بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

همسر مهربان و دلسوزم

که سختی‌ها و محرومیّت‌های زیادی را در دوران تحصیلم تحمّل نمود

و تقدیم به

فرزندان عزیز و دلبندم

سینا و ثمین

که تمام اوقات مصروف برای تهیه‌ی این رساله، متعلّق به آنان بود.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی

رساله‌ی دکتری ریاضی محض، آنالیز هارمونیک،

محمدرضا قائمی

استاد راهنما

دکتر رسول نصر اصفهانی

مرداد ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

رساله‌ی دکتری ریاضی محض، آنالیز هارمونیک، آقای محمدرضا قانعی
تحت عنوان

میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی

در تاریخ ۲۹ /۰۵ /۱۳۹۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنما : دکتر رسول نصر اصفهانی

۲- استاد مشاور : دکتر سید مسعود امینی

۳- استاد داور۱ : دکتر محمود لشکری‌زاده بمی

۴- استاد داور۲ : دکتر علی رجالی

۵- استاد داور۳ : دکتر مهدی نعمتی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده : دکتر فرید بهرامی

سپاس مخصوص خداوند مهربان که به انسان توانایی و دانایی بخشید تا به بندگانش شفقت ورزد، مهربانی کند و در حل مشکلاتشان یاری‌شان نماید. از راحت خویش بگذرد و آسایش هم نوعان را مقدم دارد، با او معامله کند و در این خلوص انباز نگیرد و خوش باشد که پروردگار سمیع و بصیر است.

از دست و زبان که برآید　　　　کز عهده شکرش به درآید

پس از حمد خداوند بر خود لازم می‌دانم از عزیزانی که مرا همراه و مشوق بودند تشکر نمایم:
جناب آقای دکتر رسول نصر اصفهانی استاد راهنمای دلسوزم که به من چگونه اندیشیدن را آموخت؛
آقای دکتر سید مسعود امینی استاد مشاور مهربانم که از نظرات و راهنمایی‌های ایشان بهره‌ها بردم؛
آقایان دکتر رجالی و دکتر لشکری‌زاده بمی که زحمت بازخوانی و داوری این رساله را تقبل کردند؛
آقای دکتر مهدی نعمتی که همچون برادری دلسوز از نظرات خویش مرا بهره‌مند می‌نمود؛
کلیه دوستان گروه پژوهشی آنالیز هارمونیک دانشگاه صنعتی اصفهان که چندین سال در کنار هم تجربیات مفیدی به دست آوردیم؛
دوست عزیزم آقای دکتر محمد حسین باقری که کمک بخش من در شروع این راه بودند؛
پدر و مادر عزیزم که هر چه دارم از مهربانی‌ها و دعاهای ایشان است؛
خانواده‌ی همسرم که مرا صمیمانه و دلسوزانه در این راه همراهی نمودند و خود را همیشه مدیون آنها می‌دانم؛
و سرانجام همسر مهربانم که اگر صبوری و گذشت او نبود این راه نه شروعی داشت و نه پایانی.

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

در این رساله، مفهوم میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی $\mathbb{G} = (L^\infty(\mathbb{G}), \Gamma, \varphi, \psi)$ را معرفی و مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک رده‌های مهمی از گروه‌های کوانتومی از قبیل فشرده، گسسته، میانگین‌پذیر و هم‌ـ میانگین‌پذیر را بررسی می‌کنیم. در ادامه، ضمن معرفی میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک مشخصه‌ای $\mathbb{G}$، نشان می‌دهیم میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک مشخصه‌ای با میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک معادل می‌باشند. همچنین، مفهوم میانگین پایای داخلی توپولوژیک اکید روی زیر فضاهای مهمی از $L^\infty(\mathbb{G})$ را معرفی و شرایط هم ارز متعددی از میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک اکید گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی بر حسب آنها ارائه می‌کنیم. در نهایت، مفهوم نقطه ثابت داخلی توپولوژیک را معرفی و مشخصه‌سازی‌هایی از گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی میانگین‌پذیر داخلی توپولوژیک را به دست می‌آوریم.

رده‌بندی موضوعی: ۴۳A۰۷، ۴۶H۲۵، ۴۶L۶۵، ۴۶L۸۹

واژگان کلیدی: جبر فون نویمان، گروه کوانتومی فشرده‌ی موضعی، مدول باناخ، میانگین پایای داخلی توپولوژیک ، میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک، نقطه ثابت داخلی توپولوژیک، همانی مخلوط.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ابتدا انگیزه‌ی معرفی گروه‌های کوانتومی را بیان می‌کنیم و چگونگی معرفی گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه به تاریخچه‌ی مفهوم میانگین‌پذیری گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی می‌پردازیم. سپس با ارایه‌ی تاریخچه‌ای از میانگین‌پذیری داخلی گروه‌های فشرده‌ی موضعی، هدف اصلی این رساله را بیان می‌کنیم که عبارت است از معرفی و مطالعه‌ی میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی. در پایان، مفاهیم و نتایج مورد نیاز در این رساله را بیان می‌کنیم.

