بسم الله الرحمن الرحيم

مرکز تهران

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

گروه آمار

عنوان پایان نامه:

سری‌های زمانی فازی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر مسعود یارمحمدی

استاد مشاور:

سرکار خانم دکتر نرگس عباسی

تدوین:

سودابه پگاه

پاییز ۱۳۸۸

تقدیر و تشکر

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

اکنون که به لطف و عنایت الهی پژوهش حاضر به اتمام رسیده است، برخود لازم می‌دانم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر مسعود یارمحمدی به عنوان استاد راهنما و سرکار خانم نرگس عباسی به عنوان استاد مشاور که در تمام مراحل انجام این پروژه مرا یاری نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم و زحمات و راهنمایی‌های مؤثر ایشان را ارج نهم.

پاییز ۸۸

تقدیم به

پدر، مادر و همسر مهربانم

که برای پیشرفت تحصیلی اینجانب از هیچ کوششی دریغ نکردند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل چهارم: توصیفهای زبانی و اشکال تحلیلی آنها

فصل پنجم: تحلیل و پیش‌بینی سریهای زمانی شامل مقادیر زبانی فازی

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه معرفی، تشخیص، مدل بندی و پیش بینی سریهای زمانی ای است که داده های آن قطعیت نداشته و تحت عنوان اعداد فازی و مقادیر زبانی معرفی می شوند.
در ابتدا به کمک دو نمایش مفید از اعداد فازی یعنی نمایش آنها بر اساس نقاط برش و برشهای نموی به تجزیه و تحلیل سریهای زمانی فازی و پیش بینی آنها می پردازیم. سپس متغیر های زبانی که مقادیر اختیار شده توسط آنها برچسبهای زبانی بوده و در بحث فازیها به ارزشهای فازی معروفند واشکال تحلیلی آنها شامل روابط و عملگر های استلزام و الگوریتمهای فازی معرفی می شوند، در ادامه سریهای زمانی شامل چنین داده هایی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و با یک مثال کاربردی در مورد تعداد ثبت نام شدگان در یک دانشگاه براساس روشهای مختلف پیش بینی فازی شامل :روش زمان ثابت سونگ و چیسوم ، روش زمان متغیر سونگ و چیسوم، روش مارکوف ، روش هوانگ ، روش نوع اول سینگ، روش نوع دوم سینگ و روش چن به پیش بینی تعداد دانشجویان می پردازیم.

۱-۱) مقدمه

تئوری مجموعه‌های فازی، نخستین بار به طور رسمی توسط پروفسور لطفعلی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ مطرح شد. تئوری مجموعه‌های فازی را می‌توان شکل تعمیم یافته تئوری مجموعه‌های کلاسیک دانست.

مجموعه‌های کلاسیک مجموعه‌ای از عناصر مشخص و معین (اعداد، نمادها، اشیاء و غیره) است که در یک صفت یا ویژگی خوش تعریف اشتراک دارند. به عنوان مثال: اگر مجموعه مرجع X، مجموعه اعداد طبیعی فرض شود و M ویژگی بزرگتر از یک بودن باشد آنگاه M یک ویژگی خوش تعریف است. زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد طبیعی (X) می‌توان گفت که آن عدد بزرگتر از ۱ هست یا خیر؟ و بنابراین عضو مجموعه ما هست یا نه؟!

بدین سبب به آنها مجموعه‌های قطعی می‌گوییم.

حال مجموعه اعداد «خیلی کوچکتر از ۱۰ بودن» را در نظر بگیریم. در اینجا خیلی کوچکتر بودن اعداد از ۱۰ یک ویژگی دقیق و معین نیست و در نتیجه هر عددی کوچکتر از ۱۰ می‌تواند به طور نسبی ویژگی خیلی کوچکتر بودن را داشته باشد. این ویژگی را یک ویژگی ناخوش تعریف می‌گوییم که نظریه مجموعه کلاسیک از صورت‌بندی این ویژگی‌ها ناتوان است.

در تئوری مجموعه‌ها، مجموعه صندلی‌های موجود در یک اتاق بوسیله مشخص نمودن جواب‌ها در مورد هر یک از اشیاء موجود در اتاق به این سئوال که «آیا این شی صندلی است؟» تشکیل می‌گردد. در تئوری مجموعه‌های کلاسیک ما اجازه استفاده از تنها دو جواب را داریم: بله یا خیر.

ما ۱ را به عنوان بله و صفر را به عنوان خیر کدگذاری می‌کنیم. در پایان با جمع‌آوری تمام اشیاء که برچسب ۱ را دارند مجموعه صندلی‌های موجود در یک اتاق را بدست می‌آوریم.

