جبری به جبر جابه‌جایی برگردانده شد.

مفهوم گرنشتاین انژکتیو به عنوان تعمیمی از مدول‌های انژکتیو، توسط Enochs و Jenda در سال ۱۹۹۳ معرفی گردید. در این مورد اخیرا مقالات زیادی منتشر شده است. در این پایان‌نامه به ارتباط بین مفاهیم کوهمولوژی موضعی و گرنشتاین انژکتیو می‌پردازیم.

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم اولیه جهت استفاده در فصل‌های بعدی است. این فصل شامل پنج بخش، مقدماتی از جبر جابه‌جایی و همولوژی، حد مستقیم و حد معکوس و کمال، رشته‌های منظم و حلقه‌های کوهن—مکالی و گرنشتاین، مقدماتی از کوهمولوژی موضعی، مدول‌های گرنشتاین انژکتیو و گرنشتاین تصویری و گرنشتاین یکدست است.

در فصل دوم نشان می‌دهیم برای یک حلقه موضعی گرنشتاین $(R,\mathfrak{m})$ از بعد $d \leq ۲$ و ایده‌آل غیر صفر $\mathfrak{a}$ از R، مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{a}}(R)$ یک مدول گرنشتاین انژکتیو است و همچنین ثابت می‌کنیم که اگر $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی گرنشتاین از بعد دلخواه d و M یک $R-$مدول گرنشتاین تصویری با تولید متناهی باشد، آنگاه $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M)$ گرنشتاین انژکتیو است.

در فصل سوم نشان می‌دهیم که برای‌هر $R-$مدول M، مدول‌های کوهمولوژی موضعی M نسبت به

ایده‌آل $\mathfrak{a}$ را می‌توان از طریق تحلیل گرنشتاین انژکتیو M محاسبه کرد.

در فصل چهارم نشان می‌دهیم که اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی کوهن–مکالی کامل باشد، آنگاه R گرنشتاین است اگر و تنها اگر هر R–مدول قویا هم‌تاب یک مدول گرنشتاین انژکتیو باشد و برعکس هر R–مدول گرنشتاین انژکتیو، قویا هم‌تاب است.

در فصل پنجم که قسمت مهمی از پایان‌نامه را در بر می‌گیرد، برای ایده‌آل‌های I و J از حلقه R حلقهٔ $R(I, J)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R(I, J) = \frac{R}{\bigcap\limits_{\mathfrak{p}_i \notin W(I,J)} \mathfrak{q}_i}.$$

و نشان می‌دهیم که اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی گرنشتاین و کامل از بعد d و J یک ایده‌آل از R باشد، دراین‌صورت $\mathrm{H}^d_J(R)$ یک R–مدول گرنشتاین انژکتیو است اگر و تنها اگر $R(\mathfrak{m}, J)$ یک حلقه تقریبا کوهن–مکالی باشد. نیز ثابت می‌کنیم که اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک ابر رویه موضعی کامل از بعد d باشد، دراین‌صورت بازای‌هر ایده‌آل J از R، $\mathrm{H}^d_J(R)$ یک R–مدول گرنشتاین انژکتیو است. در آخر یک مثال از مدولی می‌آوریم که گرنشتاین انژکتیو است، در صورتی‌که انژکتیو نیست و نیز مثالی از یک حلقه موضعی گرنشتاین مانند R با بعد $d > ۲$ و ایده‌آل J از R می‌آوریم که $\mathrm{H}^d_J(R)$، R–مدول گرنشتاین انژکتیو نیست.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌های

[1] R. Sazeedeh, Gorenstein injective modules and local cohomology, *Proc. Amer. Math. Soc.* 132, no. 10(2004), 2885-2891.

و

[2] T. Yoshizawa, On Gorenstein injectivity of top local cohomology modules, *Proc. Amer. Soc.* S 0002-9939(2011) 11059-1.

تدوین شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در سراسر این پایان‌نامه R نشان دهنده حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است. از فصل دوم شرط نوتری بودن را نیز به حلقه R اضافه می‌کنیم. نمادهای $\mathrm{Spec}(R)$، $\mathrm{Max}(R)$، $\mathrm{Min}(R)$ و $\mathrm{Min}(M)$ به ترتیب نشان‌دهنده مجموعه ایده‌آل‌های اول، ایده‌آل‌های ماکسیمال، ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه R و ایده‌آل‌های اول مینیمال متعلق به محمل M هستند.