۱.۱ پیش‌گفتار

یادآوری کنیم که برای گروه آبلی فشرده‌ی موضعی G دوگان آن $\widehat{G}$، به عنوان گروه آبلی و فشرده‌ی موضعی متشکل از مشخصه‌های پیوسته روی G تعریف می‌شود و در نتیجه قضیه‌ی پونتریاگین بیان می‌کند که $G \cong \widehat{\widehat{G}}$. مساله‌ی مهم در اینجا آن است که قضیه‌ی دوگانگی پونتریاگین در حالت کلی برای گروه‌های غیرآبلی فشرده‌ی موضعی درست نیست. بنابراین ریاضی‌دانان متعددی به فکر معرفی یک ساختار ریاضی مناسب همراه با معرفی دوگان آن بودند که با دوگان دوم خود یکریخت باشد.

اولین و شاید مهمترین کار در این جهت در سال ۱۹۳۸ توسط تاناکا [۶۶] انجام شد. تاناکا مجموعه‌ی نمایش‌های ناتباهیده‌ی یک گروه فشرده را به عنوان دوگان آن در نظر گرفت و با تعریف یک ساختار مناسب روی مجموعه‌ی نمایش‌ها توانست همان گروه فشرده را از آن به دست آورد ولی مشکلی که وجود داشت این بود که نمی‌توان یک ساختار گروهی روی مجموعه‌ی نمایش‌های ناتباهیده قرار داد. در سال ۱۹۴۹، کرین [۳۶] یک

تعریف اصولی از دوگان یک گروه فشرده ارائه داد. کرین از یک گروه فشرده یک جبر جدید معرفی می‌کند و به کمک آن جبر یک گروه فشرده‌ی یکریخت با گروه اولیه را معرفی می‌کند. در واقع تعریف او تعمیمی از قضیه‌ی پونتریاگین برای گروه‌های فشرده‌ی آبلی بود. برای مطالعه بیشتر به فصل هفتم جلد دوم، بالاخص بخش سی‌ام کتاب هویت‌ـراس، [۲۶] مراجعه نمایید.

در سال ۱۹۵۹ استینِس‌پرینگ [۶۱] نتایج تاناکا و کرین را برای گروه‌های تک مدولی فشرده‌ی موضعی تعمیم داد. او جبر فون نویمان گروه تک مدولی را همراه با هم‌ـضرب مربوطه، به عنوان دوگان گروه در نظر گرفت و توانست از این طریق گروه اولیه را بازسازی کند.

در سال ۱۹۶۱ کاک [۳۱] توانست یک ساختار جدید به نام گروه حلقوی را تعریف کند.در واقع؛ کاک بجای گروه تک مدولی، حلقه‌ی M از توابع کران‌دار روی G همراه با یکریختی $\Phi : M \to M \otimes M$ و یک درجه m را به عنوان یک گروه حلقوی در نظر گرفت. او توانست یک دوگانگی با این ساختار جدید به دست آورد. همچنین می‌توان به مقالات دیگر وی در این رابطه یعنی [۳۲،۳۳] اشاره کرد.

سرانجام در سال ۱۹۷۳، وایزمَن و کاک [۶۷،۶۸] و همچنین مستقل از آنها اِیناک و شوارتز که نتایج مقالات خود را در کتاب [۲۲] چاپ کردند، توانستند یک رده را به گونه‌ای معرفی کنند که دوگان هرعنصر داخل همان رده قرار داشته باشد و شامل همه‌ی گروه‌های فشرده‌ی موضعی باشد. هر عنصر این رده به یک جبر کاک معروف شد و نشان داده شد که دوگان دوم هر جبر کاک با خودش یکریخت می‌شود. در واقع؛ یک جبر کاک عبارت است از یک ساختار چهارتایی $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ که در آن M یک جبر فون نویمان، $\Gamma : M \to M\bar{\otimes}M$ یک هم‌ـضرب که در رابطه $(\mathrm{id} \otimes \Gamma) \circ \Gamma = (\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ \Gamma$ صدق می‌کند و $\kappa : M \to M$ یک هم‌ـبرگشت است. به‌علاوه φ یک وزن هار روی M است.

معرفی جبرهای کاک پایان ماجرا نبود زیرا همزمان با پیشرفت نظریه‌ی جبرهای کاک، گروه‌های کوانتومی اولین بار در سال ۱۹۸۶ توسط درینفِلد [۱۸] معرفی شدند. در واقع؛ گروه‌های کوانتومی معرفی شده مثال‌هایی از جبرهای هاف بودند که از جبر لی خاصی به دست می‌آید که منظور از جبر هاف یک ساختار چهارتایی (A, Γ, ϵ, S) است که در آن A یک جبر یکدار، Γ یک هم‌ـضرب روی A، $\epsilon : A \to \mathbb{C}$ هم‌ـواحد و $S : A \to A$ یک متقاطر است.