حال فرض کنید که سئوال را به این ترتیب تغییر دهیم. که کدامیک از اشیاء اتاق می‌تواند عملکردی شبیه به یک صندلی داشته باشد. در این حالت مجموعه اشیاء اتاق که می‌تواند عملکردی شبیه به صندلی داشته باشد فقط شامل صندلی‌ها نمی‌شود. بلکه میزها، جعبه‌ها قسمتی از کف اتاق و مانند اینها را شامل می‌شود. که هر یک تا حدی می‌توانند عملکردی شبیه به صندلی داشته باشند. این مجموعه یک مجموعه فازی است.

۱-۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

در تئوری مجموعه‌های کلاسیک یک عنصر یا متعلق به یک مجموعه است و یا متعلق به آن مجموعه نیست که توسط تابع نشانگر به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

نقطه عزیمت به سوی مجموعه‌های فازی همانا تعمیم مجموعه مشخصه $\{۰ , ۱\}$ به تمام اعداد موجود در بازه $[۰ , ۱]$ است. با توسعه مجموعه مشخصه فوق شکل تابع مشخصه به تابع عضویت تغییر یافته و با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۱) اگر X مجموعه مرجعی باشد که هر عضو آن را با x نشان دهیم مجموعه فازی $\widetilde{A}$ در X به وسیله زوج‌های مرتبی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) | x \in X\} \qquad (۱-۲)$$

$\mu_{\widetilde{A}}(x)$ تابع عضویت و یا درجه عضویت می‌باشد که میزان تعلق x به مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را نشان می‌دهد. و برد این تابع اعداد حقیقی غیرمنفی می‌باشد که یک مقدار ماکزیمم برای آن در نظر می‌گیریم و در حالت نرمال به صورت فاصله بسته $[۰, ۱]$ در نظر گرفته می‌شود و در صورتی که برد این تابع مجموعه $\{۰ , ۱\}$ در نظر گرفته شود همان مجموعه کلاسیک است.

برای نمایش مجموعه‌های فازی روش های متفاوتی وجود دارد:

۱- به صورت زوج های مرتب $(x , \mu_{\widetilde{A}}(x))$

۲- به صورت تحلیلی و تعریف مشروط به شکل تابع

به عنوان مثال: مجموعه اعدادی که از ۱۰ خیلی بزرگترند را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x) | x \in X\}$$
$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۱۰ \\ (۱ + (x - ۱۰)^{-۲})^{-۱} & x > ۱۰ \end{cases} \qquad (۱-۳)$$

۳- به صورت:

$$\widetilde{A} = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_۱)}{x_۱} + \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_۲)}{x_۲} + \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_۳)}{x_۳} + \ldots = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_i)}{x_i} \qquad (۱-۴)$$

و یا

$$= \int_X \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x} \qquad (۱-۵)$$

تعریف ۱-۲) مجموعه پشتیبان یا تکیه‌گاه: مجموعه پشتیبان مجموعهٔ فازی $\widetilde{A}$ که با $S(\widetilde{A})$ نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه عناصری از $\widetilde{A}$ که درجه عضویت آنها بزرگتر از صفر است؛ یعنی:

$$S(\widetilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\widetilde{A}}(x) > ۰\} \qquad (۱-۶)$$

تعریف ۱-۳) مجموعه فازی نرمال: یک مجموعه فازی را نرمال گویند اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضای آن مثلاً x_i برابر با یک باشد یعنی

$$\exists x \in X \left| \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱ \right. \quad (۱-۷)$$

در غیر این صورت $\tilde{A}$ را غیرنرمال گویند.

تعریف ۱-۴) مجموعه در سطح α (برش α): مجموعه در سطح α مجموعه‌ای است از تمام اعدادی که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی بزرگتر یا مساوی α باشد؛ یعنی:

$$A_\alpha = \left\{ x \in X \left| \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \right. \right\} \quad (۱-۸)$$

تعریف ۱-۵) مجموعه فازی محدب: مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left\{ \mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2) \right\}; \forall x_1, x_2 \in X \;,\; \forall \lambda \in [0\;,\;1] \quad (۱-۹)$$

همچنین می‌توان گفت: یک مجموعه فازی محدب است اگر همه مجموعه‌های در سطح $_\alpha$ی آن محدب باشد. معنی محدب به طور شهودی این است که تابع عضویت یک مجموعه فازی، بیش از یک مرتبه بالا و پایین نرود.