۱.۱ مقدماتی از جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی

۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم M یک $R-$مدول است. دراین‌صورت محمل M را با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Supp}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ : \ M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

۲.۱ **لم .** [22, 15.9]. فرض کنیم M یک $R-$مدول است. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) $M = 0$.

۲) برای‌هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $M_{\mathfrak{p}} = 0$ و به عبارت معادل $\mathrm{Supp}_R(M) = \varnothing$.

۳) برای‌هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

۳.۱ تعریف. فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از حلقه R است. دراین‌صورت

$$\mathrm{V}(I) := \{\mathfrak{p} \ : \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ , \ I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

را واریته I می‌نامیم.

۴.۱ لم . [22, 20.9]. فرض کنیم M یک $R-$مدول باتولید متناهی است. دراین‌صورت

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ : \ \mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}\} = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}(M)).$$

اگر M باتولید متناهی نباشد آنگاه $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}(M))$.

۵.۱ تعریف. فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه R است. دراین‌صورت I را یک ایده‌آل اولیه از R می‌نامیم هرگاه

۱) I یک ایده‌آل سره از R باشد.

۲) به‌ازای‌هر $x,y \in R$ اگر $x,y \in I$ و $x \notin I$ آنگاه $n \in \mathbb{N}$ی وجود داشته باشد که $y^n \in I$.

۶.۱ لم . فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقه R و $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) به‌ازای jای که $1 \leq j \leq n$، $I_j \subseteq \mathfrak{p}$.

۲) $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۳) $\prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۷.۱ تعریف. فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از حلقه R است. در این‌صورت I را تجزیه‌پذیر می‌نامیم هرگاه، ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_i-$ اولیه‌ای مانند $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ موجود باشند که

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i.$$

این تجزیه را مینیمال می‌نامیم هرگاه

۱) برای‌هر $1 \leq i < j \leq n$، $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$.

۲) برای‌هر $j = 1, 2, \ldots, n$، $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i \not\subseteq \mathfrak{q}_j$.

مجموعه ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}_i$ها را که مستقل از تجزیه هستند با نماد $\mathrm{ass}_R(I)$ نشان می‌دهیم و آن را مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به I می‌نامیم.

۸.۱ لم . [22, 35.4]. فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از حلقه نوتری R است. دراین‌صورت I تجزیه‌پذیر است.

۹.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول است. دراین‌صورت ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول وابسته به M می‌نامیم هرگاه $m \in M$ی موجود باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m) = (0 : m)$.
مجموعه این نوع ایده‌آل‌ها را با نماد $\mathrm{Ass}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

۱۰.۱ لم . [15, 6.3]. فرض کنیم $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ یک رشته دقیق از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها است. در این‌صورت

$$\mathrm{Ass}(L) \subseteq \mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(L) \cup \mathrm{Ass}(M).$$

۱۱.۱ قضیه. [15, 5.5]. فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول باتولید متناهی است. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱) $\mathrm{Ass}(M)$ مجموعه‌ای متناهی است.

۲) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

۳) $\mathrm{MinAss}(M) = \mathrm{MinSupp}(M)$.

۱۲.۱ لم . [22, 38.9]. فرض کنیم R حلقه نوتری و M یک $R-$مدول و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است. دراین‌صورت

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \ : \ \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \ , \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)\}.$$

۱۳.۱ لم . [22, 21.8]. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه R باشد به قسمی که $\sqrt{I}$ باتولید متناهی است. دراین‌صورت $n \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که $(\sqrt{I})^n \subseteq I$.