در سال ۱۹۸۷، وُرُنُویچ [۷۳] با معرفی یک گروه کوانتومی نشان داد که آن یک جبر کاک نمی‌باشد. بنابراین با این مثال مشخص شد که رده‌ی جبرهای کاک نمی‌توانند شامل همه گروه‌های کوانتومی باشند و بنابراین باید به دنبال رده‌ی وسیعتری بود. وُرُنُویچ مجددا در همان سال ۱۹۸۷ [۷۴] و پس از آن در [۷۵] گروه‌های کوانتومی فشرده را معرفی و نامگذاری کرد. در واقع؛ یک گروه کوانتومی فشرده عبارت است از یک C^*ـ جبر یکدار همراه با یک هم‌ـضرب $\Gamma : A \to A\otimes A$ به قسمی که $\{(b\otimes \mathrm{I})\Gamma(c) \ : b, c \in A\}$ و $\{(\mathrm{I}\otimes b)\Gamma(c) \ : b, c \in A\}$ به طور خطی در $A \otimes A$ چگال باشد.

اندکی پس از معرفی گروه‌های کوانتومی فشرده، گروه‌های کوانتومی گسسته ابتدا به عنوان دوگان گروه‌های کوانتومی فشرده در سال ۱۹۹۰ توسط پُدلِس و وُرُنویچ [۵۴] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند. پس از آن

در سال ۱۹۹۴، افرُز و روآن [۲۰] به طور مجرد به معرفی گروه‌های کوانتومی گسسته پرداختند. در همان سال وانداپله [۶۹] مفهوم گروه‌های کوانتومی جبری را معرفی نمود. در واقع؛ جبر A به همراه هم‌ـضرب Γ روی A که نگاشت‌های خطی $T_1, T_2 : A \otimes A \to A \otimes A$ که با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شوند

$$T_1(a \otimes b) = \Gamma(a)(\mathrm{id} \otimes b), \quad T_2(a \otimes b) = (a \otimes \mathrm{id})\Gamma(b),$$

که در آن T_1, T_2 دوسویی هستند. در ضمن وانداپله [۷۰] در سال ۱۹۹۷ به طور مجرد به معرفی گروه‌های کوانتومی گسسته پرداخت.

همزمان با پیشرفت نظریه‌ی گروه‌های کوانتومی، نظریه‌ی وزن‌ها بالاخص روی C^*ـ‌جبرها در حال پیشرفت و گسترش بود و با کمک نظریه‌ی وزن‌ها سرانجام در سال ۲۰۰۰، نظریه گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی توسط کاستِرمانس و وائِس [۳۸] معرفی شدند. متعاقبا در سال ۲۰۰۳ همین دو نفر، گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی فون نویمان جبری را [۳۹] معرفی کردند. این دو مقاله مبنای بررسی گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی توسط دیگر پژوهشگران شدند.

از جمله مفاهیمی که اهمیت زیادی در گروه‌های فشرده‌ی موضعی و همچنین گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی دارد مفهوم میانگین‌پذیری است. مفهوم میانگین‌پذیری ابتدا برای جبرهای کاک توسط وُیکِلسکیو [۷۱] معرفی شد. سپس توسط شوارتز و ایناک [۲۱] بررسی شد. در ادامه روآن [۵۶] میانگین‌پذیری جبرهای هاف‌ـ فون نویمان را مورد بررسی قرار داد. مفهوم هم‌ـمیانگین‌پذیری گروه‌های کوانتومی فشرده در سال ۲۰۰۱ توسط مُرفی، بِدُس و تویسِت [۴] مطرح و مورد بررسی قرار گرفت. سپس در سال ۲۰۰۲ مفاهیم میانگین‌پذیری و هم‌ـمیانگین‌پذیری برای گروه‌های کوانتومی جبری که وان‌داپله معرفی کرده بود توسط بِدس، تویسِت و مُرفی [۵، ۶] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفتند. سرانجام در سال ۲۰۰۳ میانگین‌پذیری و هم‌ـمیانگین‌پذیری گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی توسط بِدُس و تویسِت [۳] مورد مطالعه قرار گرفت.

پس از معرفی میانگین‌پذیری گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی، با توجه به ویژگی‌های این مفهوم بخاطر در اختیار داشتن ابزارهای قوی و هم به عنوان تعمیم گروه‌های فشرده‌ی موضعی، پژوهشگران در آنالیز هارمونیک به مشخصه‌سازی و ارایه نتایج متعدد و جدیدی از میانگین‌پذیری و هم‌ـمیانگین‌پذیری گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی پرداختند. از جمله‌ی این کارها می‌توان به کارهای نیوفنگ و همکارانش [۲۷، ۳۰، ۳۴]، رُندِه [۱۴، ۵۸، ۵۹]، و البته وائس و همکارانش [۱۷]، سالْمی و داز [۱۵] اشاره کرد.