تعریف ۱-۶) ارتفاع یک مجموعه فازی: ارتفاع یک مجموعه فازی، بزرگترین مقدار درجه عضویت در آن مجموعه است؛ یعنی:

$$\boldsymbol{hyt}(\tilde{A}) = \max\left\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \right\} \quad (۱-۱۰)$$

۱-۳) عملیات پایه روی مجموعه‌های فازی

تعریف ۱-۷) اجتماع دو مجموعه فازی: تابع عضویت اجتماع دو مجموعه فازی که بصورت $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ است بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{D}} = \max\left\{ \mu_{\tilde{A}}(x)\;,\; \mu_{\tilde{B}}(x) \right\};\; x \in X \quad (۱-۱۱)$$

تعریف ۱-۸) اشتراک دو مجموعه فازی: تابع عضویت اشتراک دو مجموعه فازی که در آن $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_E(x) = \min\left\{ \mu_{\tilde{A}}(x)\;,\; \mu_{\tilde{B}}(x) \right\} \;;\; x \in X \quad (۱-۱۲)$$

تعریف ۱-۹) مکمل مجموعه فازی: تابع عضویت مکمل مجموعه فازی نرمال $\tilde{A}$، $\mu_{\not\subset \tilde{A}}(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\not\subset\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \; ; \;\; x \in X \qquad (۱۳-۱)$$

۱-۴) توسعه عملیات بر روی مجموعه‌های فازی

تعریف ۱-۱۰) جمع جبری (جمع احتمالی): جمع جبری $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)) \middle| x \in X \right\}$$

به طوریکه: (۱-۱٤)

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۱-۱۱) جمع کراندار: جمع کراندار $\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x)) \middle| x \in X \right\}$$

بطوریکه:

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) = \min\left\{1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\right\} \qquad (۱۵-۱)$$

تعریف ۱-۱۲) تفریق کراندار: تفریق کراندار $\tilde{C} = \tilde{A}\Theta\tilde{B}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}\Theta B}(x) \middle| x \in X \right\}$$

بطوریکه:

$$\mu_{\tilde{A}\Theta\tilde{B}}(x) = \max\left\{0 \; , \; \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\right\} \qquad (۱٦-۱)$$

تعریف ۱-۱۳) ضرب جبری: ضرب جبری دو مجموعه فازی $\tilde{C} = \tilde{A} \bullet \tilde{B}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x)) \middle| x \in X \right\}$$

بطوریکه:

$$\mu_{\tilde{A}\bullet\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \bullet \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۱۷-۱)$$

تعریف ۱-۱۴) ضرب یک عدد قطعی در یک مجموعه فازی: تابع عضویت ضرب یک عدد قطعی a در مجموعه فازی $\tilde{A}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{a\bullet\tilde{A}}(x) = a \bullet \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (۱۸-۱)$$

تعریف (۱-۱۵) حاصلضرب دکارتی: چنانچه $\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_n$ مجموعه‌های فازی روی $X_1,\ldots,X_n$ باشند، آنگاه حاصلضرب دکارتی این مجموعه‌های فازی در فضای برداری $X_1,\ldots,X_n$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{(\tilde{A}_1\times\ldots\times\tilde{A}_n)}(x)=\min_i\left\{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\middle|x=(x_1,\ldots,x_n),x_i\in X_i\right\} \qquad (۱۹-۱)$$

۱-۵) اعداد فازی

تعریف ۱-۱٦) مجموعه فازی نرمال و محدب $\tilde{A}$ یک عدد فازی نامیده می‌شود اگر:

۱- تابع عضویت آن به صورت قطعه‌ای پیوسته باشد

۲- دقیقاً یک x وجود داشته باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$

در صورت تحقق شرط اول، عدد فازی پیوسته است.در غیر این صورت گسسته خواهد بود.

۱-۶) اصل گسترش

یکی از اساسی‌ترین مفاهیم تئوری مجموعه‌های فازی که می تواند مفاهیم ریاضیات کلاسیک (قطعی) را به مجموعه‌های فازی تعمیم دهد اصل گسترش می‌باشد.

تعریف ۱-۱۷) فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد و $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی تعریف شده در X باشد می‌توان گفت f یک تابع از X به مجموعه مرجع Y است و داریم: $y=f(x)$. اصل گسترش به ما اجازه می‌دهد مجموعه فازی $\tilde{B}$ را در Y به این صورت تعریف کنیم:

$$\tilde{B}=f(\tilde{A})=\left\{(y,\mu_{\tilde{B}}(y))\middle|y=f(x)\ ,\ x\in X\right\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases}\sup_{x\in f^{-1}(y)}\ \mu_{\tilde{A}}(x) & if\quad f^{-1}(y)\neq\phi\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (۲۰-۱)$$

مثال ۱-۱۸) مجموعه فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر داریم:

$$\tilde{A}=\{(-1\ ,\ 0/5)\ ,\ (0\ ,\ 0/8)\ ,\ (2\ ,\ 0/1)\ ,\ (2\ ,0/4)\} \qquad (۲۱-۱)$$

$$y=f(x)=x^2$$

$$\tilde{B}=f(\tilde{A})=\{(1,0/5),(0,0/8),(4,0/4)\} \qquad (۲۲-۱)$$

۱-۷) عملیات جبری روی اعداد فازی:

انجام عملیات جبری روی اعداد فازی به دو صورت امکان‌پذیر است.