۱۴.۱ لم . [22, 19.9]. فرض کنیم $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ یک رشته دقیق از R−مدول‌ها و R−همریختی‌ها است. دراین‌صورت

$$\mathrm{Supp}(N) = \mathrm{Supp}(L) \cup \mathrm{Supp}(M).$$

۱۵.۱ تذکر. [22, 23.4]. فرض کنیم I ایده‌آلی سره از حلقه جابه‌جایی R و J ایده‌آلی از R است که $I \subseteq J$ دراین‌صورت J یک ایده‌آل تجزیه‌پذیر از R است اگر و تنها اگر $\frac{J}{I}$ یک ایده‌آل تجزیه‌پذیر از $\frac{R}{I}$ باشد. بعلاوه، دراین حالت

$$\mathrm{ass}_{\frac{R}{I}}(\frac{J}{I}) = \{\frac{\mathfrak{p}}{I} \ : \ \mathfrak{p} \in \mathrm{ass}_R(J)\}$$

۱۶.۱ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R است. اگر $I \subseteq \mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول مینیمال I باشد، آنگاه

$$\sqrt{IR_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}.$$

برهان. داریم $\sqrt{IR_{\mathfrak{p}}} = \bigcap_{IR_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})} \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$. فرض کنیم $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$ و $IR_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$. در نتیجه $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ و $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ و $I \subseteq \mathfrak{q}$. لذا خواهیم داشت $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. بنابراین $\sqrt{IR_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. □

۱۷.۱ لم . [1, 4.7]. فرض کنیم R یک حلقه نوتری است. دراین‌صورت

$$Z(R) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(0)} \mathfrak{p}$$

که در آن $Z(R)$ مجموعه مقسوم علیه‌های صفر حلقه R است.

۱۸.۱ تعریف. فرض کنیم S یک R−مدول است. گوییم S ثانویه است، هرگاه $S \neq 0$ و به ازای‌هر $r \in R$، $rS = S$ و یا $n \in \mathbb{N}$ی موجود باشد به‌طوری‌که $r^nS = 0$. براحتی می‌توان دید که $\mathfrak{p} = \sqrt{(0 :_R S)}$ یک ایده‌آل اول R است. با این شرایط گوییم S یک R−مدول $\mathfrak{p}$−ثانویه است.

۱۹.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول است. اگر بتوان M را به صورت حاصلجمع تعدادی متناهی از زیرمدول‌های ثانویه‌اش نوشت، آنگاه گوییم که M یک نمایش ثانویه دارد.

فرض کنیم $M = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ یک نمایش ثانویه از M باشد که در آن به ازای‌هر $1 \leq i \leq n$، S_i، $\mathfrak{p}_i$–ثانویه است. این نمایش را مینیمال نامیم هرگاه

۱) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$، n ایده‌آل اول متمایز R باشند و

۲) بازای‌هر $j = 1, 2, \ldots, n$، $S_j \not\subseteq \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq j} S_i$.

گوییم M نمایش‌پذیر است، هرگاه M دارای یک نمایش ثانویه باشد.

۲۰.۱ قضیه. [اولین قضیه یکتایی ,13]. فرض کنیم M یک R–مدول نمایش‌پذیر باشد و $M = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ و $M = S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_{n'}$ که بازای‌هر $1 \leq i \leq n$ و بازای‌هر $1 \leq j \leq n'$، S_i، $\mathfrak{p}_i$–ثانویه و S'_i، $\mathfrak{p}'_i$–ثانویه است، دو نمایش ثانویه مینیمال M باشد. دراین‌صورت $n = n'$ و $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\} = \{\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_n\}$.

۲۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول نمایش‌پذیر است و $M = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ که بازای‌هر $1 \leq i \leq n$، S_i، $\mathfrak{p}_i$–ثانویه است، یک نمایش ثانویه مینیمال M باشد. دراین‌صورت مجموعه $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ را مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول چسبیده M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Att}M$ یا $\mathrm{Att}_R M$ نشان می‌دهیم.

۲۲.۱ قضیه. [15, 6.10]. فرض کنیم $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق از مدول‌های نمایش‌پذیر است. در این‌صورت

$$\mathrm{Att}M'' \subseteq \mathrm{Att}M \subseteq \mathrm{Att}M' \cup \mathrm{Att}M''.$$

۲۳.۱ قضیه. [15, 6.11]. هر مدول آرتینی، نمایش‌پذیر است.

۲۴.۱ قضیه. [2, 7.2.10]. فرض کنیم E یک $R-$مدول انژکتیو است. دراین‌صورت E نمایش‌پذیر است و $\mathrm{Att}_R E \subseteq \mathrm{Ass} R$.

۲۵.۱ قضیه. [13, 2.4]. خارج‌قسمت هر مدول نمایش‌پذیر، نمایش‌پذیر است.