مطالعه‌ی میانگین پذیری داخلی از سال ۱۹۷۵ میلادی برای گروه‌های گسسته با کار اِفرُز [۱۹] شروع شد و سپس توسط اَکِمَن [۱] در سال ۱۹۸۱ و چُدا‌ـچُدا [۱۰—۱۲] در سال‌های ۱۹۷۹ و ۱۹۸۳ ادمه پیدا کرد و برای گروه‌های فشرده‌ی موضعی توسط لائو و پَترسون [۴۳، ۴۴] در سال‌های ۱۹۹۱و ۲۰۰۶، لُزرت و ریندلِر [۴۶] در سال ۱۹۸۴، یوآن [۷۶، ۷۷] در سال‌های ۱۹۸۸ و ۱۹۹۱، تاکاهاشی [۶۳] در سال ۱۹۹۶ و اِستاک [۶۲] در سال ۲۰۰۴ مورد بررسی قرار گرفت.

امّا مفهوم میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک تا کنون برای گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی معرفی نشده

است. در این رساله مفهوم میانگین‌پذیری داخلی توپولوژیک را برای گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی شروع می‌کنیم. نتایج حاصل از این پژوهش در دو مقاله زیر به چاپ رسیده است.

[1] M. R. Ghanei and R. Nasr-Isfahani, Inner amenability of locally compact quantum groups, *Internt. J. Math.* **24**, (2013).

[2] M. R. Ghanei and M. Nemati, On an open problem by Nasr-Isfahani on strict inner amenability, *Stud. Sci. Math. Hungar.* **50** (2013), 26-30.

تمام نتایج اثبات شده در این رساله از نویسنده است و نتایج مورد نیاز از دیگران صرفاً با بیان صورت آنها به مرجع مربوطه ارجاع داده شده است.

۱.۲ جبرهای فون نویمان

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $\mathcal{B}(H)$ جبر عملگرهای کران‌دار روی H باشند. لازم به یادآوری است که $\mathcal{B}(H)$ یک W^*ـ جبر می‌باشد؛ یعنی یک C^*ـ جبری است که دارای پیش‌دوگان است. پیش‌دوگان آن‌را با نماد $\mathcal{B}(H)_*$ نشان می‌دهیم و اعضای پیش‌دوگان را عملگرهای *اثر رده* می‌نامند. در واقع اگر $\{\xi_i\}$ یک پایه متعامد یکه برای H باشد، آنگاه اثر عملگر $0 \leqq T \in \mathcal{B}(H)$ به صورت

$$\operatorname{tr}(T) = \Sigma_{i\in I}\langle T\xi_i|\xi_i\rangle$$

تعریف می‌شود، که در آن $\langle .|. \rangle$ نشان دهنده‌ی ضرب داخلی در فضای هیلبرت H می‌باشد. فرض کنیم $\mathcal{K}(H)$ فضای باناخ عملگرهای فشرده که یک ایده‌آل بسته دوطرفه در $\mathcal{B}(H)$ می‌باشد و $\mathcal{T}(H)$ فضای عملگرهایی باشد که $\|T\|_1 := \operatorname{tr}(|T|) < \infty$. در این صورت

$$\mathcal{K}(H)^* = \mathcal{T}(H), \quad \mathcal{T}(H)^* = \mathcal{B}(H).$$

در نتیجه $\mathcal{K}(H)^{**} = \mathcal{B}(H)$. اثبات و جزییات بیشتر را می‌توان در [۷] یافت.

توپولوژی‌های متعددی می‌توان روی $\mathcal{B}(H)$ تعریف کرد و همگرایی تور $(T_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}(H)$ تحت هر توپولوژی به $T \in \mathcal{B}(H)$ را بر حسب آن معرفی نمود. در اینجا به چند مورد از آنها اشاره می‌کنیم.

(۱) توپولوژی *عملگری ضعیف* روی $\mathcal{B}(H)$ که با نماد wot نشان می‌دهیم توپولوژی القا شده توسط نیم نرم‌هایی روی $\mathcal{B}(H)$ است که برای هر $\xi, \eta \in H$ و $T \in \mathcal{B}(H)$ به صورت

$$T \mapsto |\langle T\xi|\eta\rangle|,$$

تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، در توپولوژی عملگری ضعیف داریم $T_i \to T$ اگر و تنها اگر برای هر

$\xi, \eta \in H$ داشته باشیم $\langle T_i\xi|\eta\rangle \to \langle T\xi|\eta\rangle$.

(۲) *توپولوژی عملگری قوی* روی $\mathcal{B}(H)$ که با نماد sot نشان می‌دهیم توپولوژی القا شده توسط نیم نرم‌هایی روی $\mathcal{B}(H)$ است که برای هر $\xi \in H$ و $T \in \mathcal{B}(H)$ به صورت

$$T \mapsto \|T\xi\|,$$

تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، در توپولوژی عملگری قوی داریم $T_i \to T$ اگر و تنها اگر برای هر $\xi \in H$ داشته باشیم $\|T_i\xi - T\xi\| \to 0$.