۱- برحسب برش‌های α

۲- با استفاده از اصل گسترش

۱-۷-۱) جمع اعداد فازی

- جمع دو عدد فازی $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ بر حسب برش‌های α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{A}_\alpha + \widetilde{B}_\alpha = \left[a_{L_\alpha}, a_{r_\alpha}\right] + \left[b_{L_\alpha}, b_{r_\alpha}\right] \qquad (\text{۲۳-۱})$$

$$\widetilde{C}_\alpha = \widetilde{A}_\alpha + \widetilde{B}_\alpha = \left[a_{L_\alpha} + b_{L_\alpha}, a_{r_\alpha} + b_{r_\alpha}\right] \qquad (\text{۲٤-۱})$$

a_{L_α}، کوچکترین عضوی از مجموعه فازی $\widetilde{A}$ است که درجه عضویت آن بزرگتر یا مساوی α است و a_{r_α}، بزرگترین عضوی از $\widetilde{A}$ است که درجه عضویت آن بزرگتر یا مساوی α است. همین تعریف را برای b_{r_α} , b_{L_α} از مجموعه فازی $\widetilde{B}$ داریم.
دو عدد فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ را در نظر بگیرید. مطابق با اصل گسترش، جمع آنها مجموعه‌ی فازی $\widetilde{C}$ است و تابع آن به شکل زیر می‌باشد:

$$\mu_{\widetilde{C}}(z) = \bigvee_{z=x+y} \left[\mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(y)\right] \qquad (\text{۲٥-۱})$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که درجه عضویت عدد قطعی z در عدد فازی $\widetilde{C}$، از بیشینه نمودن کمینه درجات عضویت همه زوجهای x و y که جمع آنها z می‌شود بدست می‌آید.
(از علامت "$\vee$" برای ماکزیمم گیری و از "$\wedge$" برای مینیمم‌گیری استفاده می‌شود)
مثال ۱-۱۹) دو عدد فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\widetilde{A} = \widetilde{۳} = \{(۱,۰/۳),(۲,۰/۷),(۳,۱),(۴,۰/۷),(۵,۰/۳)\} \qquad (\text{۲٦-۱})$$

$$\widetilde{B} = \widetilde{۷} = \{(۵,۰/۲),(۶,۰/۶),(۷,۱),(۸,۰/۶),(۹,۰/۲)\} \qquad (\text{۲۷-۱})$$

هنگامیکه $\alpha = ۰/۴$ است برش ۰/٤ مجموعه‌های $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ بصورت زیر می‌باشد:

$$A_{۰/۴} = \left[a_{L_{۰/۴}}, a_{r_{۰/۴}}\right] = [۲\ ,\ ۴] \qquad (\text{۲۸-۱})$$

$$B_{۰/۴} = \left[b_{L_{۰/۴}}, b_{r_{۰/۴}}\right] = [۶\ ,\ ۸] \qquad (\text{۲۹-۱})$$

برش ۰/٤ مجموعه $\widetilde{C}$ طبق رابطه (۱-۲٤) جمع دو فاصله‌ای است که بوسیله روابط (۱-۲۸) و (۱-۲۹) بدست آمده است.

$$C_{۰/۴} = \left[a_{L_{۰/۴}}, a_{r_{۰/۴}}\right] + \left[b_{L_{۰/۴}}, b_{r_{۰/۴}}\right] = \left[a_{L_{۰/۴}} + b_{L_{۰/۴}}, a_{r_{۰/۴}} + b_{r_{۰/۴}}\right] = [۸\ ,\ ۱۲] \qquad (\text{۳۰-۱})$$

با استفاده از اصل گسترش برای درجه عضویت عدد ۷ در مجموعه فازی $\widetilde{C}=\widetilde{A}+\widetilde{B}$ داریم:

$$\mu_{\widetilde{C}}(۷)=\mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(۷)=\vee\left[\mu_{\widetilde{A}}(۱)\wedge\mu_{\widetilde{B}}(۶)\ ,\mu_{\widetilde{A}}(۲)\wedge\mu_{\widetilde{B}}(۵)\right]=\vee\left[۰/۳\ ,\ ۰/۲\right]=۰/۳ \quad (۱-۳۱)$$

