دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان

مینیمم‌های قوی موضعی روی خمینه‌های ریمانی

استاد راهنما
دکتر محمدرضا پوریای ولی

استاد مشاور
دکتر صغری نوبختیان

نگارش
محسن رحیمی پیرانفر

بهمن‌ماه ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به تعریف مفهوم مینیمم‌های دقیق ضعیف روی خمینه‌های ریمانی می‌پردازیم. سپس انواع مختلف این مفهوم شامل مینیمم‌های شارپ ضعیف موضعی، مینیمم‌های دقیق ضعیف کراندار و مینیمم‌های دقیق ضعیف سرتاسری را برای مسائل محدب روی خمینه‌های ریمانی از بعد متناهی مشخصه سازی می‌کنیم. در ادامه با فرض اینکه خمینه‌ی مورد نظر هادامار باشد؛ مشخصه سازی‌های دیگری را نیز به آنچه در حالت کلی خمینه‌های ریمانی بدست آوردیم می‌افزاییم. در پایان، با ارائه‌ی مثال‌هایی کاربرد مشخصه سازی‌های به دست آمده را در فضایی ملموس نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: *مینیمم‌های دقیق ضعیف، خمینه‌های ریمانی، خمینه‌های هادامار، تحدب، مشتق‌پذیری تعمیم یافته*

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

مقدمه

بسیاری از مسائل بهینه سازی در فضاهای باناخ از بعد متناهی یا نامتناهی فرمول بندی شده‌اند. در این فضاها *ساختار خطی* نقش مهمی در به کار گیری ابزارهای آنالیز تغییراتی و مشتق پذیری، برای به دست آوردن شرایط بهینگی و الگوریتم‌های عددی بر عهده دارد. این در حالی است که بسیاری از مسائلی که در کاربردهای مختلف ظاهر می‌شوند را نمی‌توان در فضاهای خطی بررسی کرد. مدل سازی این مسائل نیاز به ساختار کلی‌تری مانند خمینه‌ها دارد. این مسائل بسیار فراوان هستند و در واقع یا از ساختار غیر خطی پدیده‌های طبیعی ناشی می‌شوند، مثل مدل‌های هندسی برای ستون فقرات انسان [۲]، یا به خاطر سهولتی که در حل مسائل خطی ایجاد می‌کنند مورد توجه‌اند؛ مثل مسائل بهینه سازی مقید، ناهموار و غیر محدبی در $\mathbb{R}^n$ که آن‌ها را می توان به مسائلی نامقید، هموار و محدب روی خمینه‌های ریمانی تبدیل کرد [۲۷، ۲۲، ۱۵، ۹].

از نظر تاریخی رویکرد به فرمول بندی مسائل بهینه سازی روی خمینه‌های ریمانی به کارهای ابتدایی در آنالیز تغییراتی مدرن بر می‌گردد؛ جایی که یکی از گام‌های مهم در این زمینه برای گسترش *اصول تغییراتی اکلند*[۱] [۱۴] در فضاهای متریک کاملی که ساختار خطی ندارند، برداشته شد. مقاله‌ی تأثیر گذار اکلند [۱۴] شامل کاربردهایی از اصل تغییراتی او برای وجود ژئودوزی‌های مینیمم کننده روی خمینه‌های ریمانی بود. اخیراً شماری از مهمترین نتایج به دست آمده در حوزه‌های مختلف نظریه‌ی بهینه سازی روی خمینه‌های ریمانی فرمول بندی شده‌اند [۲۷، ۲۱، ۱۷، ۱۳، ۱۰، ۵، ۳، ۲، ۱].

در این پایان نامه به مطالعه‌ی *مینیمم‌کننده‌های دقیق ضعیف*[۲] برای مسائل بهینه سازی مقید روی خمینه‌های ریمانی و همچنین حالت خاص خمینه های هادامار می‌پردازیم. مفهوم *مینیمم دقیق*[۳] در سال ۱۹۷۹ توسط *پلیاک*[۴][۲۳]

---

[۱] I. Ekeland

[۲] weak sharp minimizers توضیح: ترجمه‌ی رایج برای کلمه‌ی *sharp* در زبان فارسی کلمه‌ی *تیز* است؛ اما با توجه به متن در سرتاسر این پایان نامه کلمه‌ی *sharp* را معادل با *دقیق* در نظر گرفته‌ایم.

[۳] sharp minimum

[۴] B. T. Polyak

در مورد فضاهای اقلیدسی معرفی شد. او از این مفهوم برای تحلیل رفتار مسائل آشفته در بهینه سازی و همچنین تحلیل همگرایی بعضی از الگوریتم‌های عددی استفاده کرد. لازم به ذکر است که یک سال قبل یعنی در سال ۱۹۷۸ کروم[۵] ریاضیدان آلمانی در [۸] مفهومی مشابه را تحت عنوان *مینیم موضعی یکتای به طور قوی*[۶] ارائه کرده بود. در سال ۱۹۸۸ *فریس*[۷] در پایان نامه‌ی دکتری خود [۱۶] مفهوم *مینیمم‌های دقیق ضعیف*[۸]، که یک گسترش از مینیمم کننده‌های دقیق است، را به منظور این که شامل جواب‌های چندگانه نیز باشد، معرفی کرد. این مفهوم بعداً به طور وسیع در فضاهای خطی با بعد متناهی و نامتناهی مورد مطالعه قرار گرفت. انگیزه‌ی اصلی این مطالعات مربوط به *آنالیز حساسیت*[۹] و آنالیز همگرایی الگوریتم‌های بهینه سازی بود. در سال ۱۹۹۳ *فریس* به همراه *بورک*[۱۰] [۶] شرایط بهینگی لازم را برای مینیمم کننده‌های دقیق ضعیف را به دست آوردند. مقاله‌ی آنها شامل مشخصه سازی های کاملی برای مسائل مینیمم سازی محدب و نامقید در فضاهای اقلیدسی از بعد متناهی بود که کاربردهایی از برنامه ریزی محدب و آنالیز همگرایی را نیز در بر داشت. در سال ۲۰۰۲ *بورک* و *دنگ*[۱۱] [۷] شرایط بهینگی لازم و مشخصه سازی‌های به دست آمده از [۶] را به مسائل بهینه سازی مقید در فضاهای باناخ گسترش دادند.

در زمینه‌ی فضاهای خطی، مشخصه سازی مینیمم کننده‌های دقیق ضعیف برای مسائل بهینه سازی محدب، از دو مفهوم مرتبط استفاده می کند: یکی مشتق جهتدار توابع محدب و دیگری مخروط قائم بر *مجموعه‌ی جواب* $\overline{S}$ ؛ به [۶، ۷] مراجعه کنید. ابزارهای کلیدی برای به دست آوردن این مشخصه سازی‌ها عبارتند از (i) *زیردیفرانسیل تابع فاصله*، $d(.;\overline{S})$، نسبت به مجموعه‌ی $\overline{S}$ که با رابطه‌ی

$$\partial d_{\overline{S}}(x)=\mathbb{B}\cap N_{\overline{S}}(x) \qquad \forall x\in\overline{S}, \tag{۱-۰}$$

که در آن $N_{\overline{S}}(.)$ مخروط قائم[۱۲] بر مجموعه‌ی $\overline{S}$ و $\mathbb{B}$ گوی یکه در فضای مورد بحث است، مشخص می شود و (ii) *عملگر مصور*[۱۳]، $P(.|\overline{S})$، مرتبط با مجموعه‌ی جواب فوق که با رابطه‌ی

$$y\in P(x|\overline{S}) \Longleftrightarrow \langle x-y, z-y\rangle \leq 0 \qquad \forall z\in\overline{S}, \tag{۲-۰}$$

[۵] L. Cromme
[۶] strongly unique local minimum
[۷] M. C. Ferris
[۸] weak sharp minima
[۹] sensitivity analysis
[۱۰] J. V. Burke
[۱۱] S. Deng
[۱۲] normal cone
[۱۳] projection operator

به دست می‌آید.

اوّلین قدم برای بررسی مفهوم مینیمم کننده‌های دقیق ضعیف روی فضاهای غیرخطی در سال ۲۰۱۱ و در مقاله‌ای با عنوان *مینیمم‌های دقیق ضعیف روی خمینه‌های ریمانی*[۲۰] توسط *لی*[۱۴]، *موردخوویچ*[۱۵]، *ونگ*[۱۶] و *یائو*[۱۷] برداشته شد. این مقاله که منبع اصلیِ پایان نامه‌ی پیش رو نیز هست، به تعریف و مشخصه سازی مفهوم مینیمم‌های دقیق ضعیف برای مسائل محدب روی خمینه‌های ریمانی می پردازد. در این راه موانع تکنیکی قابل توجهی ظاهر می‌شوند. مثلاً در مورد خمینه‌های ریمانی حتی در مواردی که $\overline{S}$ محدب باشد، تابع فاصله نسبت به مجموعه‌ی $\overline{S}$، $d_{\overline{S}}(.)$، لزوماً محدب نیست. همین امر موجب می‌شود که رویکرد نویسندگان این مقاله برای مشخصه سازی مینیمم کننده‌های دقیق ضعیف با آنچه در فضاهای خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد بسیار متفاوت باشد.

همچنان که گفته شد در این پایان نامه به بررسی [۲۰] می‌پردازیم. مطابق با روال معمول ابتدا مقدماتی را بیان می‌کنیم که در ادامه‌ی کار مورد نیاز ما خواهند بود. این مقدمات در دو بخش فصل اول ارائه خواهند شد. بخش اول به مقدماتی در مورد فضاهای خطی اختصاص دارد. با وجود اینکه بحث اصلی ما درباره‌ی فضاهای غیر خطی است همانطور که در ادامه خواهید دید، این مطالب هم به خودی خود و هم به عنوان پیشنیازی برای آنچه در فضاهای غیر خطی به کار می رود، بسیار ارزشمند خواهند بود. در بخش دوم به تعریف خمینه‌های ریمانی و بیان برخی از مهمترین قضایا و تعاریف مرتبط با آن خواهیم پرداخت.

فصل دوم دربرگیرنده‌ی اصلی‌ترین قسمت پایان نامه است. این فصل مشتمل بر سه بخش است؛ در بخش اول مفاهیم و تعاریفی از فضاهای خطی را که برای تعریف و مشخصه سازی مینیمم‌های دقیق ضعیف روی خمینه‌های ریمانی ضروری می باشند را به خمینه‌های ریمانی گسترش می دهیم. در بخش دوم به تعریف انواع مختلف مینیمم‌های دقیق ضعیف شامل مینیمم‌های دقیق ضعیف موضعی، مینیمم‌های دقیق ضعیف کراندار و مینیمم‌های دقیق ضعیف سرتاسری می‌پردازیم. در بخش سوم مشخصه سازی‌های کاملی برای همه‌ی انواع مینیمم‌های دقیق ضعیف تحت شرایط تحدب به دست خواهیم آورد.

خمینه‌های هادامار نوع خاص و البته بسیار مهمی از خمینه‌های ریمانی هستند. در فصل سوم که از دو بخش تشکیل شده است به سراغ این دسته از خمینه‌ها می‌رویم. بخش اول به تعریف خمینه‌های هادامار و مرور مقدماتی

[۱۴] C.Li
[۱۵] B. S. Mordukhovich
[۱۶] J. Wang
[۱۷] J. Yao

در نظریه‌ی خمینه‌های هادامار اختصاص دارد. در بخش دوم این فصل نیز با فرض این که خمینه‌های مورد بحث هادامار باشند، مشخصه سازی‌های دیگری را به آنچه در فصل دوم به دست آوردیم می‌افزاییم. واضح است که مشخصه سازی‌های به دست آمده در این فصل در حالت کلی روی خمینه‌های ریمانی برقرار نیستند.

هیچ نظریه‌ای بدون مثال‌هایی که کاربرد آن نظریه را در فضایی قابل درک نشان دهند، کامل نخواهد بود. در فصل چهارم به بیان دو مثال می‌پردازیم که کاربرد مشخصه سازی‌های به دست آمده در فصل دوم را در فضایی آشنا نشان می‌دهد. تصاویر فراوانی که در این مثال‌ها ارائه شده‌اند، کار ما را در پیگیری بحث تسهیل می‌کنند. آخرین نتیجه در این فصل یک کاربرد از مشخصه سازی‌های به دست آمده است که پایداری مسائل بهینه سازی مقید را مورد بررسی قرار می‌دهد.

فصل ۱

مفاهیم اوّلیه

این فصل مدخلی برای ورود به پایان نامه است و شامل تعاریف، قضایا و نتایجی ست که در ادامه مورد نیاز می‌باشند. در ابتدا به مرور چند مفهوم ابتدایی از آنالیز محدب و آنالیز تغییراتی در فضاهای خطی می‌پردازیم. منابع اصلی ما در این قسمت [۲۵، ۷، ۱]می‌باشند. سپس به بیان مطالبی از خمینه‌های ریمانی که برای به دست آوردن نتایج اصلی ما، راجع به مینیمم‌های دقیق ضعیف ضروری می‌باشند می‌پردازیم. در این قسمت نیز [۱۹، ۱۱، ۴] منابع اصلی هستند.

۱-۱ مقدماتی در مورد فضاهای خطی

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع حقیقی d تعریف شده بر $X \times X$ را یک متریک روی X نامیم، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$، داشته باشیم

(i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$؛

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$؛

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

مجموعه‌ی X با متر d را یک **فضای متریک** نامیده و آن را با (X,d) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. دنباله‌ی $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کشی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده یک N وجود

داشته باشد به گونه‌ای که برای همه‌ی عددهای m و n بزرگتر از N داشته باشیم

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

تعریف ۳.۱. فضای متریک (X, d) را **فضای کامل**[۱] گوییم، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X مثل $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$، به عضوی مانند $x \in X$ همگرا باشد.

تعریف ۴.۱. تابع حقیقی نامنفی $\|.\|$ که روی یک فضای برداری تعریف می‌گردد، نرم نامیده می‌شود؛ اگر

(i) $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\| = 0$؛

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

روی هر فضای برداری نرم‌دار می‌توان یک متریک به‌صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف نمود.

تعریف ۵.۱. فضای برداری H را یک فضای ضرب داخلی نامیم؛ اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد حقیقی مانند $\langle x, y\rangle$ به نام «حاصل ضرب داخلی » (یا «حاصل ضرب اسکالر x و y ») چنان مربوط شده باشد که شرایط زیر برقرار باشند

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$؛

(ii) اگر $x, y, z \in H$، $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle z, y\rangle$؛

(iii) اگر $x, y \in H$ و α اسکالر باشد، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$؛

(iv) به ازای هر $x \in H$، $\langle x, x\rangle \geq 0$؛

(v) $\langle x, x\rangle = 0$ ایجاب می کند که $x = 0$.

[۱] complete

اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه نرم x به صورت

$$\| x \| := \langle x, x\rangle^{۱/۲},$$

تعریف می شود که خواص نرم را داراست.

نتیجه ۶.۱. ***(نامساوی کوشی شوارتز)***[۲] *برای هر x, y در فضای ضرب داخلی H داریم*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

تعریف ۷.۱. فرض کنید X مجموعه‌ایی ناتهی باشد. می‌گوییم گردایه‌ای مانند τ از زیر مجموعه‌های X یک توپولوژی روی X است هرگاه τ در ویژگی‌های زیر صدق کند

(i) $X \in \tau$ و $\varnothing \in \tau$؛

(ii) اگر U و V متعلق به τ باشند، آنگاه $U \cap V \in \tau$؛

(iii) اگر $\{V_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از اعضای τ باشد، آنگاه $\cup_{i\in I} V_i \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی روی مجموعه‌ی X باشد، آنگاه جفت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۸.۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را **فضای هاسدورف** [۳] گوییم هرگاه برای هردو عضو متمایز p و q در X، همسایگی مانند U برای p و همسایگی مانند V برای q وجود داشته باشد به‌طوری‌که $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۹.۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را **شمارش پذیر نوع دوم** گوئیم، هرگاه τ دارای یک پایه‌ی شمارش پذیر $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ باشد، که در آن $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. مجموعه $K \subseteq X$ را **محدب** گوییم، اگر برای هر دو نقطه‌ی x و y در K، و هر $t \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$(۱ - t)x + ty \in K.$$

[۲] Couchy – Schwarz
[۳] Hausdorff

تعریف ۱.۱۱. فضای دوگان X را به صورت مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی از X به $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم و آن را با X^* نمایش می‌دهیم.

فرض کنید X یک فضای نرم دار با نرم $\|.\|$ باشد. و $\langle .,. \rangle$ را ضرب داخلی بین X و دوگان توپولوژیکی آن باشد.

نمادگذاری.

۱. گوی یکه‌ی بسته در فضای اقلیدسی را با $\mathbb{B}$ نمایش می‌دهیم.

۲. اگر X یک فضای توپولوژیک و $C \subset X$ باشد، **درون** C را با $\mathrm{int}C$ نمایش می‌دهیم.

۳. اگر X یک فضای توپولوژیک و $C \subset X$ باشد، **بستار** C را با $\mathrm{cl}C$ نمایش می‌دهیم.

۴. گوی توپولوژیک به مرکز x و شعاع r روی خمینه‌ی ریمانی M را با $\mathbf{B}(x,r)$ نمایش می‌دهیم.

۵. گوی توپولوژیک به مرکز x و شعاع r روی فضای اقلیدسی را با $\mathbb{B}(x,r)$ نمایش می‌دهیم.

قرارداد. از این پس X را یک فضای برداری از بعد متناهی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱۲. فرض کنید X یک فضای برداری و $C \subset X$ باشد، **غلاف مخروطی** تولید شده توسط C را با $\mathrm{cone}\ C$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$\mathrm{cone}C := \bigcup_{\lambda \geq ۰} \{\lambda C\},$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید X یک فضای برداری و توپولوژیک و $C \subset X$ باشد، **قطب** C نسبت به X را با C° نمایش می‌دهیم و به صورت

$$C^\circ := \{x^* \in X^* | \langle x^*, x \rangle \leq ۱ \quad \forall x \in C\},$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنید X یک فضای برداری و $C \subset X$ باشد، **تابع شاخص** مجموعه‌ی C را با $\delta_C(.)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$\delta_C : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 & x \in C, \\ \infty & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۱۵. فرض کنید X یک فضای برداری و $C \subset X$ باشد، **تابع تکیه‌گاه** C را با $\sigma_C(.)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$\sigma_C(x^*) := \sup_{x\in C}\langle x^*, x\rangle \qquad \forall x^* \in X^*,$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۱۶. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و $C \subset X$ باشد، **تابع فاصله** نسبت به C را با $d_C(.)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$d_C(x) := \inf\{\|x - c\| | c \in C\} \qquad \forall x \in X\},$$

تعریف می‌کنیم.

گزاره ۱.۱۷. *(ویژگی‌های تابع فاصله و تابع تکیه‌گاه برای مجموعه‌های محدب) فرض کنید E و F دو زیر مجموعه‌ی محدب از X^* باشند و K یک مخروط محدب بسته‌ی ناتهی در X باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند*

(i) *برای هر $x \in K$، $\sigma_E(x) \leq \sigma_F(x)$ اگر و تنها اگر، $E \subset \mathrm{cl}(F + K^\circ)$.*

(ii) *برای هر $x \in X$ رابطه‌ی زیر برقرار است*

$$d_K(x) = \sigma_{\mathbb{B}\cap K^\circ}(x).$$

اثبات. قضیه‌ی A.۱ از [۷]. □

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع حقیقی گسترش یافته-مقدار $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را در

نظر بگیرید. **دامنه‌ی مؤثر** g را با $\text{dom}g$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{dom}g := \{x \in X | g(x) < \infty\}.$$

همچنین تابع حقیقی گسترش یافته-مقدار $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را سره گوییم، هرگاه

$$\text{dom}g \neq \varnothing.$$

تابع g را با درون ناتهی گوییم هرگاه درون دامنه‌ی آن ناتهی باشد.

تعریف ۱۹.۱. تابع با مقدار حقیقی گسترش یافته $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را در نظر بگیرید. **برون‌نمودار**[۴] g را با $\text{epi}g$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{epi}g := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} | g(x) \leq r\}.$$

تعریف ۲۰.۱. تابع با مقدار حقیقی گسترش یافته $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را **نیم پیوسته‌ی پایینی**[۵] روی X گوییم و با (l.s.c.) نمایش می‌دهیم، هرگاه $\text{epi}g$ در $X \times \mathbb{R}$ بسته باشد.

تعریف ۲۱.۱. **غلاف نیم پیوسته‌ی پایینی** یا بستار تابع g، تابعی مثل $\text{cl}g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$، با شرط

$$\text{epi}(\text{cl}g) = \text{cl}(\text{epi}g),$$

است. این تابع در واقع بزرگترین تابع نیم پیوسته‌ی پایینی است که از g بزرگتر نیست.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ تابعی سره و محدب باشد. **مشتق جهتدار** تابع g در نقطه‌ی $x \in \text{dom}g$ و در جهت $v \in X$ به صورت زیر تعریف می شود

$$g^{'}(x; v) := \lim_{t \to ۰^+} \frac{g(x + tv) - g(x)}{t}.$$

قابل ذکر است که اگر $t > ۰$ و $x + tv \in \text{dom}g$، آنگاه حد فوق موجود و برابر است با

$$\lim_{t \to ۰^+} \frac{g(x + tv) - g(x)}{t} = \inf_{t > ۰} \frac{g(x + tv) - g(x)}{t};$$

[۴] epigraph
[۵] lower semicontinuous

در غیر این صورت، قرار می‌دهیم

$$g^{'}(x;v) = \infty.$$

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید $g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ تابعی سره و محدب باشد. **زیر دیفرانسیل**[۶] تابع g در نقطه‌ی $x \in \mathrm{dom} g$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\partial g(x) := \{x^* \in X^* | \langle x^*, y - x\rangle \leq g(y) - g(x) \quad \forall y \in \mathrm{dom} g\}.$$

گزاره ۲۴.۱. ***(رابطه‌ی بین زیردیفرانسیل و مشتق جهتدار توابع محدب)*** *فرض کنید $g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ تابعی سره و محدب و $x \in \mathrm{dom} g$ باشد. در این صورت داریم*

$$\sigma_{\partial g(x)}(.) = \mathrm{cl} g^{'}(x; .).$$

اثبات. نتیجه‌ی ۲.۴.۱۵ از [۳۰]. □

۱-۲ مقدماتی درباره‌ی خمینه‌های ریمانی

تعریف ۲۵.۱. منظور از یک n-**خمینه**[۷] توپولوژیکی عبارت است از یک فضای توپولوژی M که دارای خواص زیر است

(i) M هاسدورف باشد؛

(ii) M شمارش پذیر نوع دوم باشد؛

(iii) M موضعاً **همانریخت**[۸] با فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. یعنی برای هر $p \in M$، یک همسایگی U از p و یک همانریختی $\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد.

به جفت (U, φ) **دستگاه مختصی**[۹] ، نقشه یا **چارت**[۱۰] گوییم.

[۶] subdifferential
[۷] manifold
[۸] homeomorphism
[۹] coordinate
[۱۰] chart

تعریف ۲۶.۱. دو نقشه‌ی (U, φ) و (V, ψ) را C^∞-**سازگار** گوییم، هرگاه $U \cap V \neq \varnothing$ ایجاب کند که تابع

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V),$$

دیفئومورفیسم باشد؛ یعنی این تابع یک به یک، پوشا و به عنوان تابعی از یک زیر مجموعه‌ی باز $\mathbb{R}^n$، C^∞ و دارای وارون C^∞ باشد.

تعریف ۲۷.۱. یک ساختار دیفرانسیل پذیر یا C^∞ روی یک خمینه‌ی توپولوژیکی M، یک کلاس $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ از نقشه هاست، به‌طوری‌که

(i) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$؛

(ii) برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$، $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ و (U_β, φ_β)، C^∞-سازگار باشند.

(iii) کلاس $\mathcal{U}$ نسبت به خاصیت (ii) بیشین باشد، یعنی اگر (u, φ) یک دستگاه مختصی باشد، به‌طوری‌که برای هر $\alpha \in \Lambda$، $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ با (U, φ)، C^∞-سازگار باشد، آنگاه

$$(U, \varphi) \in \mathcal{U}.$$

تعریف ۲۸.۱. یک خمینه‌ی C^∞، یک خمینه‌ی توپولوژیکی با یک ساختار C^∞ روی آن است.

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید M و N خمینه‌های C^r $(۰ \leq r \leq \infty)$ باشند، تابع $f : M \longrightarrow N$ را از کلاس C^r گوییم هرگاه، برای هر $x \in M$ دستگاه مختصی (U, φ) شامل x از M و (V, ψ) شامل $f(x)$ از N با شرط $f(U) \subset V$ وجود داشته باشد به‌قسمی که تابع

$$\hat{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V),$$

از کلاس C^r باشد.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید M یک خمینه و $p \in M$ باشد. یک **خم**[۱۱] در p یک نگاشت C^1، $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ است که در آن I یک فاصله‌ی باز شامل ۰ است و $\gamma(۰) = p$.

[۱۱] curve

تعریف ۳۱.۱. اگر M یک خمینه‌ی C^∞ و $p \in M$ باشد، آنگاه $C^\infty(p)$ عبارت است از مجموعه‌ی تمام توابع C^∞ که دامنه‌ی آنها، یک زیر مجموعه‌ی باز شامل p از M است، یعنی، $f \in C^\infty(p)$ است اگر همسایگی باز w حول p از M وجود داشته باشد به طوری که

$$f : w \longrightarrow \mathbb{R},$$

C^∞ باشد.

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید M یک خمینه‌ی C^∞ از بعد n باشد. **فضای مماس**[۱۲] بر M در p را که با T_pM نمایش داده می‌شود عبارت است از مجموعه نگاشت‌های $X_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ به طوری‌که در شرایط زیر صدق کند

$$(i) \quad X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g) \quad : \quad \forall f, g \in C^\infty(p) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}؛$$

$$(ii) \quad X_p(fg) = X_p f g(p) + f(p) X_p(g) \quad : \quad \forall f, g \in C^\infty(p).$$

قضیه ۳۳.۱. *فرض کنید $N \longrightarrow M : F$ یک تابع C^∞ بین خمینه‌ها باشد. دراین صورت برای هر $p \in M$ یک همریختی فضای برداری $F_{*_p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$F_{*_p}(X_p)f = X_p(f \circ F).$$

معمولاً همریختی F_{*_p} را دیفرانسیل[۱۳] *F در p گوییم و آن را با $dF(p)$ نیز نشان می‌دهیم.*

اثبات. قضیه‌ی IV۱.۲ از [۴]. □

تعریف ۳۴.۱. اگر برای هر $p \in M$ فضای مماس بر M، T_pM باشد، آنگاه $\coprod_{p \in M} T_pM$ را **کلاف مماس**[۱۴] بر M گوئیم و آن را با TM نمایش می‌دهیم.

[۱۲] tangent space
[۱۳] differential
[۱۴] tangent bundle

قضیه ۳۵.۱. *فرض کنید M یک خمینه و T_pM فضای مماس بر M در p باشد. همچنین*

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM,$$

کلاف مماس باشد، آنگاه کلاف مماس TM دارای یک توپولوژی و ساختار C^∞ است که با این توپولوژی و ساختار C^∞، TM یک خمینه‌ی هموار می‌باشد و نگاشت $\pi : TM \longrightarrow M$ که به صورت $\pi(T_pM) = \{p\}$ تعریف می شود یک تابع C^∞ است.

اثبات. لم ۶.۱ از صفحه‌ی ۱۰۵ [۴]. □

تعریف ۳۶.۱. یک برش C^∞ از کلاف TM را یک میدان برداری[۱۵] گوئیم، این بدان معنی است که تابع C^∞، $X : M \longrightarrow TM$ وجود دارد به طوری که

$$\pi \circ X = ۱_M$$

که π **تابع مصور**[۱۶] $\pi : TM \longrightarrow M$ تعریف شده در فوق است.

تعریف ۳۷.۱. فرض کنید V یک فضای برداری باشد. $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک **فرم دوخطی**[۱۷] گویند هرگاه نسبت به هر دو متغیر خطی باشد. یعنی

$$g(\alpha_۱v_۱ + \alpha_۲v_۲, w) = \alpha_۱g(v_۱, w) + \alpha_۲g(v_۲, w), \quad \forall v_۱, v_۲, w \in V,\ \forall\alpha_۱, \alpha_۲ \in \mathbb{R},$$

$$g(v, \beta_۱w_۱ + \beta_۲w_۲) = \beta_۱g(v, w_۱) + \beta_۲g(v, w_۲), \quad \forall v, w_۱, w_۲ \in V,\ \forall\beta_۱, \beta_۲ \in \mathbb{R}.$$

یک فرم دو خطی را متقارن گوئیم هرگاه

$$g(v, w) = g(w, v), \qquad \forall v, w \in V.$$

یک فرم دو خطی متقارن را معین مثبت گوئیم هرگاه

$$g(v, v) \geq ۰, \qquad \forall v \in V,$$

[۱۵] vector field
[۱۶] projection map
[۱۷] bilinear form