(۳) *توپولوژی عملگری قوی** روی $\mathcal{B}(H)$ که با نماد *sot نشان می‌دهیم توپولوژی القا شده توسط نیم نرم‌هایی روی $\mathcal{B}(H)$ است که برای هر $\xi \in H$ به صورت

$T \mapsto \|T\xi\|$ و $T \mapsto \|T^*\xi\|$

تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، در توپولوژی عملگری قوی* داریم $T_i \to T$ اگر و تنها اگر برای هر $\xi \in H$ داشته باشیم $\|T_i\xi - T\xi\| + \|T_i^*\xi - T^*\xi\| \to 0$.

(۴) *توپولوژی عملگری σــ ضعیف* (*فراضعیف*) روی $\mathcal{B}(H)$ که با نماد σ-wot نشان می‌دهیم، توپولوژی القا شده توسط نیم نرم‌هایی روی $\mathcal{B}(H)$ است که برای دنباله‌های دلخواه $(\xi_n)_n$ و $(\eta_n)_n$ در H که $\sum_{n=1}^{\infty}\|\xi_n\|^2 < \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\|\eta_n\|^2 < \infty$، به صورت

$$T \mapsto \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\langle T\xi_n|\eta_n\rangle\Big|,$$

تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، در توپولوژی عملگری σــ ضعیف داریم $T_i \to T$ اگر و تنها اگر برای دنباله‌های دلخواه $(\xi_n)_n$ و $(\eta_n)_n$ در H که $\sum_{n=1}^{\infty}\|\xi_n\|^2 < \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\|\eta_n\|^2 < \infty$ داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle T_i\xi_n|\eta_n\rangle \to \sum_{n=1}^{\infty}\langle T\xi_n|\eta_n\rangle.$$

(۵) *توپولوژی عملگری σــ قوی* (*فراقوی*) که با نماد σ-sot نشان می‌دهیم، توپولوژی القا شده توسط نیم نرم‌هایی روی $\mathcal{B}(H)$ است که برای هر دنباله‌ی $(\xi_n)_n$ در H که $\sum_{n=1}^{\infty}\|\xi_n\|^2 < \infty$ به صورت

$$T \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\|T\xi_n\|^2,$$

تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، در توپولوژی عملگری σــ قوی $T_i \to 0$ اگر و تنها اگر برای هر $(\xi_n)_n$ که

$\sum_{n=1}^{\infty}\|\xi_n\|^2 < \infty$ داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T_i\xi_n\|^2 \to 0.$$

(۶) *توپولوژی عملگری σـ قوی** (*فراقوی**) که با نماد $\sigma\text{-sot}^*$ نشان می‌دهیم ضعیفترین توپولوژی قویتر از $\sigma\text{-sot}$ است که نگاشت $T \mapsto T^*$ را پیوسته می‌کند.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $\mathcal{B}(H)$ فضای عملگرهای کراندار روی H باشند. یک $*$ـ زیر جبر همانی‌دار $\mathfrak{M}$ از $\mathcal{B}(H)$ را که نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف روی $\mathcal{B}(H)$ بسته باشد یک *جبر فون نویمان* روی H می‌گوییم.

ملاحظه ۱.۲.۲ برای هر جبر فون نویمان $\mathfrak{M}$ *جابجاگر* $\mathfrak{M}$ که با نماد $\mathfrak{M}'$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathfrak{M}' = \{T \in \mathcal{B}(H) \mid TS = ST \text{، برای هر } S \text{ در } \mathfrak{M}\}.$$

همچنین قرار می‌دهیم $\mathfrak{M}'' := (\mathfrak{M}')'$ که به جابجاگر دوّم $\mathfrak{M}$ معروف است.

قضیه ۱.۲.۳ *فرض کنیم $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ یک $*$ـ زیر جبر همانی‌دار باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.*

(الف) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$.

(ب) *$\mathfrak{M}$ نسبت به توپولوژی عملگری قوی بسته است.*

(ج) *$\mathfrak{M}$ نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف بسته است.*

برهان. به لم ۴.۱.۴ و قضیه‌ی ۴.۱.۵ از مرجع [۴۸] مراجعه کنید. ■

مثال ۱.۲.۴ برای هر فضای هیلبرت H به سادگی قابل بررسی است که $\mathcal{B}(H)'' = \mathcal{B}(H)$. بنابراین $\mathcal{B}(H)$ یک جبر فون نویمان است.

از آنجا که توپولوژی‌های عملگری ضعیف و عملگری قوی روی $\mathcal{B}(H)$ ضعیفتر از توپولوژی نرمی می‌باشند، هر جبر فون نویمان نسبت به توپولوژی نرمی نیز بسته است و لذا هر جبر فون نویمان یک C^*ـ جبر می‌باشد.