۱-۷-۲) تفریق اعداد فازی

با استفاده از برش α تفاضل دو عدد فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ بصورت زیر است:

$$\widetilde{A}_\alpha-\widetilde{B}_\alpha=\left[a_{L_\alpha},a_{r_\alpha}\right]-\left[b_{L_\alpha},b_{r_\alpha}\right] \quad (۱-۳۲)$$

$$\widetilde{C}_\alpha=\widetilde{A}_\alpha-\widetilde{B}_\alpha=\left[a_{L_\alpha}-b_{r_\alpha}\ ,a_{r_\alpha}-b_{L_\alpha}\right] \quad (۱-۳۳)$$

- با استفاده از اصل گسترش

تابع عضویت عدد z در مجموعه فازی $\widetilde{C}=\widetilde{A}-\widetilde{B}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu_{\widetilde{A}-\widetilde{B}}(z)=\bigvee_{z=x-y}\left[\mu_{\widetilde{A}}(x)\wedge\mu_{\widetilde{B}}(y)\right] \quad (۱-۳٤)$$

مثال ۱-۲۰) برای دو عدد فازی مثال قبل قرار می‌دهیم: $\widetilde{C}=\widetilde{B}-\widetilde{A}$ همچنین برش ۰/۳ مجموعه‌های فازی $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ را بصورت زیر داریم:

$$A_{۰/۳}=\left[a_{L_{۰/۳}},a_{r_{۰/۳}}\right]=[۱,۵] \quad (۱-۳۵)$$

$$B_{۰/۳}=\left[b_{L_{۰/۳}},b_{r_{۰/۳}}\right]=[۶\ ,\ ۸] \quad (۱-۳٦)$$

برش ۰/۳ مجموعه $\widetilde{C}$ طبق رابطه (۱-۳۳) تفاضل دو فاصله‌ای است که طبق روابط (۱-۳۵) و (۱-۳٦) بدست آمده‌اند.

$$\widetilde{C}_{۰/۳}=\left[b_{L_{۰/۳}},b_{r_{۰/۳}}\right]-\left[a_{L_{۰/۳}},a_{r_{۰/۳}}\right]=\left[b_{L_{۰/۳}}-a_{r_{۰/۳}},b_{r_{۰/۳}}-a_{L_{۰/۳}}\right]=[۶-۵,۸-۱]=[۱,۷] \quad (۱-۳۷)$$

به طور مشابه، برش‌های $\widetilde{C}$ را در سطوح مختلف α بدست آورده و عدد فازی $\widetilde{C}$ را محاسبه می‌نماییم:

$$\widetilde{C}=\{(۰,۰/۲),(۱,۰/۳)\ ,(۲,۰/۶),(۳,۰/۷),(۴,۱),(۵,۰/۷),(۶\ ,۰/۶),(۷,۰/۳),(۸,۰/۲)\} \quad (۱-۳۸)$$

تذکر (۱-۲۱): اگر برای چندین سطح مختلف α، برش‌های A_{α_i} ها فاصله‌های یکسانی باشند برای محاسبه مجموعه‌های فازی، بزرگترین α را برای چنین برشهایی در نظر می‌گیریم.
که این نکته در تشخیص برش‌های α در مجموعه‌های فازی با تابع عضویتهای گسسته و همچنین در اعمال عملگرهای جبری مفید است.

۱-۷-۳) ضرب اعداد فازی

۱- با استفاده از برش α:

$$\tilde{A}.\tilde{B} = \left[a_{L_\alpha}, a_{r_\alpha}\right]\left[b_{L_\alpha}, b_{r_\alpha}\right] \qquad (۱-۳۹)$$

$$\tilde{A}.\tilde{B} = \left[a_{L_\alpha}.b_{L_\alpha}, a_{r_\alpha}.b_{r_\alpha}\right] \qquad (۱-٤٠)$$

۲- با استفاده از اصل گسترش

تابع عضویت عدد قطعی z در مجموعه فازی $\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(z) = \vee_{z=x.y}\left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right] \qquad (۱-٤۱)$$

۱-۷-۴) تقسیم اعداد فازی

۱- با استفاده از برش α:

$$\tilde{A} \div \tilde{B} = \left[a_{L_\alpha}, a_{r_\alpha}\right] \div \left[b_{L_\alpha}, b_{r_\alpha}\right] \qquad (۱-٤۲)$$

$$\tilde{A} \div \tilde{B} = \left[\frac{a_{L_\alpha}}{b_{r_\alpha}}, \frac{a_{r_\alpha}}{b_{L_\alpha}}\right] \quad , \quad b_{r_\alpha} \neq ۰, \; b_{L_\alpha} \neq ۰ \qquad (۱-٤۳)$$

۲- با استفاده از اصل گسترش:

تابع عضویت عدد قطعی Z در مجموعه فازی $\tilde{C} = \tilde{A} \div \tilde{B}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\div\tilde{B}}(z) = \vee_{z=x\div y}\left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right] \qquad (۱-٤٤)$$

۱-۸) اعداد فازی خاص

اعداد مثلثی، ذوزنقه‌ای، مثلثی L-R و ذوزنقه‌ای L-R از جمله اعداد فازی خاص هستند.