۲۶.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$مدول است. $R-$مدول N را توسیع اساسی از M می‌نامیم، هرگاه M یک زیرمدول از N باشد و برای‌هر زیرمدول ناصفر از N مانند K، $K \cap M \neq 0$. یک توسیع اساسی انژکتیو از M را یک پوشش انژکتیو M می‌نامیم. ثابت می‌شود که با تقریب یکریختی پوشش انژکتیو از M منحصربه‌فرد است. یک پوشش انژکتیو از M را با نماد $E_R(M)$ نشان می‌دهیم.

۲۷.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$مدول است. دراین‌صورت M را متلاشی نشدنی می‌نامیم هرگاه M ناصفر باشد و نتوان M را به صورت جمع مستقیمی از دو زیرمدول سره‌اش نوشت.

۲۸.۱ لم . [15, 18.4]. فرض کنیم R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R است. دراین‌صورت

۱) $E(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ یک $R-$مدول انژکتیو و متلاشی نشدنی است.

۲) برای‌هر $R-$مدول انژکتیو و متلاشی نشدنی مانند N، ایده‌آلی اول و منحصربه‌فرد مانند $\mathfrak{q}$ موجود است به‌طوری‌که $N = E(\frac{R}{\mathfrak{q}})$.

۲۹.۱ قضیه. [15, 18.5]. فرض کنیم R یک حلقه نوتری است. دراین‌صورت

۱) هر $R-$مدول انژکتیو، جمع مستقیمی از $R-$مدول‌های انژکتیو و متلاشی نشدنی است.

۲) جمع مستقیم مذکور در (۱) یکتاست. یعنی اگر $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ و $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ دو جمع مستقیم از $R-$مدول‌های انژکتیو متلاشی نشدنی باشد، آنگاه تناظر یک‌به‌یکی مانند $\sigma : I \longrightarrow J$ موجود است که بازای‌هر $i \in I$، $M_i \cong M_{\sigma(i)}$.

فرض کنیم $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ یک جمع‌مستقیم از $R-$مدول‌های انژکتیو متلاشی نشدنی باشد. بازای‌هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، کاردینال مجموعهٔ

$$\Lambda = \{i \in I \ : \ M_i \cong E_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})\}$$

را با علامت $\mu(\mathfrak{p}, M)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین قرار می‌دهیم $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i = E_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})^{\mu(\mathfrak{p},M)}$.

۳۰.۱ **نتیجه.** فرض کنیم R یک حلقه نوتری و E یک $R-$مدول انژکتیو است. دراین‌صورت

$$E = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)} E_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})^{\mu(\mathfrak{p},E)}.$$

۳۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم M یک $R-$مدول و I ایده‌آلی از R است. دراین‌صورت

۱) $\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid$ زنجیری اکید از ایده‌آل‌های اول به طول n مختوم به $\mathfrak{p}$ موجود است $\}$.

۲) برای‌هر $R-$مدول M، بعد کرول M را با علامت $\dim_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$\dim_R(M) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid$ زنجیری اکید به طول n از عناصر محمل M موجود است $\}$.

اگر سوپریمم فوق موجود نباشد بنابر قرار داد می‌نویسیم $\dim_R(M) = +\infty$. بویژه

$$\dim(R) := \sup\{\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

۳) برای ایده‌آل سره I از حلقه R، ارتفاع I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{ht}_R(I) := \inf\{\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} \mid I \subseteq \mathfrak{p} \ , \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

۳۲.۱ **قضیه.** [22, 4.15] (تعمیم قضیه ایده‌آل اصلی کرول). فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری و I ایده‌آلی سره از R است که توسط n عضو تولید می‌شود. دراین‌صورت بازای‌هر ایده‌آل اول مینیمال I چون $\mathfrak{p}$، $\mathrm{ht}\mathfrak{p} \leq n$.

۳۳.۱ **لم .** فرض کنیم M یک $R-$مدول با تولید متناهی است. دراین‌صورت

$$\dim_R M = \dim(\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}).$$

برهان. فرض کنیم $\dim_R M = n$. دراین‌صورت زنجیری مانند $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ موجود است که $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M)$. چون M با تولید متناهی است، پس $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}(M))$. در نتیجه

$$\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathrm{Ann}(M)} \subset \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathrm{Ann}(M)} \subset \cdots \subset \frac{\mathfrak{p}_n}{\mathrm{Ann}(M)}$$

یک زنجیر از ایده‌آل‌های اول حلقه $\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}$ است. لذا $n \geq \dim(\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)})$.