برای جبر فون نویمان $\mathfrak{M}$، تابعک خطی کراندار f روی $\mathfrak{M}$ را *نرمال* گویند هرگاه برای هر تور کراندار صعودی $(x_i)_i$ از عناصر خودالحاق در $\mathfrak{M}$، یعنی $x_i^* = x_i$، که دارای حد x باشند داشته باشیم

$$\lim_i f(x_i) = f(x).$$

فضای تمام تابعک‌های نرمال روی $\mathfrak{M}$ را پیش دوگان $\mathfrak{M}$ می‌نامیم و با نماد $\mathfrak{M}_*$ نشان می‌دهیم، ثابت می‌شود

$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_*)^*$ و همچنین ثابت می‌شود برای تابعک کران‌دار f روی $\mathfrak{M}$ گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(الف) f نرمال است.

(ب) f پیوسته عملگری ضعیف روی گوی یکه‌ی $\mathfrak{M}$ است.

(ج) f پیوسته عملگری σـ ضعیف است.

(د) عملگر $y \in \mathcal{T}(H)$ به گونه‌ای وجود دارد که برای هر $x \in \mathfrak{M}$ داریم

$$f(x) = tr(yx).$$

برهان. به بخش ۳,۶ از مرجع [۵۲] مراجعه کنید. ■

یادآوری می‌شود که یک فضای باناخ را *کامل دنباله‌ای ضعیف* گویند هرگاه هر دنباله‌ی ضعیف کوشی در آن همگرای ضعیف باشد.

قضیه ۱.۲.۵ *اگر $\mathfrak{M}$ یک جبر فون نویمان باشد، آنگاه $\mathfrak{M}_*$ کامل دنباله‌ای ضعیف است.*

برهان. به نتیجه‌ی ۵,۲ از [۶۴] مراجعه کنید. ■

فرض کنیم $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ جبرهای فون نویمان باشند و $\pi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ یک $*$ـ همریختی یکانی باشد. π را نرمال می‌نامیم اگر π نسبت به توپولوژی σـ ضعیف روی $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ پیوسته باشد. به عبارت دیگر، برای هر $\omega \in \mathfrak{N}_*$ داشته باشیم $\omega\pi \in \mathfrak{M}_*$.

اگر $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ جبرهای فون نویمان روی فضاهای هیلبرت H و K باشند، آنگاه $\mathfrak{M}\bar{\otimes}\mathfrak{N}$ جبر فون نویمان تولید شده روی ضرب تانسوری $H \otimes K$ از فضاهای هیلبرت H و K است. در واقع، $\mathfrak{M}\bar{\otimes}\mathfrak{N}$ بستار مجموعه‌ی

$$\{x \otimes y | x \in \mathfrak{M}, y \in \mathfrak{N}\}$$

در توپولوژی عملگری ضعیف روی $\mathcal{B}(H \otimes K)$ می‌باشد که در آن برای هر $\xi, \eta \in H$ داریم

$$(x \otimes y)(\xi, \eta) = x(\xi) \otimes y(\eta).$$

این جبر فون نویمان را حاصل ضرب تانسوری جبرهای فون نویمان $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ می‌نامند.

رده‌ی مهمی از فضاهای هیلبرت و جبرهای فون نویمان از گروه‌های فشرده‌ی موضعی به دست می‌آیند که در این قسمت به معرفی آنها می‌پردازیم. در این رساله G یک گروه فشرده‌ی موضعی با عنصر همانی e را نشان می‌دهد؛ یعنی، یک گروه G همراه با یک توپولوژی هاسدرف فشرده‌ی موضعی که تحت آن نگاشت $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ از $G \times G$ به G پیوسته است.

منظور از *مجموعه‌های بورل* اعضای کوچکترین σــ جبر تولید شده توسط زیر مجموعه‌های بسته G می‌باشد که این σــ جبر را با نماد $B(G)$ نشان می‌دهیم و به آن σــ جبر مجموعه‌های بورل G می‌گوییم. از [۲۵] یادآوری می‌کنیم که یک *اندازه‌ی هار* چپ λ روی G وجود دارد؛ یعنی، اندازه‌ی رادون مثبت روی G که برای هر زیر مجموعه‌ی بورل E و هر $s \in G$ داشته باشیم $\lambda(sE) = \lambda(E)$. به‌علاوه، اندازه هار چپ تحت مضرب اسکالر یکتاست.

فرض کنیم Δ *تابع مدولی* G باشد؛یعنی، همریختی پیوسته‌ای از G به توی گروه ضربی $(\circ, \infty)$ به طوری که برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از G و هر $s \in G$ داریم

$$\lambda(Es) = \Delta(s)\lambda(E).$$

زیر مجموعه‌ی بورل E از G را *به طور موضعی پوچ* نامند هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subseteq G$ داشته باشیم $\lambda(E \cap K) = \circ$. یک خاصیت وابسته به $s \in G$ را به طور موضعی تقریبی همه جا روی G برقرار نامند هرگاه مجموعه‌ی نقاطی از G که دارای آن خاصیت نباشند، به‌طور موضعی پوچ باشد.

برای هر تابع اندازه‌پذیر مختلط‌ــ مقدار f روی G قرار می‌دهیم

$$\|f\|_\infty := \inf\{t \geq \circ : \ |f| \leq t \ \text{به طور موضعی تقریبی همه جا روی } G \text{ داشته باشیم}\}.$$

حال، فرض کنیم $L^\infty(G)$ مجموعه‌ی توابع مختلط‌ــ مقدار f روی G با شرط $\|f\|_\infty < \infty$ باشد. در این صورت با یکسان در نظر گرفتن توابعی در $L^\infty(G)$ که به طور موضعی تقریبی همه‌جا برابرند، $L^\infty(G)$ همراه با جمع و ضرب نقطه‌ای و عمل مزدوج‌گیری مختلط، یک W^*ــ جبر است؛ به فصل ۱۲ از مرجع [۲۵] مراجعه کنید.

پیش دوگان $L^\infty(G)$ فضای باناخ $L^1(G)$ متشکل از تمام توابع مختلط‌ــ مقدار انتگرال‌پذیر f روی G همراه با $\|.\|_1$ است. این فضا همراه با ضرب پیچشی $*$ که برای هر $f, g \in L^1(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f * g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)\ d\lambda(t),$$

یک جبر باناخ با همانی تقریبی کران‌دار است که به آن جبر گروهی می‌گویند. برای جزییات بیشتر به فصل ۱۲ از مرجع [۲۵] رجوع کنید. همچنین $L^\infty(G)$ دوگان $L^1(G)$ می‌شود که دوگانگی آنها برای هر $x \in L^\infty(G)$ و $f \in L^1(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle x, f\rangle = \int_G x(t)f(t)\ d\lambda(t).$$

فرض کنیم $L^۲(G)$ فضای باناخ متشکل از تمام توابع مختلط_مقدار f روی G به گونه‌ای است که $f^۲$ انتگرال‌پذیر باشد. به عبارت دیگر،

$$L^۲(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : \int_G |f(s)|^۲ d\lambda(s) < \infty\}.$$

اگر برای هر $\eta, \zeta \in L^۲(G)$ تعریف کنیم

$$\langle \eta | \zeta \rangle = \int_G \eta(s)\overline{\zeta(s)} d\lambda(s),$$

آنگاه $\langle . | . \rangle$ یک ضرب داخلی روی $L^۲(G)$ است و $L^۲(G)$ را به یک فضای هیلبرت تبدیل می‌کند.

قضیه ۱.۲.۶ *برای هر W^*_ جبر مانند $\mathfrak{M}$، یک فضای هیلبرت H به گونه‌ای وجود دارد که $\mathfrak{M}$ یکریخت طولپا با یک جبر فون نویمان روی H است.*

برهان. به قضیه ۱۰۱۶۰۷ از مرجع [۶۰] مراجعه کنید. ∎

مثال ۱.۲.۷ طبق قضیه ۱.۲.۶، برای هر گروه فشرده‌ی موضعی G، می‌توان گفت $L^\infty(G)$ یک جبر فون نویمان روی $L^۲(G)$ است.

مثال ۱.۲.۸ فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. نمایش λ_G از G به $\mathcal{B}(L^۲(G))$ را برای هر $t \in G$ و $\xi \in L^۲(G)$ با ضابطه‌ی

$$\lambda_G(t)\xi(s) = \xi(t^{-۱}s),$$

در نظر می‌گیریم. بستار مجموعه‌ی $\{\lambda_G(t) : t \in G\}$ در توپولوژی عملگری ضعیف روی $\mathcal{B}(L^۲(G))$ را *جبر فون نویمان گروهی* G می‌نامند و با نماد $VN(G)$ نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که پیش‌دوگان $VN(G)$ را با نماد $A(G)$ نشان می‌دهند که به *جبر فوریه‌ی* G معروف است. در واقع برای هر عنصر ϕ در $A(G)$ عناصر $\eta, \zeta \in L^۲(G)$ به گونه‌ای وجود دارند که

$$\phi = (\eta * \tilde{\zeta})\check{},$$

که در آن برای هر $s \in G$ داریم $\tilde{\zeta}(s) = \overline{\zeta(s^{-۱})}$ و $(\eta * \tilde{\zeta})\check{}(s) = (\eta * \tilde{\zeta})(s^{-1})$. همچنین برای هر $T \in VN(G)$ داریم

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T\eta, \zeta \rangle.$$

تعریف ۱.۲.۹ فرض کنیم A یک C^*ـ جبر و A^+ عناصر مثبت آن باشد. تابع $\varphi : A^+ \to [0,\infty]$ را یک *وزن* روی A گوییم هرگاه

(۱) برای هر $x, y \in A^+$ داشته باشیم $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

(۲) برای هر $r \in \mathbb{R}^+$ و $x \in A^+$ داشته باشیم $\varphi(rx) = r\varphi(x)$.