تعریف ۱-۲۲) عدد فازی مثلثی L-R

عددی فازی $\tilde{M}$ از نوع L-R است اگر توابع L (برای سمت چپ نقطه ارتفاع) و R (برای سمت راست نقطه ارتفاع) و نیز اسکالرهای $\alpha > ۰$, $\beta > ۰$ با شرایط زیر موجود باشند:

۱) $R(x)=R(-x) \quad , \quad L(-x)=L(x)$

۲) $L(\cdot)=R(\cdot)=1$

۳)R و L روی $[\cdot\ ,\ \infty]$ غیرافزایشی باشد.

به بیان دیگر، عدد فازی $\widetilde{M}$ از نوع L-R مثلثی است اگر و تنها اگر

$$\mu_{\widetilde{M}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & x\le m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & x\ge m \end{cases} \qquad (۱-۴۵)$$

اگر $\alpha=\beta=\cdot$ آنگاه $\widetilde{M}$ برابر عدد قطعی m خواهد بود.

عدد فازی L-R مثلثی اغلب به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\widetilde{M}=(m\ ,\ \alpha\ ,\ \beta) \qquad (۱-۴۶)$$

تعریف (۱-۲۳): عدد فازی ذوزنقه‌ای L-R

عدد فازی $\widetilde{M}'$ از نوع L-R ذوزنقه‌ای است اگر

$$\mu_{\widetilde{M}'}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m_1-x}{\alpha}\right) & ;\quad x\le m_1 \\ 1 & ;\quad m_1\le x\le m_2 \\ R\left(\dfrac{x-m_2}{\beta}\right) & ;\quad x\ge m_2 \end{cases} \qquad (۱-۴۷)$$

تعریف ۱-۲۴) عدد فازی مثلثی

یک عدد فازی مثلثی بصورت $\widetilde{M}=(L,m,U)$ نشان داده می‌شود و به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{\widetilde{M}}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-L}{m-L} & ;\ L\le x\le m \\ \dfrac{U-x}{U-m} & ;\ m\le x\le U \\ \cdot & \text{در سایر جاها} \end{cases} \qquad (۱-۴۸)$$

تعریف ۱-۲۵) عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{M}=(a,b,c,d)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\widetilde{M}'}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b \\ 1 & b\le x\le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c\le x\le d \end{cases} \qquad (۱-۴۹)$$

در واقع اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای، نوع خاصی از اعداد فازی L-R مثلثی و ذوزنقه‌ای هستند کـه کرانهـای آنها خطی است.

۱-۹) روابط فازی

روابط قطعی بر روی حاصلضرب دکارتی یا فضای حاصلضرب دو یا چند مجموعه تعریف می‌شوند. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه X و Y، مجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب (x, y) است که $y \in Y$, $x \in X$ است. در روابط قطعی دو عنصر یا با یکدیگر رابطه دارند و یا ندارند. مثلاً رابطه بخش‌پذیری، R_d، که با عبارت «x مقسوم علیه y است» تعریف می‌شود را روی مجموعه $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ در نظر بگیرید.

از آنجا که بطور واضح یک عدد بر عدد دیگر بخش‌پذیر هست یا نیست، پس رابطه بخش‌پذیری یک رابطه قطعی است که در این مثال تهیه فهرست تمام زوج‌های رابطه کار ساده است.

$$R_d = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۲),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵)\} \quad (۱-۵۰)$$

در روابط فازی نیز عناصر را بصورت دوتایی و بطور کلی nتایی در نظر می‌گیریم که با درجه‌ای به یکدیگر مرتبط می‌شوند. برای پاسخ به اینکه آیا بعضی عناصر دارای وابستگی هستند موضوع درجه مطرح می‌شود.

یک رابطه فازی دوتایی $\widetilde{R}$ که بر روی $X \times Y$ تعریف می‌شود را در نظر بگیرید مانند هر مجموعه فازی، می‌توانیم تمامی زوج‌های رابطه را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$\widetilde{R} = \{(x, y), \mu_{\widetilde{R}}(x, y)\} \quad (۱-۵۱)$$

بطوریکه هر زوج (x, y) به حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ تعلق دارد.

