باسمه تعالی

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

(گرایش نظری)

مطالعه پتانسیلهای حل پذیر ایجاد شده توسط گروههای لی در مکانیک کوانتومی

از:

فاطمه پورآرام

استاد راهنما:

دکتر حسین پناهی

بهمن ۱۳۸۶

تقدیم به:

مادرم، که بی گمان مهری از مهربانی خداست...

پدرم، که اهل دل است و دلسوز...

و

بهترین دوستم، همسر صبورم، که همراه است و همدم دقایقم...

۱۳۸۷ /۶/ ۱۵

سپاسگزاری

سپاس می گویم خدای خوبم را که درهرچه خوانده ام نشانی از او یافته ام.

قدردانی من پیش از همه، از جناب آقای دکتر حسین پناهی است که به معنای واقعی کلمه "استاد راهنما"ی من بوده اند و در تمام مراحل کار پا به پا و قدم به قدم راهنمایی های ایشان امید و انرژی تازه ای برای ادامه ی کار در من بر می انگیخت.

از جناب آقای دکتر حسین فرج اللهی و همچنین جناب آقای دکتر آرمان عقیلی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند سپاسگزارم.

همچنین از جناب آقای دکتر صابر فرجامی که نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی برای این پایان نامه بوده اند، نهایت تشکر را دارم.

از تمامی معلّمانم چه در دوران تحصیل در این دانشکده و چه قبل از آن که از ابتدای آموختن بیش از "دانش آموزی"، "رسم زیستن" را یادم دادند، قدردانی می کنم و خود را مدیون زحماتشان می دانم.

خصوصاً یاد می کنم از معلّم گرانقدری که روح بزرگ و یادش همواره زنده و پابرجاست، استاد ولی الله اردشیری.

از تمامی دوستانم، چه آنهایی که درکنارم بودند و هستند و خواهند بود، و چه آنهایی که دیگر درکنارم نیستند ممنونم، به پاس همدلی، درک و مهربانی بی دریغشان.

فهرست مطالب

عنوان — شماره صفحه

فهرست جداول

عنوان **شماره صفحه**

فهرست شکل ها

عنوان **شماره صفحه**

چکیده

عنوان: مطالعه پتانسیلهای حل پذیرایجاد شده توسط گروههای لی در مکانیک کوانتومی

نگارنده: فاطمه پورآرام

در این تحقیق با استفاده از روش جبری و روش تغییر متغیر برخی از سیستمهای کوانتومی حل پذیر یک بعدی مطالعه و ساختار گروه لی مرتبط با سیستم بررسی می شود. برای این کار ابتدا با استفاده از یک سری تبدیلات کانونی و تبدیلات تشابه ای، جبر لی $sl(2,R)$ بر حسب عملگرهای اصلی مکانیک کوانتومی یعنی عملگر های فضای فاز P و Q حقیقی سازی می گردد. سپس معادله شرودینگر سیستم کوانتومی برحسب مولدهای جبر لی $sl(2,R)$ در شرایط مختلف نوشته می شود و پتانسیلهای حل پذیر نوسانگر هماهنگ، کولن و پتانسیل نوسانگر مورس بدست آورده می شود. بررسی این مسائل به کمک جبرلی $so(2,1)$ نیز انجام می شود و با محاسبه ی عملگر کازیمیر جبر $so(2,1)$ برای هریک از این سه پتانسیل ، عملگرهای انتقال مربوط به آنها بدست آورده می شود. نشان داده خواهد شد که عملگرهای انتقالی حاصل، یا به صورت عملگرهای نردبانی (تغییر دهنده انرژی) درمورد پتانسیلهای نوسانگر هماهنگ شعاعی و پتانسیل کولنی، و یا به صورت عملگرهای جابجایی (اثرکننده در انرژی ثابت) درمورد پتانسیل نوسانگر مورس عمل می کنند. که می توان با داشتن یک ویژه حالت سیستم و اثر متوالی عملگرهای حاصل، حالتهای دیگر را محاسبه کرد. با مقایسه ی مولدهای جبر $so(2,1)$ مربوط به هر جفت از این سه مسئله، نشان می دهیم که این مسائل مختلف توسط یک تغییر ساده در متغیرها و استفاده از تبدیلات تشابه ای، می توانند به یکدیگر تبدیل شوند به بیان دیگر پتانسیلهای مزبور که به حقیقی سازی های یکسانی از جبر $sl(2,R)$ مربوط بودند، با حقیقی سازی های متفاوتی از جبر لی $so(2,1)$ نیزمرتبط می شوند .