اگر φ یک وزن روی C^*ـ جبر A باشد، آنگاه مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$A_\varphi^+ = \{a \in A^+ | \varphi(a) < \infty\},$$

$$\mathcal{N}_\varphi = \{a \in A | \varphi(a^*a) < \infty\},$$

$$A_\varphi = \mathrm{span} A_\varphi^+.$$

تعریف ۱.۲.۱۰ فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک جبر فون نویمان و φ یک وزن روی $\mathfrak{M}$ باشد. در این صورت

(۱) وزن φ را *نرمال* گوییم هرگاه برای هر تور صعودی و کران‌دار $(x_i)_{i\in I}$ در $\mathfrak{M}^+$ داشته باشیم

$$\sup_i \varphi(x_i) = \varphi(\sup_i x_i).$$

(۲) وزن φ را *متناهی* گوییم هر گاه $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}_\varphi^+$. همچنین φ را *نیم متناهی* گوییم هرگاه با توپولوژی عملگری ضعیف $\mathfrak{M}_\varphi^+$ در $\mathfrak{M}^+$ یا به طور معادل $\mathfrak{M}_\varphi$ در $\mathfrak{M}$ چگال باشد.

(۳) وزن φ را *باوفا* گوییم اگر برای $a \in A^+$ داشته باشیم $\varphi(a) = 0$، آنگاه $a = 0$.

۱.۳ گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی

قبل از تعریف گروه کوانتومی فشرده‌ی موضعی به معرفی جبرهای هاف‌ـ فون نویمان می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱ زوج $(\mathfrak{M}, \Gamma)$ را یک *جبر هاف‌ـ فون نویمان* می‌نامند هرگاه $\mathfrak{M}$ یک جبر فون نویمان باشد و نگاشت $\Gamma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}\bar{\otimes}\mathfrak{M}$ یک هم‌ـ ضرب باشد؛ یعنی، Γ یک $*$ـ همریختی نرمال یکانی به گونه‌ای است که

$$(\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ \Gamma = (\mathrm{id} \otimes \Gamma) \circ \Gamma,$$

که در آن id نگاشت همانی روی $\mathfrak{M}$ است.

تعریف ۱.۳.۲ فرض کنیم $(\mathfrak{M},\Gamma)$ یک جبر هاف‌ــ‌فون نویمان، φ و ψ وزن روی $\mathfrak{M}$ باشند. در این صورت

(۱) وزن φ را یک *وزن هار چپ* روی $\mathfrak{M}$ گویند هرگاه φ یک وزن نرمال نیم متناهی باوفا روی $\mathfrak{M}$ به گونه‌ای باشد که *پایای چپ* نیز باشد؛ یعنی، برای هر $\omega \in \mathfrak{M}_*^+$ و $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ داشته باشیم

$$\varphi((\omega \otimes \mathrm{id})\Gamma(x)) = \varphi(x)\omega(۱).$$

(۲) وزن ψ را یک *وزن هار راست* روی $\mathfrak{M}$ گویند هرگاه ψ یک وزن نرمال نیم متناهی باوفا روی $\mathfrak{M}$ به گونه‌ای باشد که *پایای راست* نیز باشد؛ یعنی، برای هر $\omega \in \mathfrak{M}_*^+$ و $x \in \mathfrak{M}_\psi^+$ داشته باشیم

$$\psi((\mathrm{id} \otimes \omega)\Gamma(x)) = \psi(x)\omega(۱).$$

حال با توجه به تعریف جبرهای هاف‌ــ‌فون نویمان، می‌توان به تعریف گروه‌های کوانتومی فشرده‌ی موضعی پرداخت.

تعریف ۱.۳.۳ فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک جبر فون نویمان باشد. چهار تایی $\mathbb{G} = (\mathfrak{M},\Gamma,\varphi,\psi)$ را یک *گروه کوانتومی فشرده‌ی موضعی* گویند، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

(۱) زوج $(\mathfrak{M},\Gamma)$ یک جبر هاف‌ــ‌فون نویمان باشد.

(۲) φ یک *وزن هار چپ* روی $\mathfrak{M}$ باشد.

(۳) ψ یک *وزن هار راست* روی $\mathfrak{M}$ باشد.

مثال ۱.۳.۴ فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. در این صورت

$$\mathbb{G}_a = (L^\infty(G),\Gamma_a,\varphi_a,\psi_a), \quad \mathbb{G}_s = (VN(G),\Gamma_s,\phi_s,\phi_s),$$

دو گروه کوانتومی فشرده‌ی موضعی هستند که در آن

$$\Gamma_a : L^\infty(G) \to L^\infty(G)\bar{\otimes}L^\infty(G) = L^\infty(G\times G)$$

و همچنین $\Gamma_s : VN(G) \to VN(G)\bar{\otimes}VN(G)$ دو هم‌ــ‌ضرب به ترتیب روی $L^\infty(G)$ و $VN(G)$ هستند که برای هر $r,t \in G$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Gamma_a(f)(r,t) = f(rt), \quad \Gamma_s(\lambda_G(t)) = \lambda_G(t)\bar{\otimes}\lambda_G(t).$$