رابطه R برای حاصلضرب دکارتی گسسته $X \times Y$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\widetilde{R} = \sum_{(x_i, y_i) \in X \times Y} \frac{\mu(x_i, y_i)}{(x_i, y_i)} \quad (۱-۵۲)$$

و برای حاصلضرب دکارتی پیوسته داریم:

$$\widetilde{R} = \int_{(X \times Y)} \frac{\mu_{\widetilde{R}}(x, y)}{(x, y)} \quad (۱-۵۳)$$

مثال ۱-۲۶): دو مجموعه گسسته $X = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$ و $Y = \{y_۱, y_۲\}$ را در نظر گرفته و روی حاصلضرب دکارتی آنها رابطه فازی «x مشابه y است» را تعریف می‌کنیم. این رابطه فازی را به چندین روش نمایش می‌دهیم:

$$\widetilde{R} = \frac{۱}{(x_۱, y_۱)} + \frac{۰/۳}{(x_۲, y_۱)} + \frac{۰/۸}{(x_۳, y_۱)} + \frac{۰/۳}{(x_۱, y_۲)} + \frac{۱}{(x_۲, y_۲)} + \frac{۰/۹}{(x_۳, y_۲)} \quad (۱-۵٤)$$

۲- به صورت ماتریسی

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۳ \\ ۰/۳ & ۱ \\ ۰/۸ & ۰/۹ \end{bmatrix} \quad (۱-۵۵)$$

۳- به صورت جدولی

$\widetilde{R} =$ (۱-٥٦)

۱	۰/۳
۰/۳	۱
۰/۸	۰/۹

۱-۱۰) عملیات پایه بر روی روابط فازی

تعریف۱-۲۷) : اجتماع روابط فازی

اجتماع دو رابطه فازی $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ رابطه جدیدی به صورت زیر می‌باشد:

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2 = \int_{X\times Y} \left[\mu_{\widetilde{R}_1}(x,y) \vee \mu_{\widetilde{R}_2}(x,y)\right] / (x,y) \qquad (۱-۵۷)$$

یعنی:

$$\mu_{\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2}(x,y) = \mu_{\widetilde{R}_1}(x,y) \vee \mu_{\widetilde{R}_2}(x,y) \qquad (۱-۵۸)$$

تعریف ۱-۲۸): اشتراک روابط فازی

اشتراک دو رابطه فازی $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ رابطه جدیدی به صورت زیر می‌باشد:

$$R = \widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2 = \int_{X\times Y} \left[\mu_{\widetilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\widetilde{R}_2}(x,y)\right] / (x,y) \qquad (۱-۵۹)$$

یعنی:

$$\mu_{\widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2}(x,y) = \mu_{\widetilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\widetilde{R}_2}(x,y) \qquad (۱-۶۰)$$

تذکر ۱-۲۹): توجه کنید که اجتماع و اشتراک روابط فازی زمانی معنادار است که هر دو رابطه بر روی فضای حاصلضرب دکارتی یکسانی تعریف شده باشند. زمانیکه فضای حاصلضرب دو رابطه متفاوت هستند این عملیات بی‌معنی بوده و به جای آن عملیات ترکیبی متفاوتی خواهیم داشت:

۱-۱۱ ترکیب روابط فازی

روابط فازی تعریف شده بر روی حاصلضرب‌های دکارتی متفاوت می‌توانند به روشهای مختلفی با یکدیگر ترکیب شوند.

ترکیب برای استنباط روشهایی که در توصیف زبانی سیستمها مورد استفاده قرار می‌گیرد حائز اهمیت است.

مجموعه قواعد اگر- آنگاه فازی (الگوریتمهای فازی) از دیدگاه ریاضی هم‌ارز روابط فازی است و ارزیابی قواعد با توجه به ورودیهای خاص از نظر ریاضی با ترکیب هم‌ارز است.

چند نوع ترکیب وجود دارد از جمله ترکیب ماکزیمم- می‌نیمم و ترکیب ماکزیمم- ضرب که متداولترین آنها در کاربردهای مهندسی ترکیب ماکزیمم- مینیمم است.

الف) ترکیب ماکزیمم- مینیمم

در ترکیب ماکزیمم- مینیمم دو رابطه فازی، از عملگرهای متداول مجموعه‌های فازی ماکزیمم ($\vee$) و مینمم ($\wedge$) استفاده می‌شود.