به روش مشابه، $\dim(\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}) \leq \dim M$. لذا حکم برقرار است. □

۳۴.۱ لم . [22, 29.15]. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغیرهای مستقل باشند. دراین‌صورت $R[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$ یعنی حلقه سری‌های توانی با ضرایب در R نیز حلقه‌ای موضعی است و $\dim R[[x_1, x_2, \ldots, x_n]] = \dim R + n$.

۳۵.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد. بعد انژکتیو M را با نماد $\mathrm{id}_R(M)$ نشان می‌دهیم. گوییم $\mathrm{id}_R(M) \leq n$ هرگاه یک تحلیل انژکتیو متناهی مانند

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

برای M موجود باشد. دراین‌صورت طول کوتاهترین تحلیل انژکتیو برای M را بعد انژکتیو M در نظر می‌گیریم.

اگر هیچ تحلیل انژکتیو متناهی برای M موجود نباشد، می‌نویسیم $\mathrm{id}_R(M) = \infty$.

توجه شود که R–مدول M انژکتیو است اگر و تنها اگر $\mathrm{id}_R(M) = 0$.

تذکر: به روش مشابه بعدهای تصویری و یکدست M به ترتیب با در نظر گرفتن تحلیل‌های تصویری و یکدست تعریف می‌شود. بعد تصویری M را با علامت $\mathrm{pd}_R(M)$ و بعد یکدست M را با علامت $\mathrm{fd}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

۳۶.۱ لم . فرض کنیم M یک R–مدول و $E_R(M)$ یک پوشش انژکتیو از M است. دراین‌صورت

$$\mathrm{Ass}_R(E_R(M)) = \mathrm{Ass}_R(M).$$

برهان. چون $M \subseteq E_R(M)$، پس $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(E_R(M))$. حال فرض می‌کنیم $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(E_R(M))$. دراین‌صورت $0 \neq e \in E_R(M)$ وجود دارد که $\mathfrak{p} = (0 :_R e)$. چون $E_R(M)$ توسیع اساسی M است و $0 \neq e \in E_R(M)$، پس $r \in R$ی موجود است که $0 \neq re \in M$. حال ادعا می‌کنیم $\mathfrak{p} = (0 :_R re)$. واضح است که $\mathfrak{p} = (0 :_R e) \subseteq (0 :_R re)$. فرض می‌کنیم $y \in (0 :_R re)$. دراین‌صورت

$yre=\circ$. در نتیجه $yr\in\mathfrak{p}$. اما چون $re\neq\circ$. لذا $r\notin\mathfrak{p}$. بنابراین $y\in\mathfrak{p}$. در نتیجه $\mathfrak{p}=(\circ:_R re)$.
چون $re\in M$، بنابراین $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R(M)$ و این برهان را کامل می‌کند. $\square$

۳۷.۱ لم . فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R–مدول است به‌طوری‌که $\mathrm{Hom}_R(M,E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))=\circ$. دراین‌صورت $M=\circ$.

برهان. فرض کنیم $M\neq\circ$. فرض کنیم $x\in M$ ناصفر باشد. دراین‌صورت $(\circ:_R x)$ یک ایده‌آل سره از R است. فرض کنیم $\theta: Rx\longrightarrow\frac{R}{(\circ:_R x)}$ یکریختی طبیعی، $\phi:\frac{R}{(\circ:x)}\longrightarrow\frac{R}{\mathfrak{m}}$ همریختی طبیعی و $\alpha:\frac{R}{\mathfrak{m}}\longrightarrow E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$ همریختی شمول باشد. دراین‌صورت $\alpha\phi\theta: Rx\longrightarrow E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$ یک همریختی ناصفر است. چون $E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$ انژکتیو است، پس $\alpha\phi\theta$ را می‌توان به یک همریختی ناصفر از M به $E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$ توسیع داد که این یک تناقض است. لذا $M=\circ$. $\square$

۳۸.۱ تذکر. [2, 10.2.2]. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R–مدول است. دراین‌صورت تحت تکریختی طبیعی، R–مدول M را می‌توان زیرمدولی از R–مدول $M^{\vee\vee}$ در نظر گرفت. که در آن $(-)^{\vee}=\mathrm{Hom}_R(-,E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))$.

۳۹.۱ لم . [2, 10.1.15]. فرض کنیم M یک R–مدول است که توسط ایده‌آل I پوچ می‌شود. دراین‌صورت $(\circ:_{E_R(M)} I)\cong E_{\frac{R}{I}}(M)$ که در آن یکریختی به عنوان $\frac{R}{I}$–مدولی است.

۴۰.۱ گزاره. برای R–مدول‌های M و N و بازای‌هر $i\geq\circ$ یکریختی زیر برقرار است

$$\mathrm{Ext}^i_R(N,\mathrm{Hom}_R(M,E(\frac{R}{\mathfrak{m}})))\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}^R_i(N,M),E(\frac{R}{\mathfrak{m}})).$$

برهان. فرض می‌کنیم $\cdots \longrightarrow \mathfrak{p}_{i+1} \longrightarrow \mathfrak{p}_i \longrightarrow \mathfrak{p}_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{p}_1 \longrightarrow \mathfrak{p}_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک تحلیل تصویری برای N است. دراین‌صورت برای‌هر $i \geq 0$، داریم

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^i_R(N, \operatorname{Hom}_R(M, E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))) &= \operatorname{H}(\operatorname{Hom}_R(\mathfrak{p}_{i-1}, \operatorname{Hom}_R(M, E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\mathfrak{p}_i, \operatorname{Hom}_R(M, E(\frac{R}{\mathfrak{m}})))\\
&\quad \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\mathfrak{p}_{i+1}, \operatorname{Hom}_R(M, E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))))\\
&\cong \operatorname{H}(\operatorname{Hom}_R(\mathfrak{p}_{i-1} \otimes_R M, E(\frac{R}{\mathfrak{m}})) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\mathfrak{p}_i \otimes_R M, E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))\\
&\quad \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\mathfrak{p}_{i+1} \otimes_R M, E(\frac{R}{\mathfrak{m}})))\\
&\cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{H}(\mathfrak{p}_{i+1} \otimes_R M \longrightarrow \mathfrak{p}_i \otimes_R M \longrightarrow \mathfrak{p}_{i-1} \otimes_R M), E(\frac{R}{\mathfrak{m}}))\\
&\cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Tor}^R_i(N, M), E(\frac{R}{\mathfrak{m}})).
\end{aligned}$$

$\square$

۴۱.۱ گزاره. [2, 10.2.16]. فرض کنیم M، N و L، R–مدول هستند.

۱) R–همریختی یکتای

$$\zeta_{M,N,L} : M \otimes_R \operatorname{Hom}_R(N, L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, N), L)$$

موجود است به طوری که بازای‌هر $m \in M$، $f \in \operatorname{Hom}_R(N, L)$ و $g \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$، داریم $(\xi_{M,N,L}(m \otimes f))(g) = f(g(m))$.

علاوه براین

$$\zeta_{\cdot,\cdot,\cdot} : (\cdot) \otimes_R \operatorname{Hom}_R(\cdot, \cdot) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(\cdot, \cdot), \cdot)$$

یک تبدیل طبیعی از تابعگون‌ها از $\mathfrak{C}(R) \times \mathfrak{C}(R) \times \mathfrak{C}(R)$ به $\mathfrak{C}(R)$ است.

۲) اگر L یک R–مدول انژکتیو باشد، دراین‌صورت $\xi_{M,N,L}$ بازای‌هر R–مدول M باتولید متناهی، یکریختی است.

۴۲.۱ گزاره. فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M یک R–مدول با تولید متناهی و E یک R–مدول انژکتیو و L یک R–مدول دلخواه است. دراین‌صورت

$$\operatorname{Tor}^R_i(M, \operatorname{Hom}_R(L, E)) \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}^i_R(M, L), E) \quad , \quad \forall i \geq 0.$$

برهان. از اینکه M باتولید متناهی و R نوتری است، لذا می‌توان تحلیل تصویری مانند $\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$ برای M چنان ساخت که در آن تمامی F_iها باتولید متناهی است. داریم،

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_i^R(M, \operatorname{Hom}_R(L,E)) &= \operatorname{H}(F_{i+1} \otimes_R \operatorname{Hom}_R(L,E) \longrightarrow F_i \otimes_R \operatorname{Hom}_R(L,E) \longrightarrow F_{i-1} \otimes_R \operatorname{Hom}_R(L,E)) \\
&\overset{41.1}{\cong} \operatorname{H}(\operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(F_{i+1}, L), E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(F_i, L), E) \\
&\quad \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(F_{i-1}, L), E)) \\
&\cong \operatorname{Hom}(\operatorname{H}(\operatorname{Hom}_R(F_{i-1}, L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(F_i, L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(F_{i+1}, L)), E) \\
&= \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}_R^i(M, L), E).
\end{aligned}$$

□

۴۳.۱ قضیه. [17, 3.56]. هر R−مدول با نمایش متناهی، یکدست است اگر و تنها اگر تصویری است.

۴۴.۱ قضیه. [15, 2.5]. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R−مدول تصویری است. دراین‌صورت M، R−مدول آزاد است.

۴۵.۱ قضیه. [17, 4.85]. فرض کنیم $A \longrightarrow R$ یک همریختی حلقه‌ای و N یک R−مدول با نمایش متناهی است. دراین‌صورت برای‌هر R−مدول M، یکریختی طبیعی

$$\theta : \operatorname{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(N \otimes_R A, M)$$

موجود است به‌طوری‌که بازای‌هر $f \in \operatorname{Hom}_R(N, M)$، $\theta(f) = \tilde{f}$ و بازای‌هر $n \in \mathbb{N}$، $\tilde{f}(n \otimes 1) = f(n)$.

۴۶.۱ لم . [2, 6.1.8]. فرض کنیم $T : \mathfrak{C}(R) \longrightarrow \mathfrak{C}(R)$ یک تابعگون همورد R−خطی و دقیق راست است. که در آن $\mathfrak{C}(R)$ رسته R−مدول‌هاست. برای‌هر R−مدول M و هر $g \in M$، فرض کنیم $\mu_{g,M} : R \longrightarrow M$، R−همریختی تعریف شده با ضابطه $\mu_{g,M}(r) = rg$ باشد. دراین‌صورت یک تبدیل طبیعی از تابعگون‌ها مانند $\theta : (-) \otimes_R T(R) \longrightarrow T$ موجود است به‌طوری‌که برای‌هر R−مدول M و هر $g \in M$، $z \in T(R)$ داریم

$$\theta_M(g \otimes z) = T(\mu_{g,M})(z).$$

هم‌چنین، هرگاه F یک R−مدول آزاد باتولید متناهی باشد، θ_F یک یکریختی است. بعلاوه، وقتی M یک

$R-$مدول باتولید متناهی باشد، θ_M نیز یکریختی است.

۲.۱ حد مستقیم، حد معکوس و کمال

۴۷.۱ تعریف. مجموعه مرتب جزئی Λ را جهت‌دار می‌نامیم هرگاه برای‌هر $\lambda, \mu \in \Lambda$ عنصری مانند $\nu \in \Lambda$ موجود باشد به‌طوری‌که $\lambda \leq \nu$ و $\mu \leq \nu$.

۴۸.۱ تعریف. (دستگاه مستقیم). فرض کنیم Λ مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و برای‌هر $\lambda \in \Lambda$، M_λ یک $R-$مدول باشد و هم‌چنین برای‌هر $\mu \in \Lambda$ که $\lambda \leq \mu$، نگاشتی مانند $f_{\lambda\mu} : M_\lambda \longrightarrow M_\mu$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند.

۱) $f_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_M$.

۲) برای $\lambda \leq \mu \leq \nu$، $f_{\mu\nu} \circ f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}$.

آنگاه خانواده $\{M_\lambda \ : \ f_{\lambda\mu}\}$ را یک دستگاه مستقیم می‌نامیم.

۴۹.۱ تعریف. (حد مستقیم). فرض کنیم $\{M_\lambda \ : \ f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ یک دستگاه مستقیم است. در این‌صورت مدول M_∞ را حد مستقیم این دستگاه می‌نامیم، اگر گزاره‌های زیر برقرار باشند.

۱) برای‌هر $\alpha \in \Lambda$ نگاشتی مانند $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M_\infty$ موجود باشد که برای‌هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ با شرط $\alpha \leq \beta$، داشته باشیم $f_\beta \circ f_{\alpha\beta} = f_\alpha$.

۲) برای‌هر $R-$مدول Y و هر خانواده از نگاشت‌ها مانند $\{\Psi_\alpha : M_\alpha \longrightarrow Y\}$ صادق در شرط $\Psi_\beta \circ \Psi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha$، برای‌هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ با شرط $\alpha \leq \beta$، نگاشتی یکتا مانند $\omega : M_\infty \longrightarrow Y$ موجود باشد که برای‌هر $\alpha \in \Lambda$ داشته باشیم $\omega \circ f_\alpha = \Psi_\alpha$.

۵۰.۱ قضیه. [17, 2.16]. حد مستقیم یک دستگاه از مدول‌ها موجود و با تقریب یکریختی یکتاست.

توجه: حد مستقیم دستگاه مانند $\{M_\lambda \ : \ f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها را با نماد $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ نشان می‌دهیم.

۵۱.۱ **قضیه.** [17, 2.18]. حد مستقیم، یک تابعگون جمعی، همورد و دقیق از رسته دستگاه‌های مستقیم از مدول‌ها به رسته مدول‌ها است.

۵۲.۱ **گزاره.** فرض کنیم M یک R–مدول است. خانواده تمام R–زیرمدول‌های باتولید متناهی M را با $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ نشان می‌دهیم. دراین‌صورت $M = \varinjlim_{\alpha\in I} M_\alpha$.

برهان. فرض کنیم I مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی از M است. I با نسبت $\subseteq$ یک مجموعه جهت‌دار است. به‌ازای‌هر $\alpha\in I$، R–زیرمدولی از M که α مولد آن است را با M_α نشان می‌دهیم. بازای‌هر $\alpha,\beta\in I$ اگر $\alpha\leq\beta$، آنگاه همریختی شمول $M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ را با علامت $\mu_{\alpha\beta}$ نشان می‌دهیم. اکنون $\{M_\alpha \ : \ \mu_{\alpha\beta}\}_I$ یک دستگاه مستقیم است.

نشان می‌دهیم $M = \varinjlim_{\alpha\in I} M_\alpha$. فرض کنیم به ازای‌هر $\alpha\in I$، $\mu_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ همریختی شمول است. دراین‌صورت بازای‌هر $\alpha,\beta\in I$ با شرط $\alpha\leq\beta$، داریم $\mu_\beta\circ\mu_{\alpha\beta}=\mu_\alpha$. فرض کنیم X یک R–مدول و بازای‌هر $\alpha\in I$، $h_\alpha : M_\alpha \longrightarrow X$ خانواده‌ای از R–همریختی‌ها باشد که بازای‌هر $\alpha,\beta\in I$ با شرط $\alpha\leq\beta$ داشته باشیم $h_\beta\circ\mu_{\alpha\beta}=h_\alpha$.

فرض کنیم $m\in M$. دراین‌صورت $\alpha\in I$ موجود است به‌طوری‌که $m\in M_\alpha$. $\omega : M \longrightarrow X$ با ضابطه $\omega(m)=h_\alpha(m)$ یک R–همریختی است و بوضوح بازای‌هر $\alpha\in I$، $\omega\mu_\alpha=h_\alpha$. براحتی می‌توان دید که همریختی ω یکتاست و لذا حد مستقیم دستگاه $\{M_\alpha \ : \ \mu_{\alpha\beta}\}_I$، R–مدول M است. □

۵۳.۱ **تعریف.** (دستگاه معکوس). فرض کنیم Λ مجموعه‌ای جهت‌دار است و برای‌هر $\lambda\in\Lambda$، M_λ یک R–مدول است. هم‌چنین برای‌هر $\mu\in\Lambda$ که $\lambda\leq\mu$ یک R–همریختی مانند $f_{\mu\lambda} : M_\mu \longrightarrow M_\lambda$ موجود است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱) $f_{\lambda\lambda}=\mathrm{id}_M$.

۲) برای $\lambda\leq\mu\leq\nu$، $f_{\mu\lambda}\circ f_{\nu\mu}=f_{\nu\lambda}$.