در یک تلاش دیگر ، با استفاده از تبدیلات عملگری، روابط جبری بین تبدیل فوریه انتشارگر علیتی و مولدهای گروه لی مربوط به پتانسیلهای دقیقاً حل پذیر مختلف، بدست آورده می شود.

واژه های کلیدی:

نظریه گروههای لی– گروههای SL(2,R)،SO(2,1) وSU(2) – تبدیلات کانونی کوانتومی– انتشارگر

Abstract

Title: Study of Solvable Potentials Generated by Lie groups in Quantum Mechanics

Author: Fatemeh Pouraram

We investigate some one-dimensional solvable quantum mechanical systems and their Lie group foundation, by means of algebraic and coordinate transformations methods. For this work, first, canonical transformations are used to build realisations of SL(2,R) Lie group in terms of the basic quantum mechanical operators, i.e. the operators of the phase space, Q and P.

The results are used to write the Schrodinger equation of the quantum mechanical system in terms of the generators of the sl(2,R) Lie algebra with some restrictions, and then we obtain some one-dimensional solvable potentials, like harmonic oscillator, Coulomb and Morse potential. The investigation of these problems is also performed by using of the so(2,1) Lie algebra and by calculation of the Casimir operator of the so(2,1) Lie algebra for each problem, the transition operators related to each case have be obtained, which act as ladder operators(energy changing) in the cases of the Coulomb and harmonic oscillator potentilas, whereas they act as shift operators (acting at constant energy) in the case of the Morse potential that is the states of the system can be obtained by consecutive application of the operators over for a given eigenstate. A comparison of the generators of the algebra may be used to identify mappings between each pair of systems. In other word, these solvable potentials which connected with the same type of realisations of SL(2,R), correspond to different realisations of the so(2,1) algebra.

In another effort, by using operator transformations, algebraic relations between the Fourier transformations of the causal propagators and Lie group generators of different exactly solvable potentials are obtained.

Key words: Lie group theory- SL(2,R), SO(2,1) and SU(2) groups- quantum canonical transformations- propagator

فصل اول

۱. مقدمه

پیدایش نظریه گروهها به بیش از ۱۵۰ سال قبل، (قرن ۱۹ میلادی) برمی گردد. پیشرفتهای اولیه نظریه گروهها توسط دانشمندانی همچون گاوس[1]، کوشی[2]، آبل[3]، هامیلتون[4]، گالوا[5]، سیلوستر[6]، کایلی[7] و بسیاری دیگر انجام شد. با این وجود این نظریه تا پیش از ظهور مکانیک کوانتومی جدید در سال ۱۹۲۵ ، کاربرد زیادی در فیزیک نداشت. اما پس از آن به کاربرد نظریه گروه در فیزیک پی برده شد و این ابزار جدید در محاسبات مربوط به ساختارو طیفهای اتمی توسط عده ای از جمله بت[8] و ویگنر[9] و سایرین مورد استفاده قرار گرفت. امروزه استفاده از نظریه گروهها در اغلب شاخه های فیزیک و شیمی اجتناب ناپذیر است. اگرچه یک ریاضیدان عموماً به نظریه انتزاعی گروهها توجه دارد، اما برای یک فیزیکدان نظریه ی نمایش گروههاست که مورد استفاده ی مستقیم در فیزیک کوانتومی و سایر شاخه های فیزیک قرار می گیرد.

دانش ما در مورد جبرهای لی[10] محصول کار مستقل ریاضیدانان بزرگی همچون لی[11] ، کارتان[12] ، وایل[13] ، دینکین[14]، شوالی[15] و دیگران است. ریاضیدان نروژی سوفس لی[16] (۱۸۴۲تا ۱۸۹۹) در اواخر قرن ۱۹ هنگامیکه به مطالعه ی دستگاههای معادلات

---

[1] Gauss
[2] Cauchy
[3] Abel
[4] Hamilton
[5] Galois
[6] Sylvester
[7] Cayley
[8] Bethe
[9] Wigner
[10] Lie algebra
[11] Lie
[12] Cartan
[13] Weyl
[14] Dynkin
[15] Schevallie
[16] Sophus Lie

دیفرانسیل مشغول بود به ابزاری برخورد نمود که امروزه آنها را به افتخار وی گروه لی[1] می نامند. توجه لی به تبدیلاتی از فضای اقلیدسی حقیقی معطوف بود که به یک معادله ی دیفرانسیل بخصوص مربوط بودند و ترکیب هردو از چنین تبدیلاتی ، تبدیل سومی می شد که باز هم به همان معادله ی دیفرانسیل مرتبط بوده و به شکل دیفرانسیل پذیر با دو تبدیل نخست در ارتباط بود. بتدریج مفهوم مجرد گروه لی و کاربردهای آن در شاخه ی ریاضیات و فیزیک گسترش یافت و در سال ۱۹۳۵دانشمندان به کمک خمینه[2]های دیفرانسیل پذیر ، گروههای توپولوژی[3] و جبرهای لی موفق به مطالعه فراگیر آنها شدند.

در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی مسئله اساسی، بررسی معادله ی شرودینگر زیر است:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

که در آن $\hat{H}$یک عملگر هرمیتی خطی(عملگر هامیلتونی) مناسب با مسئله است و ψو E به ترتیب ویژه تابع و ویژه مقدار آن می باشند. عملگر $\hat{H}$ می تواند متناظر با هر مشاهده پذیر فیزیکی نظیر : مکان، اندازه حرکت خطی، اندازه حرکت زاویه ای(اسپینی یا مداری) ، انرژی و مانند آن باشد. عموماً چندین جواب وجود دارد که در معادله بالا صدق می کنند و ما آنها را با ψ_iو ویژه مقدارهای متناظرشان را با E_i نمایش می دهیم. در حالت کلی یافتن دقیق ویژه تابعها و ویژه مقدارهای یک عملگر، بجز در چند مورد ساده ی "دقیقاً" قابل حل، بسیار مشکل است. لیکن می توان با استفاده از روشهای نظریه گروهها مسئله را تا حد قابل ملاحظه ای ساده کرد. این کار با ساده کردن مسئله ی ویژه مقداری و طبقه بندی کردن ویژه تابعهای مختلف یک عملگر توسط نمایشهای کاهش ناپذیر[4] گروه تقارنی عملگر مربوطه و همچنین باتوصیف خواص عمومی یک عملگر با در نظر گرفتن خواص تقارنی آن، صورت می پذیرد.

مدلهای کاملاً حل پذیر به نوبه ی خود، نقش بسیار مهمی در حوزه های مختلف مکانیک کوانتومی بازی می کنند (در اینجا حل پذیری دقیق، به این معنی است که می توان توابع ویژه و مقادیر ویژه عملگر هامیلتونی سیستم فیزیکی را بصورت تحلیلی در شکل بسته ای ارائه داد). بنا به دلایلی این مدلها مهم هستند، اول اینکه به عنوان مدلهایی واقعی از موقعیتهای فیزیکی ، فی نفسه می توانند جذاب باشند، به عنوان مثال پتانسیل مورس به دلیل اهمیت آن در فیزیک مولکولی، موضوع تحقیقات زیادی

---

[1] Lie group

[2] Manifold

[3] Topological groups

[4] Irreducible representation

از سال ۱۹۲۹ به بعد بوده است. دوم اینکه مدلهای کاملاً حل پذیر می توانند در رسیدن به جوابهای تقریبی برای پتانسیلهای مسائل پیچیده تر فیزیکی مورد استفاده قرار بگیرند. سوم اینکه جوابهای دقیق برای آزمایش و تایید روشهای عددی مفید هستند. در نهایت اینکه مدلهای کاملاً حل پذیر این جذابیت را دارند که ازیک نقطه نظر ریاضی محض، مسئله ای مفهومی را بیرون می کشند. به عنوان مثال پس از بررسی دقیقی، اغلب مشخص می شود که رابطه ای ضمنی با یک جبر لی معین وجود دارد، به این معنی که حل پذیری دقیق معمولاً پیامد یک تقارن خاص پنهان در مدل تحت بررسی است. به دلیل این جذابیتهای عمده، تکنیکهای مختلفی برای افزایش تعداد پتانسیلهای کاملاً حل پذیر مطرح شده است. چنین روشهایی شامل روش تبدیل متغیر(که به نامهای تبدیلات مختصاتی[1]، تبدیلات کانونی نقطه ای[2](PCT) و روش تابع ویژه[3] نیز معروف اند)، تکنیکهای جبری لی، روشهای تجزیه سازی[4]، تکنیکهای مکانیک کوانتومی ابر تقارنی[5] و شکل ناوردایی[6] می باشند.

۱) روش تغییر متغیرمبتنی بر تبدیلاتی است که معادله شرودینگر را به معادلات دیفرانسیل درجه دوم شامل بعضی توابع ویژه ریاضی- فیزیک تبدیل می کنند. توابع ویژه ای که معمولا مورد استفاده قرار می گیرند توابع فوق هندسی و فوق هندسی همشار هستند همانند چند جمله ای های متعامد کلاسیک(هرمیت، لاگر، ژاکوبی و ...). جستجوی سیستماتیک برای چنین تبدیلاتی توسط بیهاتاچارجی[7] و سودارشان[8] [۱] انجام شده است. این روش همچنین برای استخراج جوابهای پتانسیل ناتانزون[9] بر حسب توابع فوق هندسی یا فوق هندسی همشار استفاده شد[۲].

---

[1] Coordinate transformations

[2] Point canonical transformations

[3] Special functions

[4] Factorization methods

[5] Supersymmetric quantum mechanics

[6] Shape invariance

[7] Bhattacharjie

[8] Sudarshan

[9] Natanzon

۲) تکنیکهای جبر لی شامل روشهایی می شوند که روش پتانسیل گروه[1] نام دارند[۳-٤]. این روش شامل مشخص نمودن حالتهای مقید و پراکنده شده برخی ازدسته پتانسیلهای یک بعدی با نمایشهای تقلیل ناپذیریکانی پیوسته وگسسته ی برخی گروههای دینامیکی می شود. گروههای دینامیکی که بیشترین استفاده را دارند عبارتند از $SU(2)$، $SU(1,1)$، $SO(2,1)$، $SO(2,2)$، $SL(2,R)$و غیره. چنین گروههای دینامیکی گروههای پتانسیلی نامیده می شوند. با انتخاب مولدهای چنین گروههایی که بتوان آنها را برحسب عملگرهای دیفرانسیل خطی حقیقی سازی[2] کرد، می توان عملگر هامیلتونی را از طریق عملگرهای کازیمیر[3] بیان نمود. درواقع تقارن دینامیکی[4] مسائل فیزیکی با مطالعه ی نمایشهای جبر مولد طیف آنها می تواند مورد استفاده قرار بگیرد، و لذا حقیقی سازی مولدهای یک چنین جبرهایی.با در نظر گرفتن عملگرهای دیفرانسیلی، مطالعه ی معادله ی موج و جوابهایش را آسان می کند. برای مثال می توان به استفاده کردن از جبر $so(2,1)$ برای حل بعضی از مسائل مانند نوسانگر هماهنگ، یا بدست آوردن جواب پتانسلیهای مورس[5]، پوشل-تلر[6] و گینوچیو[7] توسط الهسید[8] و همکارانش[۳]، ویا وو[9] و همکارانش که ارتباط بین پتانسیل ناتانزون عمومی و گروههای پتانسیل $SU(1,1)$و $SO(2,2)$ را مورد بررسی قرار داده اند[٤] اشاره کرد. همچنین حقیقی سازی دیفرانسیلی جبر $su(1,1)$ که در مرجع [۵] توسط سوکومار[10]، مورد مطا لعه قرار گرفته است، قابل ذکر می باشد.

در مقالات مختلف دیده شده است که پتانسیلهای مربوط به هر یک ازجبرها را می توان در دسته هایی طبقه بندی کرد و همه ی پتانسیلهایی که در یک دسته قرار می گیرند (همراه با جوابهایشان شامل طیف و ویژه توابع انرژی) می توانند

---

[1] Potential group method

[2] Realization

[3] Casimir operators

[4] Dynamical symmetry

[5] Morse potential

[6] Poschl – Teller potential

[7] Ginocchio

[8] Alhassid

[9] Wu

[10] Sukumar

توسط تبدیلات کانونی نقطه ای(PCT) به یکدیگر نگاشته شوند. در این صورت تنها مسئله ای که باید حل گردد همان پتانسیل مرجع اولیه است که با حل آن، جواب سایر مسائل آن دسته بدست آورده می شود[٧-٦].

PCT شکل تابعی مسئله یعنی تقارن شکل ناوردایی پتانسیل وهمچنین روابط جابجایی عملگرها راحفظ می کند. به بیان دیگر شکل معادله ی موج را ناوردا باقی می گذارد. بنابراین می تواند نگاشت مناسبی ما بین پارامترهای پتانسیل، تکانه ی زاویه ای وانرژی دو سیستم کوانتومی اولیه و ثانویه را به ما بدهد. با استفاده از نگاشت جایگزین شده ی پارامترها و طیف حالتهای مقید مسئله ی اولیه، به راحتی می توان طیف بقیه پتانسیلهای آن دسته را حساب کرد. علاوه بر آن ویژه توابع با استفاده از تبدیلات ساده ای روی توابع ویژه ی مسئله مرجع بدست می آیند. از اینرو بهتر است که کار را با مسئله ای که جوابش مشخص و معلوم است به عنوان مسئله ی اولیه، شروع کرد و نتایج معادله ی موج را در مسائل کاملاً حل پذیر جدید که به دسته ی همان مسئله ی اولیه تعلق دارند، از روی PCT بدست آورد، بنابراین مسئله ی اولیه مانند یک هسته و بذری برای تولید جوابهای جدید عمل می کند. این نگرش با ارائه ی یک بررسی کامل و جامع از تبدیلات کانونی نقطه ای که شکل ناوردایی را حفظ می کنند، در جستجو برای یافتن جوابهای یک معادله ی موج داده شده مناسب می باشد. همچنین این روند به ایجاد دسته های جدیدی از پتانسیلهای حل پذیر مشروط[١] و شبه حل پذیر[٢] که به ترتیب برای آنها کل طیف انرژی و قسمتی از آن قابل محاسبه است، گسترش پیدا کرد[٨-١٨]. همچنین اینوماتا ، پاک و سوکمن[٣] با بکار گیری تبدیلات کانونی این پیشنهاد را مطرح کردند که PCT همراه با یک مسیر وابسته به تبدیل زمانی(تبدیل نقطه ای زمانی) می توانند هسته بعضی از پتانسیلهای حل پذیر را به هسته پتانسیل نوسانگر هارمونیک یا اسکارف تقلیل دهند[١٩و٧].

٣) روش تجزیه سازی، به عنوان یک روش دیگر به وجود دوعملگر دیفرانسیلی خطی A و A^+ به شدت وابسته است، که به عنوان عملگرهای انتقال بین یک جفت از هامیلتونی های هرمیتی عمل می کنند. این روش شامل نوشتن جفت عملگرهای هامیلتونی به صورت حاصلضرب A و A^+ می باشد و برای اولین بار توسط شرودینگر[٢٠] و دیراک[٤] [٢١]

[1] Conditionally exactly solvable potentials

[2] Qausi exactly solvable potentials

[3] Inomata, Sokmen and Pak

[4] Dirac

برای حل مسئله ی نوسانگرهای هماهنگ بدون استفاده ازابزارهای پیچیده ی ریاضی معرفی شد. بعدها این روش توسط اینفلد و هیول[1] [۲۲] که یک طبقه بندی جامعی از پتانسیلهای یک بعدی تجزیه پذیر ارائه کردند، بسط داده شد. جذابیت این موضوع مجدداً در دهه ۸۰ با معرفی مکانیک کوانتومی ابر تقارنی ($SUSY\ QM$)، به عنوان یک حالت حدی (در یک بعد) از تئوری میدانهای ابر متقارن، توسط ویتن[2] [۲۳] و معرفی مفهوم شکل ناوردایی توسط جندن اشتاین[3] [۲٤] تجدید شد.

٤) روش $SUSY\ QM$، مبتنی بر رابطه ی ویژه مقادیر و ویژه توابع جفت عملگرهای هامیلتونی که مرتبط با دو پتانسیل همتای ابر تقارنی[4] هستند، می باشد. مروری بر مجموعه ای از کارهای انجام شده با این روش، توسط کوپر[5] و همکارانش صورت گرفت [۲٥] و نشان داده شده است که کاربرد ابر تقارنی در مکانیک کوانتومی در مسائل مربوط به بدست آوردن جوابهای جبری پتانسیلهای غیر نسبیتی حل پذیر، رونقی تازه یافته است.

٥) روش شکل ناوردایی، در این مورد جندن اشتاین نشان داد که هر گاه یک رابطه ی پارامتری که آن را شرط شکل ناوردایی می نامیم، توسط دو پتانسیل که همتای ابر تقارنی هم هستند، ارضاء شود، آنگاه طیف و توابع ویژه به راحتی توسط ابزاری کاملا جبری ، با استفاده از تجزیه سازی هامیلتونی می توانند بدست آورده شوند. (در واقع، پتانسیل V_1 با شریک $SUSY$خود یعنی V_2 ، شکل ناورداست اگر هر دو پتانسیل شکلی مثل هم داشته باشند ولی با مقادیر مختلفی از پارامترهای ثابت، توصیف شوند.) در حقیقت، مفهوم شکل ناوردایی یک عمومی سازی برجسته و قدرتمندی ازروند شناخته شده حل مسئله ی نوسانگر هماهنگ ساده با استفاده از عملگرهای تولید و نابودی می باشد و می توان نشان داد که معادل روشهای تجزیه سازی اینفلد و هیول[۲۲] (یک حالت خاص از روش داربوکس[6] [۲٦] در حل معادلات دیفرانسیل درجه ی دوم) است.

---

1 Infeld and Hull

2 witten

3 Gendenshtein

4 Supersymmetric partner potentials

5 Cooper

6 Darboux

طبق مراجع[۳۱-۲۷] می توان دید که برخی از دسته پتانسیلهای حل پذیر هنوز هم می توانند توسعه و گسترش بیشتری پیدا کنند.

از اینرو درفصل دوم این پایان نامه مرور مختصری بر بعضی مفاهیم پایه و اولیه شده است که از برخی از آنها در فصل های سوم و چهارم استفاده می کنیم، سپس در فصل سوم به بررسی برخی از پتانسیلهای حل پذیر مانند پتانسیل کولن، نوسانگر هماهنگ شعاعی و مورس، به کمک حقیقی سازی هایی از جبرهای لی $sl(2,R)$ و $so(2,1)$، می پردازیم و در فصل چهارم، تبدیلات عملگری بین برخی از پتانسیلهای کاملاً حل پذیر و روابط توابع گرین و مولدهای گروه لی مربوط به آنها مورد بحث و بررسی قرار می گیرد. پایان نامه با نتیجه گیری و پیشنهادات به انتها می رسد.

فصل دوّم

۲. تعاریف و مفاهیم پایه

۲-۱) مفهوم خمینه

اگر روزی به عنوان موجودات فضایی در روی یک سطح ناشناخته قرار بگیریم، شاید اولین کاری که می کنیم آن است که تعیین می کنیم سطحی که روی آن قرار گرفته ایم چه شکلی است؟ آیا یک کره یا شکل یک چنبره یا حتی چیزی پیچیده تر از آن است. این کار را می توانیم با وسایل ابتدایی انجام دهیم. مثلاً می توانیم از یک نقطه شروع کنیم و قطعه طنابی را روی سطح سیاره بکشیم و بعد از طی مسیری دو سر آن را به هم ببندیم تا یک طناب بسته درست کنیم. اگر بعد از آزمایشهای فراوان ببینیم که طناب خود را بدون پاره کردن همواره می توانیم جمع کنیم، می فهمیم که روی سطحی شبیه به کره یا بیضی گون یا یک سطح تخت قرار داریم. اما اگر بفهمیم که بعضی وقتها طناب را نمی توانیم بدون پاره کردن جمع کنیم آنگاه سیاره ما حتما با کره فرق دارد و احتمالاً چیزی شبیه به چنبره یا پیچیده تر از آن است. برای این نوع کارها تنها به این نیاز داریم که مفهوم پیوستگی را دانسته باشیم و نیازی به آن نداریم که نقاط فضای خود را مسّاحی کرده و به هر نقطه آن مختصاتی نسبت داده باشیم. با این نوع کارها می توانیم توپولوژی فضای خود را تشخیص دهیم و آن شاخه از ریاضیات که ما را قادر به انجام این کارها می کند توپولوژی نامیده می شود. اما اگر بخواهیم کارهای بیشتری انجام دهیم مثلاً خطوط راست و زاویه و اشکال هندسی رسم کنیم و مساحت آنها را تعیین کنیم و پستی و بلندیهای سطح سیاره خود را مشخص کنیم می بایست به نقاط مختلف سیاره مختصاتی نسبت بدهیم. بنابراین در درجه اول تابع مختصات که از سطح سیاره به چندتایی اعداد حقیقی یعنی R^n تعریف می کنیم می بایست تابعی پیوسته باشد، همچنین می بایست رابطه وارون پذیری بین مختصات و نقاط وجود داشته باشد به نحوی که بتوان از هر نقطه به مختصات آن و بالعکس از مختصات هر نقطه به خود آن نقطه پی برد. بنابراین می بایست تابع مختصات آن وارون پذیر هم باشد. اگرچنین کاری انجام دهیم می گوییم فضا را با یک نقشه مختصاتی پوشانده ایم. این نقشه که مثل یک صفحه شفاف روی فضا قرار می گیرد باعث می شود که هر نقطه از فضا یک مختصات معین داشته باشد. فضایی که به چنین مختصاتی مجهز شده است یک خمینه نامیده می شود. تعداد مختصاتی که به هر نقطه داده می شود بعد آن خمینه خوانده می شود. البته پیش می آید که نتوانیم تمام خمینه را با یک نقشه مختصاتی بپوشانیم و شرط های بالا را اعمال کنیم. به عنوان مثال نقشه مختصاتی ϕ و θ در روی کره این عیب را دارد که به قطب شمال و جنوب مختصه ϕ معینی نسبت نمی دهد. همچنین این مختصات در همه کره پیوسته نیست. برای رفع این نقیصه می توانیم مسّاحی سطح مورد نظر را