دو رابطه فازی $\widetilde{R}_1(x,y)$, $\widetilde{R}_2(y,z)$ که به ترتیب بر روی حاصلضرب دکارتی $X\times Y$, $Y\times Z$ تعریف شده‌اند را در نظر بگیرید. ترکیب ماکزیمم- مینیمم $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ یک رابطه جدید $\widetilde{R}_1 o \widetilde{R}_2$ می‌باشد که بر روی $X\times Z$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{R}_1 o \widetilde{R}_2 = \int_{X\times Z} \vee \left[\mu_{\widetilde{R}_1}(x,y) \underset{y}{\wedge} \mu_{\widetilde{R}_2}(y,z)\right] / (x,z) \qquad (۱-۶۱)$$

بطوریکه علامت «o» نشان دهنده ترکیب ماکزیمم- می‌نیمم رابطه $\tilde{R}_۱ , \tilde{R}_۲$ است. زمانیکه حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ گسسته است، علامت انتگرال در رابطه فوق بایستی جایگزین شود. درجه عضویت هر زوج (x,z) در رابطه جدید بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{R}_۱ o \tilde{R}_۲}(x,z) = \vee_y \left[\mu_{\tilde{R}_۱}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_۲}(y,z)\right] \qquad (۱-٦۲)$$

عملیات سمت راست رابطه فوق بسیار شبیه به ضرب ماتریسی است همانطور که در مثالهای بعدی خواهیم دید بیشینه‌گیری $(\vee)$ شبیه به جمع (+) و کمینه‌گیری $(\wedge)$ شبیه به ضرب $(\bullet)$ می‌باشد.

ب) ترکیب ماکزیمم- ضرب

ترکیب ماکزیمم- ضرب دو رابطه فازی $\tilde{R}_۱$, $\tilde{R}_۲$ که به ترتیب بر روی حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ و $Y \times Z$ تعریف شده‌اند، یک رابطه جدید بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{R}_۱.\tilde{R}_۲ = \int \vee_y \left[\mu_{\tilde{R}_۱}(x,y).\mu_{\tilde{R}_۲}(y,z)\right] / (x,z) \qquad (۱-٦۳)$$

که تابع عضویت رابطه جدید بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$\mu_{\tilde{R}_۱ . \tilde{R}_۲}(x,z) = \vee \left[\mu_{\tilde{R}_۱}(x,y).\mu_{\tilde{R}_۲}(y,z)\right] \qquad (۱-٦٤)$$

مثال ۱-۳۰) ترکیب ماکزیمم- مینیمم روابط فازی:

ماتریس عضویت رابطه‌های $\tilde{R}_۱$ بر روی $X \times Y$ و $\tilde{R}_۲$ بر روی $Y \times Z$ بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{R}_۱ = \begin{bmatrix} \mu(x_۱,y_۱) & \mu(x_۱,y_۲) & \mu(x_۱,y_۳) & \mu(x_۱,y_۴) \\ \mu(x_۲,y_۱) & \mu(x_۲,y_۲) & \mu(x_۲,y_۳) & \mu(x_۲,y_۴) \\ \mu(x_۳,y_۱) & \mu(x_۳,y_۲) & \mu(x_۳,y_۳) & \mu(x_۳,y_۴) \\ \mu(x_۴,y_۱) & \mu(x_۴,y_۲) & \mu(x_۴,y_۳) & \mu(x_۴,y_۴) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۳ & ۰/۹ & ۰ \\ ۰/۳ & ۱ & ۰/۸ & ۱ \\ ۰/۹ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ \\ ۰ & ۱ & ۰/۸ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱-٦۵)$$

$$\tilde{R}_۲ = \begin{bmatrix} \mu(y_۱,z_۱) & \mu(y_۱,z_۲) & \mu(y_۱,z_۳) \\ \mu(y_۲,z_۱) & \mu(y_۲,z_۲) & \mu(y_۲,z_۳) \\ \mu(y_۳,z_۱) & \mu(y_۳,z_۲) & \mu(y_۳,z_۳) \\ \mu(y_۴,z_۱) & \mu(y_۴,z_۲) & \mu(y_۴,z_۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰/۹ \\ ۱ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰/۳ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۱ \end{bmatrix} \qquad (۱-٦٦)$$

می‌توانیم از رابطه (۱-٦۲) برای بدست آوردن تابع عضویت رابطه ترکیب استفاده کنیم. می‌توانیم از شکل ماتریسی ترکیب ماکزیمم- مینیمم بصورت زیر استفاده کنیم.

$$\tilde{R}_۱ o \tilde{R}_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۳ & ۰/۹ & ۰ \\ ۰/۳ & ۱ & ۰/۸ & ۱ \\ ۰/۹ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ \\ ۰ & ۱ & ۰/۸ & ۱ \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰/۹ \\ ۱ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰/۳ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۱ \end{bmatrix} \qquad (۱-٦۷)$$

برای محاسبه رابطه فوق، شبیه به ضرب ماتریسها بوسیله شکل دادن زوجهای کمینه هر عنصر در ردیف اول ماتریس عضویت $\tilde{R}_۱$ با هر عنصر در ستون اول ماتریس عضویت $\tilde{R}_۲$ عمل می‌کنیم. برای مثال، برای بدست آوردن عنصر اول ترکیب یعنی $(x_۱,z_۱)$، عملیات زیر را انجام می دهیم: