دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی مالی

عنوان:

یک روش توابع پایه‌ای شعاعی جدید برای قیمت‌گذاری اختیارهای آمریکایی تحت مدل پرش-پخش مرتون

استاد راهنما:

دکتر سعید وحدتی

نگارش:

فاطمه ناصری‌نژاد

بهمن ماه ۱۳۹۳

چکیده

یک الگوریتم توابع پایه‌ای شعاعی جدید برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های مالی تحت مدل پرش-پخش مرتون توضیح داده شده است. این روش بر مبنای یک روش تربیع دیفرانسیل است که امکان اجرای شرایط مرزی در یک راه کارآمد را می‌دهد. بعد از تقریب مشتق‌های فضایی، معادلات شبه-گسسته به دست می‌آیند، که با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی بر مبنای روش تربیع دیفرانسیل حل شدند. با استفاده از روش انتگرال‌گیری زمان نمایی و با چندین آزمون عددی، برتری این روش بر روش مشهور کرانک-نیکلسون نشان داده شده است. آزمون‌های عددی مختلفی برای اختیار معامله‌های اروپایی، آمریکایی و بریر برای نشان دادن دقت و کارایی این الگوریتم جدید به کار گرفته شده‌اند. همچنین نشان داده می‌شود که گریک‌های اختیار معامله، همچون اندازه حساسیت‌های دلتا و گاما به شایستگی با دقت بالا محاسبه شده است.

کلمات کلیدی: فرآیندهای لوی، مدل‌های پرش-پخش، اختیار معامله‌های آمریکایی، توابع پایه‌ای شعاعی، تربیع دیفرانسیل، انتگرال‌گیری زمان نمایی.

فهرست مطالب

فصل ۱
تعریف‌ها و قضیه‌ها

۱.۱ مقدمه

قیمت دارایی در مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی پرش-پخش مرتون[۱] از یک فرآیند پخش لگاریتم نرمال به اضافه‌ی فرآیند پرش پواسن با شدت ثابت، پیروی می‌کند. فرآیندهای لوی[۲] نمایی دارای این ویژگی هستند که بر اثر یک اتفاق خارجی، یک حرکت ناگهانی در قیمت به وجود می‌آید. قابلیت رسیدن به خصوصیات قطعی هم چون دم سنگین در سری‌های زمانی مالی باعث شده است که پژوهشگران زیادی به توسعه‌ی الگوریتم‌های سریع برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله بپردازند. به علاوه، فرض نرمال بودن برای توزیع اندازه‌ی پرش پواسن، امکان استخراج جواب‌های تحلیلی صریح برای اختیارهای خرید و فروش اروپایی را می‌دهد و این جواب‌های صریح را می‌توان به عنوان یک معیار برای آزمودن دقت یک روش جدید به کار گرفت. در مقابل، هیچ جواب تحلیلی و بسته‌ای برای اختیارهای معامله با ویژگی اعمال قبل از موعد، وجود ندارد، بنابراین اختیار معامله‌های آمریکایی را باید با روش‌های عددی قیمت‌گذاری کرد.

تحت مدل مرتون، معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله، یک معادله انتگرال دیفرانسیل جزئی[۳] (PIDE) است که شامل یک پیچش انتگرال روی دامنه‌ی نامتناهی است. این انتگرال غیر موضعی منجر به یک ماتریس

[۱] Merton's jump-diffusion model
[۲] levy processes
[۳] partial integral-differential equation

گسسته‌سازی چگالی می‌شود، که این روش کاملا ضمنی با مشکلاتی همچون معکوس ماتریس چگالی مواجه می‌شود. در روش‌هایی که توسط هالوین و همکارانش[1] در [۱۳] و آلمندرال و اوسترلی[2] (AO) در [۱] پیشنهاد شده است از یک روند تکرار برای حل معدلات گسسته استفاده شده است.

بسیاری از روش‌های دیگر، از روش رانگ—کوتا استفاده می‌کنند که بعدها کانت و ولتچکوا[3] در [۱۲] و براینی[4] در [۶] عبارت انتگرال را به صورت ضمنی در نظر گرفتند.

روش های بالا برای عبارت‌های مشتق از روش گسسته‌سازی استاندارد برای تقریب عبارت انتگرال همبستگی در PIDE از روش ذوزنقه‌ای استفاده کردند. این انتگرال همبستگی را می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه سریع محاسبه کرد، اما کار و مایو[5] در [۸] نشان دادند که برای مدل مرتون با حل عددی یک معادله گرما با سرعت بیشتری می‌توان عبارات انتگرال را محاسبه کرد.

بسیاری از الگوریتم‌های پیشنهاد شده برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل مرتون، تقریب‌های تفاضل متناهی[6] (FD) یا مولفه متناهی را برای عبارت‌های فضایی، و روش‌های گام زمانی همانند روش های کرانک-نیکلسون[7] (CN) و فرمول تفاضل‌گیری پشرو [8](BDF۲) را برای عبارات انتگرالی به کار گرفتند.

روش‌های کمی بر مبنای تقریب مشتق‌های فضایی در معادله قیمت‌گذاری با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی (RBF)[9] پیشنهاد شده است و اکثر الگوریتم‌های توسعه یافته برای مدل بلک-شولز هستند، هون و مائو[10] در [۲۰،۲۱] از RBF چند ربعی برای تقریب مشتقات استفاده کردند. فاشهوور[11] و همکارانش در [۱۵] یک الگو ریتم RBF برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی با چند دارایی پایه را پیشنهاد دادند.

هدف اصلی این پژوهش توسعه یک الگوریتم کارآمد با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی، آمریکایی و مانع[12] تحت مدل پرش—پخش مرتون است. با روشی که در این

[1] d’Halluin et al.
[2] Almendral and Oosterlee
[3] Cont and Voltchkova.
[4] Briani.
[5] Carr and Mayo
[6] finit difference
[7] Crank–Nicolson
[8] Backward differentition formula
[9] radial basis functions
[10] Hon and Mao
[11] Fasshauer
[12] barier option

پژوهش پیشنهاد شده است، می‌توان اندازه حساسیت‌های پوشش ریسک را نیز با دقت محاسبه کرد. در روش پیشنهاد شده دو عنصر جدید وجود دارد. اولی، استفاده از یک روش تربیع دیفرانسیل[۱] (DQ) برای گسسته‌سازی فضایی و دومی، استفاده از روش انتگرال‌گیری زمان نمایی است که قبلا با توابع پایه‌ای شعاعی به کار گرفته شده‌اند. روش ETI[۲] در [۳۷]، برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله پیشنهاد شد و به دلیل دقت در ویژگی‌های زمانی، در مقالات دیگری نیز توسعه داده شد و نتایج این مقالات نشان می‌دهد که روش ETI برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی، یک روش گام زمانی بسیار کارآمد است. اخیرا چان و هوبرت[۳] (CH) در [۹]، یک الگوریتم برمبنای RBF نوار مکعبی و انتگرال‌گیری زمانی با استفاده از روش RBF برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله تحت مدل مرتون، پیشنهاد دادند. در این پژوهش چندین آزمون عددی آورده شده است که نشان می‌دهد روش پیشنهاد شده در این پژوهش که با RBF-DQ مشخص شده است، برتری و کارایی بیشتری دارد.

برای اجرای الگوریتم‌های RBF برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله از شرایط مرزی دیریکله به جای شرایط مرزی نویمان استفاده می‌شود. چون اجرای شرایط مرزی به صورت ضریب، سراسری است و بیان شرایط مرزی در عبارت‌های ضرایب نامعلوم در ترکیب‌های خطی RBF را بسیار مشکل می‌کند. در این پژوهش، همچنین نشان داده می‌شود که استفاده از RBF بر مبنای DQ در ترکیب با روش ETI یک الگوریتم تاثیرگذار و کارآمد برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی تحت مدل مرتون نیز می‌باشد.

در فصل اول این پژوهش قضایا، مفاهیم و تعریف‌های مورد نیاز آورده شده است. در فصل دوم مبانی نظری روش RBF بر مبنای DQ برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله به طور کامل توضیح داده شده است و در فصل سوم نتایج عددی الگوریتم‌های به دست آمده با مثال‌های زیادی آمده است.

۲.۱ تاریخچه

تحت مدل مرتون، معادله قیمت‌گذاری اختیار، یک معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی است که شامل یک پیچش انتگرال روی یک دامنه‌ی متناهی است. براینی و ناتالینی (۲۰۰۷) در [۶] این انتگرال‌های غیر موضعی

[۱] differential quadrature
[۲] exponential time integration
[۳] Chan and Hubbert

را به فرم یک ماتریس گسسته‌سازی چگال تبدیل کردند، به طوریکه این راه حل کاملا ضمنی با مشکلی همچون معکوس کردن ماتریس چگال مواجه شد در حالیکه راه حل‌های غیرضمنی محدودیت‌های پایداری را تحمیل می‌کنند. آلمندرال و اوسترلی (۲۰۰۵) در [۱] یک مدل پرش-پخش با تنها یک دارایی را در نظر گرفتند. با این فرض، ارزش اختیار اروپایی از یک معادله انتگرال جزئی به دست می‌آید. آنها این معادله را با استفاده از مشتقات متناهی و فرمول بازگشتی مرتبه دوم گسسته‌سازی کردند و با استفاده از روش شکافت ساده ماتریس، معادله را حل کردند. همچنین با استفاده از الگوریتم تبدیل فوریه سریع زمان اجرای کار را بسیار کاهش دادند.

برای قیمت‌گذاری اختیارهای مالی که دارایی پایه‌ی آنها یک فرآیند لوی است نیز می‌توان از معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی استفاده کرد. کانت و ولتچکوا (۲۰۰۵) در [۱۲] روش مشتقات متناهی ضمنی-غیر ضمنی را برای حل این معادله به کار گرفتند.

اندرسن و آندریسن (۲۰۰۰) در [۲] ابتدا یک معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی برای قیمت‌گذاری اختیار های خرید اروپایی به دست آوردند و نشان دادند که نتایج معادله را می‌توان برای متناسب کردن مدل برای مشاهده‌ی الگوهای لبخند یا اریب به کار گرفت. سپس روش مشتقات متناهی ADI را برای قیمت‌گذاری اختیار معرفی کردند و نشان دادند که به طور غیر مشروط پایدار است و اگر با روش تبدیل فوریه سریع ترکیب شود، بسیار کارا خواهد بود.

در پژوهش‌های قبلی روش گسسته‌سازی استاندارد برای عبارت مشتق و از روش ذوزنقه‌ای برای تقریب انتگرال همبستگی در معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی به کار گرفته شده است. این انتگرال همبستگی را می‌توان با تبدیل فوریه سریع هم محاسبه کرد. اما مایو و کار (۲۰۰۷) در [۸] مشاهده کردند که در مدل مرتون، عبارت انتگرالی معادله را می‌توان با روش‌های عددی با سرعت بیشتری محاسبه کرد.

بسیاری از الگوریتم‌هایی همانند روش کرانک و نیکلسون و فرمول دیفرانسیل بازگشتی که برای حل مسائل قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل مرتون پیشنهاد شده‌اند، مشتقات متناهی را برای دوره‌های فضایی به کار گرفتند. در روش‌هایی که بر اساس تقریب فضای مشتقات در معادله قیمت‌گذاری پیشنهاد شده است، در تعداد بسیار کمی از آنها از توابع پایه‌ای شعاعی استفاده شده است و بیشتر الگوریتم‌ها برای مدل بلک-شولز

توسعه داده شده‌اند.

هون و ماوو (۱۹۹۹) در [۸] از توابع پایه‌ـای شعاعی چند ربعی برای تقریب فضای مشتقات استفاده کردند و فاشهوور، خالق و ووس (۲۰۰۴) در [۷] الگوریتم توابع پایه‌ـای شعاعی را برای قیمت‌گذاری اختیارهای آمریکایی با چند دارایی پایه را پیشنهاد دادند.

لارسن، اهلاندر و هال[۱] (۲۰۰۸) در [۲۴] نشان دادند که با استفاده از تبدیل فوریه می‌توان هزینه و حافظه لازم برای انجام محاسبات روش توابع پایه‌ای شعاعی برای قیمت‌گذاری اختیارهای چند بعدی را کاهش داد. آنها همچنین یک الگوریتم برای حل معادله بلک-شولز به دست آوردند که می‌توان آن را برای هر بعد دلخواهی به کار گرفت.

۳.۱ اختیار معامله‌ها

در این قسمت ابتدا به ارائه تعریفی از اختیار معامله می‌پردازیم و سپس مفاهیم مرتبط با اختیار معامله‌های مورد نیاز در این پایانامه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. (اختیار معامله) اختیار معامله قراردادی است که به دارنده‌اش این اختیار و نه اجبار را می‌دهد تا در زمان تعیین شده‌ی T در آینده، دارایی مورد نظر را با قیمت K بخرد یا بفروشد. زمان T که در آن خرید(فروش) می‌تواند انجام پذیرد را زمان سررسید یا تاریخ انقضا می‌نامند و قیمت K که باید با آن خرید(فروش) صورت پذیرفت را قیمت توافقی می‌نامند. بالاخره، دارایی که بر اساس آن سهام بورس آمده در اختیار معامله تشکیل شده است را دارایی پایه می‌نامند.

۱.۳.۱ انواع اختیار معامله

در این قسمت ابتدا انواع اختیار معامله از نظر حق خرید یا فروش و سپس از نظر سررسید اختیار معامله مطرح می‌گردد. به طور کلی دو نوع اختیار معامله وجود دارد

[۱] Larsson, K. Åhlander, and A. Hal

۱- قرارداد اختیار خرید: این قرارداد به دارنده‌ی آن، این حق را می‌دهد تا دارایی را در تاریخ معینی و با قیمت مشخصی خریداری نماید.

۲-قرارداد اختیار فروش: این قرارداد به دارنده‌ی آن، حق فروش یک دارایی در تاریخ معین و با قیمت مشخص را می‌دهد.

دو نمونه از انواع اختیار معامله‌ها به نام اروپایی و آمریکایی را در زیر تعریف می‌کنیم:

۱-اختیار معامله اروپایی: این نوع اختیار معامله به دارنده، اختیار خرید یا فروش دارایی را فقط در تاریخ سررسید می‌دهد. بنابراین دارنده‌ی این نوع اختیار معامله در طول دوره تا تاریخ سررسید، حق اعمال یا به اجرا گذاشتن اختیار را نخواهد داشت.

۲-اختیار معامله آمریکایی: این نوع اختیار معامله به دارنده، اختیار خرید یا فروش دارایی را از هنگام انعقاد قرارداد تا تاریخ سررسید می‌دهد. بنابراین دارنده‌ی این نوع اختیار با آزادی بیشتری در طول زمان قادر به اعمال اختیار است.

۲.۳.۱ بازدهی اختیار معامله‌ها

با به دست آوردن بازده‌ی اختیار معامله می‌توان تصمیم درست را در مورد به اجرا گذاشتن یا نگذاشتن اختیار معامله گرفت. بازده‌ی اختیار خرید(بازده حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی) عبارت است از

$$max\{S_T - K, ۰\} = (S_T - K)^+$$

که در آن S_T قیمت دارایی پایه در زمان سررسید و K قیمت توافقی آن دارایی در قرارداد اختیار معامله است. در صورتی که $S_T \geq K$ ، با توجه به بازده‌ی اختیار معامله واضح است که به اجرا گذاشتن این حق برای دارنده‌ی آن سودمند خواهد شد و از این رو سرمایه‌گذار، اختیار معامله را به اجرا می‌گذارد. بازده‌ی اختیار فروش نیز به صورت

$$max\{K - S_T, ۰\} = (K - S_T)^+$$

می‌باشد و دارنده‌ی اختیار فروش تنها در صورتی قرارداد را به اجرا می‌گذارد که $S_T \leq K$. بنابراین خریدار اختیار خرید امیدوار است که قیمت دارایی پایه افزایش یابد، در حالی که خریدار اختیار فروش انتظار دارد که قیمت دارایی پایه کاهش یابد.

۳.۳.۱ کاربرد اختیار معامله

برای اختیار معامله‌ها چهار موضع خرید اختیار خرید، فروش اختیار خرید، خرید اختیار فروش و فروش اختیار فروش می‌توان در نظر گرفت. موارد استفاده اختیار معامله را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

۱-پوشش ریسک مالی یا مدیریت ریسک

۲-بورس بازی و استفاده از این ابزار برای افزایش دادن منافع و بازده‌ی هنگام تغییر قیمت‌ها

۳-ایجاد درآمد از طریق فروش اختیار معامله

۴.۳.۱ اختیار معامله‌ی مانع

در این بخش به بعضی از مفاهیم مالی درباره‌ی نوع خاصی از اختیارها اشاره می‌شود. یکی از خصوصیات بازار مشتقات خارج از بورس وجود تعداد زیادی از محصولات غیر استاندارد یا غیر متعارف است که توسط مهندسان مالی ابداع و ایجاد می‌شوند. هر چند که معمولا این قبیل محصولات بخش کوچکی از بدره یا سبد سرمایه‌گذاری را تشکیل می‌دهد، با این حال چون عموما سودآوری این محصولات بیشتر از محصولات استاندارد است لذا اهمیت زیادی برای یک بانک سرمایه‌گذاری دارند.

این نوع محصولات غیر استاندارد برای اهداف متفاوتی به کار گرفته می‌شوند. برخی اوقات واقعا جهت انجام پوشش ریسک به کار می‌روند. گاهی اوقات بنا به دلایل مالیاتی، حسابداری، قانونی یا مقرراتی است که مدیر خزانه‌داری، محصولات غیر استاندارد را جذاب‌تر می‌یابد. گاهی اوقات این محصولات به منظور انعکاس دیدگاه مدیر خزانه‌داری در مورد حرکات احتمالی متغیرهای اساسی بازار در آینده طراحی می‌شوند. برخی مواقع پیش می‌آید که یک محصول غیر استاندارد که توسط بانک سرمایه‌گذار طراحی شده است، ممکن

است در ظاهر برای یک مدیر خزانه‌داری جذاب‌تر از آن‌چه هست، به نظر برسد.

در قراردادهای اختیارمعامله آمریکایی استاندارد، در هر زمانی از طول عمر قرارداد می‌توان اختیار معامله را اعمال کرد و به اجرا گذاشت و همواره قیمت اعمال یکسان است. در عمل آن دسته از قراردادهای اختیار معامله‌ای که در بازارهای خارج از بورس داد و ستد می‌شوند، همیشه این ویژگی‌های استاندارد را ندارند. برای مثال می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

الف- ممکن است اعمال زودتر از موعد سررسید قرارداد، فقط در مجموعه‌ای متناهی از زمان امکان‌پذیر باشد، در این صورت اختیار معامله را برمودان می‌نامند.

ب- اعمال زودتر از موعد سررسید قرارداد، ممکن است فقط در بخشی از طول عمر قرارداد جایز باشد.

پ- ممکن است قیمت توافقی در طول عمر قرارداد تغییر یابد.

در این پژوهش نوعی از اختیارهای معامله به نام اختیار مانع مورد بررسی قرار می‌گیرد. اختیار معامله‌های مانع گونه‌ای از اختیار معامله‌های عجیب‌اند که از بعضی جهات شبیه اختیار معامله‌های معمولی هستند. تعریف کلی این نوع اختیار معامله‌ها به صورت زیر است

تعریف ۲.۳.۱. به گونه‌ای از اختیارهای معامله که تابع عایدی آنها بستگی به این دارد که آیا قیمت دارایی به یک مقدار از پیش تعیین شده (مانع) می‌رسد و یا از آن تجاوز می‌کند، اختیار معامله مانع گفته می‌شود.

۴.۱ اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک

در این بخش پس از ذکر چند تعریف، قضیه گیرسانو[1] برای حرکت براونی را بیان می‌کنیم و سپس اندازه ریسک-خنثی[2] را تعریف می‌نماییم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید P و Q دو اندازه روی فضای اندازه‌پذیر$(\Omega, \mathcal{F})$ هستند. اگر تابع اندازه‌پذیر و نامنفیf چنان وجود داشته باشد که

$$Q(A) = \int_A f(\omega)\, dP(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

[1] Girsanov Theorem
[2] Risk-Natural Measure

در این صورت، f را تابع چگالی Q نسبت به P می‌نامند و Q را مطلقا پیوسته نسبت بهP می‌گویند. به طور مشابه می‌توان با تغییر نقش P به جای Q تابع چگالی Pرا نسبت به Q، یعنی g ، به شرط آن که چنین تابع اندازه‌پذیر و نامنفی‌ای موجود باشد، معرفی کرد.

تعریف ۲.۴.۱. (اندازه‌های معادل): فرض کنید Pو Q دو اندازه‌ی احتمال روی فضای اندازه‌پذیر$(\Omega, \mathcal{F})$ باشند. اگر Pنسبت به Qمطلقا پیوسته و Q نیز نسبت به P مطلقا پیوسته باشد، آنگاه P و Q را اندازه‌های احتمال معادل گویند.

تعریف ۳.۴.۱. (فرصت آربیتراژ): اگر در جریان یک معامله بتوان بدون گذاشتن سرمایه با احتمال مثبت درآمدی را به دست آورد و با احتمال صفر ضرری متحمل شد، در این صورت گوییم که در این معامله فرصت آربیتراژ وجود دارد.

قضیه ۴.۴.۱. *(قضیه گیرسانو برای حرکت براونی): فرض کنیم* $\{w_t, \circ \leq t \leq T\}$ *حرکت براونی روی فضای احتمال* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *و* $\mathcal{F}_t$ *یک پالایه برای این حرکت براونی باشد. فرض کنید* $\Theta(t)$ *به ازای* $\circ \leq t \leq T$ *یک فرآیند سازگار باشد و*$Z(t)$ *به صورت زیر تعریف شود*

$$Z\left(t\right) = e^{-\int\limits_{\circ}^{t}\Theta(u)dw(u) - \frac{۱}{۲}\int\limits_{\circ}^{t}\Theta^{۲}(u)du}$$

و همچنین داشته باشیم

$$\tilde{w}\left(t\right) = w\left(t\right) + \int\limits_{\circ}^{t}\Theta\left(u\right)du \;\; and \;\; E\left(\int\limits_{\circ}^{T}\Theta^{۲}\left(u\right)Z^{۲}\left(u\right)du\right) < \infty$$

قرار میدهیم$Z = Z(T)$ *. در این صورت* $E(Z) = ۱$ *و تحت اندازه احتمال* P *تعریف شده در قبل فرآیند* $\{\widehat{w}_t, \circ \leq t \leq T\}$ *یک حرکت براونی است.*

هنگامی که یک حرکت براونی مانند w_t را تعریف می‌کنیم، آن را با ویژگی‌هایش از جمله نموهای مستقل و مانا و دارای توزیع نرمال می‌شناسیم. این ویژگی‌ها به اندازه احتمال P روی فضای Ω برمی‌گردند. لذا زمانی که می‌گوییم که w_tحرکت براونی نیست منظور این است که نسبت به اندازه احتمال P حرکت براونی نیست. حال این سوال پیش می‌آید که آیا اندازه‌ی احتمال دیگری روی Ωوجود دارد که w_t نسبت به آن حرکت براونی

باشد؟ جواب مثبت است و این احتمال توسط قضیه‌ی گیرسانو تعریف شده است و به آن نام اندازه ریسک-خنثی می‌دهند. همچنین قضیه گیرسانو بیان می‌کند که با تغییر اندازه‌ی اصلی P به اندازه‌ی ریسک-خنثی $\widehat{P}$ که توسط مشتق رادون-نیکودیم به دست می‌آید می‌توان جمله رانش فرآیند مورد نظر را به گونه‌ای تغییر داد که فرآیندی که قبلا تحت اندازه‌ی P مارتینگل نبوده اکنون تحت اندازه‌ی جدید $\widehat{P}$ مارتینگل شود.

حال به تعریف دقیقی از اندازه ریسک-خنثی می‌پردازیم فرآیند تنزیل[۱] زیر را تعریف کرده

$$D\left(t\right)=e^{-\int\limits_{\circ}^{t}R(u)du}$$

که در آن فرض می‌کنیم فرآیند نرخ بهره‌ی $R(t)$ سازگار باشد.

تعریف ۱.۴.۵. یک اندازه احتمال $\widehat{P}$ ، اندازه ریسک-خنثی گفته می‌شود هر گاه شرایط زیر برقرار باشد

۱) $\widehat{P}$ و P اندازه‌های معادل باشند (یعنی برای هر $A\in\mathcal{F}$، $P(A)=\circ$ اگر و تنها اگر $\widehat{P}(A)=\circ$)

۲) تحت اندازه $\widehat{P}$ ، قیمت سهام تنزیل شده $s_i(t)D(t)$ به ازای هر $i=۱,...,m$ یک مارتینگل باشد.

بنابراین به این نتیجه بسیار مهم می‌رسیم که تنها هنگامی فرصت آربیتراژ وجود ندارد که یک اندازه احتمال ریسک خنثی نسبت به $\widehat{P}$ موجود باشد. همچنین اندازه ریسک-خنثی[۲] ، اندازه مارتینگل معادل نیز نامیده می‌شود.

۱.۵ فرآیندهای لوی

تعریف ۱.۱.۵. فرآیند تصادفی X روی $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},P)$ را در نظر می‌گیریم، گوییم فرآیند تصادفی X مسیرهای از راست پیوسته و دارای حد چپ دارد و به اختصار می‌نویسیم فرآیند RCLL[۳] است، هرگاه $\Omega_\circ$، متعلق به $\mathcal{F}$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $P\left(\Omega_\circ\right)=۱$ و مسیر $X_t\left(\omega\right)$ برای $t\geq\circ$ از راست پیوسته و برای $t>\circ$ دارای حد چپ متناهی باشد.

تعریف ۲.۱.۵. فرآیند تصادفی $X=\left(X_t\right)_{t\geq\circ}$ با مقادیری در $\mathbb{R}^d$ $(d\in\mathbb{N})$ فرآیند لوی است، هرگاه دارای ویژگی های زیر باشد.

[۱] Discount Process
[۲] Equivalent Martingle Measure
[۳] Right Continuous with Left Limit

۱. با احتمال یک از صفر شروع شود ($P\left(X_{0}=0\right)=1$).

۲. فرآیند X دارای نموهای مستقل باشد. یا به عبارت دیگر برای تمام $n \in \mathbb{N}$ و $0 \leq t_{0} \leq t_{1} \leq \cdots \leq t_{n}$ متغیرهای تصادفی X_{t_0} ، $X_{t_1}-X_{t_0}$ ، ... و $X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ مستقل باشند.

۳. فرآیند دارای نموهای مانا باشد. یا به طور معادل داشته باشیم:

$$X_{t+s}-X_{s} \stackrel{d}{=} X_{t}-X_{0}, \quad s, t \geq 0$$

۴. فرآیند در احتمال پیوسته [۱] است یا به طور معادل داشته باشیم:

$$\forall t \geq 0, \forall \varepsilon>0, \quad \lim _{s \rightarrow t} P\left(\left|X_{s}-X_{t}\right|>\varepsilon\right)=0$$

۵. با احتمال یک RCLL باشد.

در بیان شرط فوق می توان شرط (۴) را به عنوان نتیجه ای از شرایط (۱)، (۳) و (۵) در نظر گرفت. برای مشاهده جزئیات بیشتر به ساتو (۱۹۹۹) مراجعه کنید.

توزیع احتمال μ مربوط به متغیر تصادفی Z با مقادیری در $\mathbb{R}^d$ بینهایت بارتقسیم پذیر نامیده می‌شود، اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، توزیع احتمال دیگری مثل μ_n وجود داشته باشد (دنباله .i.i.d [۲] از متغیرهای تصادفی $Z_{1,n}$ ،...و $Z_{n,n}$ با توزیع μ_n وجود داشته باشد) به طوری که

$$\mu=\mu_{n}^{* n} \quad\left(Z \stackrel{d}{=} Z_{1, n}+\ldots+Z_{n, n}\right)$$

از تعریف فرآیند لوی به سادگی نتیجه می‌شود که برای هر $t>0$ و ثابت، توزیع X_t بینهایت بار تقسیم‌پذیر است و برعکس برای هر اندازه احتمال μ که بینهایت بار تقسیم‌پذیر باشد فرآیند لوی $(X_t)_{t\geq 0}$ را به گونه‌ای می‌توان انتخاب کرد که $\mathcal{L}\left(X_{1}\right)=\mu$.

قضیه ۳.۵.۱. *(فرمول لوی-خین چین [۳]) فرض کنید $(X_t)_{t\geq 0}$ یک فرآیند تصادفی لوی با مقادیری در $\mathbb{R}^d$ باشد. آن‌گاه سه تایی یکتای (A_X, Π_X, γ_X) به نام مشخصه سه تایی فرآیند لوی، شامل ماتریس متقارن و*

[۱] continuous in probability
[۲] independent and identically distributed
[۳] Levy-Khintchine formula

معین نامنفی $(A_X)_{d\times d}$ ، اندازه‌ی Π_X (به نام اندازه لوی) روی $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ با شرط

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min\left\{|x|^2, 1\right\} \Pi_X(dx) < \infty \tag{1.1}$$

و ثابت $\gamma_X \in \mathbb{R}^d$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$E\left[e^{izX_t}\right] = e^{t\psi_X(z)} \tag{2.1}$$

به طوری که

$$\psi_X(z) = \frac{-1}{2}\langle z, A_X z\rangle + i\langle \gamma_X, z\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\left(-1 + e^{i\langle z,x\rangle} - i\langle z,x\rangle 1_{|x|\le 1}\right)\Pi_X(dx) \tag{3.1}$$

مشخصه نمایی X است.

و برعکس، به ازای هر سه تایی (A_X, Π_X, γ_X) شامل ماتریس متقارن و معین نامنفی $(A_X)_{d\times d}$ و اندازه Π_X روی $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ با شرط $\int_{\mathbb{R}^d} \min\left\{|x|^2, 1\right\} \Pi_X(dx) < \infty$ و ثابت $\gamma_X \in \mathbb{R}^d$ ، فرآیند لوی یکتا در توزیع [1] به گونه‌ای که در ۲.۱ و ۳.۱ صدق کند، وجود دارد.

اثبات. [ساتو، ۱۹۹۹].

۶.۱ معادله گرما

در این بخش معادله‌ی یک بعدی غیر خطی گرما معرفی می‌شود. این معادله از شکل کلی معادله‌ی انتشار جسم انتقال دهنده‌ی گرما که به صورت زیر است، به دست می‌آید

$$g(x)\,u_t = \left(f(u)\,u_x\right)_x + h(u)\,u_x \tag{4.1}$$

معادلاتی به شکل (۴.۱) برای مدل‌سازی مفاهیم زیادی در فیزیک، مهندسی و شیمی به کار گرفته می‌شوند. اگر در معادله‌ی (۴.۱)، $g(x) = 1$ باشد این معادله، انتقال آب در یک فضای غیر همگن را بیان می‌کند. اگر $h(u) = 0$ باشد، این نوع معادلات حرکات ایستایی از یک لایه‌ی مرزی سیال روی سطح هموار را توصیف می‌کنند. حال اگر در معادله‌ی (۴.۱)، $g(x) = 1$ و $h(u) = 0$ هم‌زمان برقرار باشد، آن‌گاه معادله‌ی غیر خطی حرارت که به صورت زیر است، حاصل می‌شود

$$u_t = \left(f(u)\,u_x\right)_x. \tag{5.1}$$

[1] unique up to identity in law

معادله‌ی خطی گرما با قرار دادن $f(u) = ۱$ در معادله (۵.۱) به صورت زیر به دست می‌آید

$$u_t = u_{xx} \tag{۶.۱}$$

که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که انتقال گرما در یک ماده را توصیف می‌کند و در آن میزان جریان حرارت متناسب با گرادیان دما است.

۷.۱ روش تفاضلات متناهی

در فصل دوم، در مواردی به حل معادله‌ی گرما که یک معادله دیفرانسیل جزئی است اشاره شده است. بعضی اوقات معادله گرما از معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز ساده‌تر است، بنابراین بهتر است که معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز را به یک معادله گرمای یک بعدی تبدیل کرد. لذا در این بخش به حل عددی این معادلات با روش‌های مشتقات متناهی پرداخته می‌شود.

معادله گرمای یک بعدی به صورت زیر است

$$u_\tau - \kappa u_{xx} = ۰ \tag{۷.۱}$$

برای $a \leq x \leq b$ و $۰ \leq \tau \leq T$ ، با شرط ابتدایی زیر

$$u(x, ۰) = f(x) \tag{۸.۱}$$

و شرط مرزی آن نیز به صورت زیر است

$$u\left(a, \tau\right) = g\left(\tau\right) \tag{۹.۱}$$

$$u\left(b, \tau\right) = h\left(\tau\right) \tag{۱۰.۱}$$

برای به کار گرفتن روش تفاضل متناهی باید یک شبکه گسسته با دامنه پیوسته $D = \{a \leq x \leq b; ۰ \leq \tau \leq T\}$ را تعریف کرد. ساختار اساسی اکثر شبکه‌های گسسته به این صورت است که M زبر بازه‌ی مساوی

روی محور τ و N زیر بازه‌ی مساوی روی محور x در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب شبکه‌ی زیر روی $[a.b] \times [\circ, T]$ به دست می‌آید

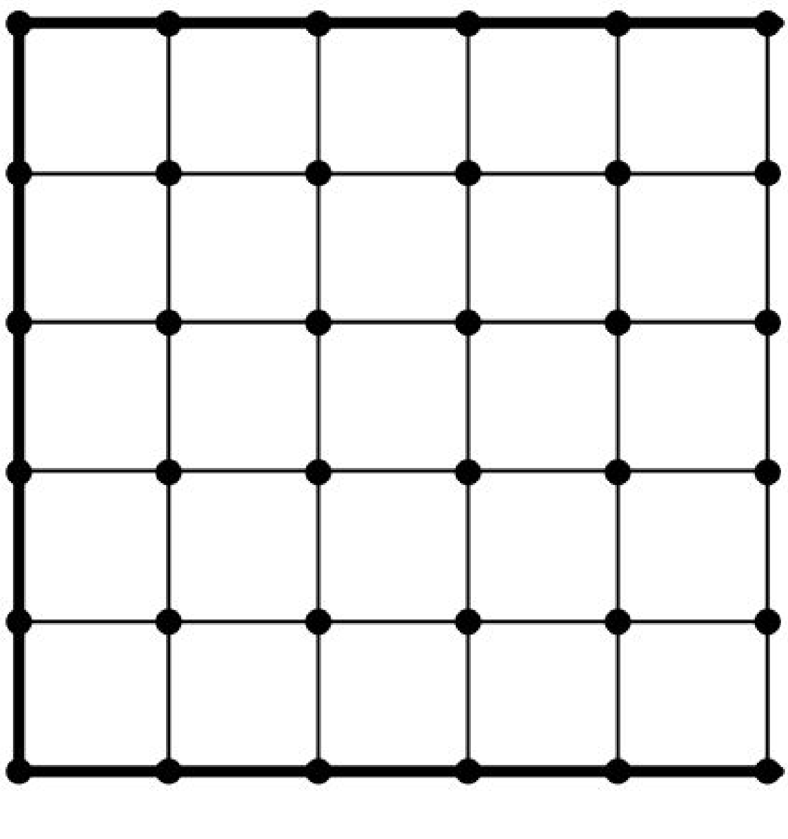
$$\bar{D} = \left\{ \begin{array}{l} x_j = a + (j - ۱)\,\Delta x; \Delta x = \dfrac{b-a}{N}; j = ۱, ..., N + ۱ \\ \tau_k = \circ + (k - ۱)\,\Delta \tau; \Delta \tau = \dfrac{T - \circ}{M}; k = ۱, ..., M + ۱ \end{array} \right\} \qquad (۱۱.۱)$$

برای نشان دادن تکنیک تفاضل متناهی در این بخش، برای مثال از یک شبکه استفاده شده است که در شکل (۱.۱) نشان داده شده است. در این شکل خطوط پررنگ نشان‌دهنده‌ی شرایط مرزی هستند. برای به کار گرفتن روش تفاضل متناهی باید عملگر دیفرانسیل زیر نیز به صورت یک معادله‌ی تفاضلی نوشته شود

$$\mathcal{L}\,(u) = u_\tau - \kappa u_{xx} = \circ \qquad (۱۲.۱)$$

در بخش بعد، $u_{j,k}$ مقدار دقیق $u(x = x_j, \tau = \tau_k)$ و $U_{j,k}$ مقدار تقریبی گسسته‌سازی شده است.

شکل ۱.۱: مثال شبکه‌بندی



۱.۷.۱ گسسته‌سازی صریح

روش گسسته‌سازی صریح تنها از تقریب‌های تفاضل پیشرو در زمان استفاده می‌کند. تمام نقاط شبکه، در زمان $\tau = t$ یک برش زمانی نام دارد که شامل تمام جواب‌های روی شبکه در آن زمان است. روش گسسته‌سازی صریح این امکان را می‌دهد که جواب‌های PDE در هر زمان روی برش کنونی، از نقاط زمان قبلی به‌صورت مستقل از هر نقطه برش فعلی، به دست آورده می‌شود. برای گسسته‌سازی PDE در نقطه (x_j, τ_k) از شبکه، که به آن نقطه مرجع گفته می‌شود، از تقریب تفاضل پیشرو برای اولین عبارت $\frac{\partial u(x_j, \tau_k)}{\partial \tau}$ و تقریب تفاضل مرکزی برای عبارت پخش، $\frac{\partial^۲ u(x_j, \tau_k)}{\partial x^۲}$، استفاده می‌شود.

تقریب تفاضل پیشرو عبارت اول به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial u(x_j, \tau_k)}{\partial \tau} = \frac{u_{j,k+۱} - u_{j,k}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau)$$

و تقریب تفاضل مرکزی عبارت دوم نیز به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial^۲ u(x_j, \tau_k)}{\partial x^۲} = \frac{u_{j-۱,k} - ۲u_{j,k} + u_{j+۱,k}}{\Delta x^۲} + O(\Delta x^۲)$$

بنابراین معادلات زیر در نقطه (x_j, τ_t) به دست آورده می‌شوند.

$$\begin{aligned} u_\tau(x_j, \tau_k) - \kappa u_{xx}(x_j, \tau_k) &= ۰ \\ \frac{u_{j,k+۱} - u_{j,k}}{\Delta \tau} - \kappa \frac{u_{j-۱,k} - ۲u_{j,k} + u_{j+۱,k}}{\Delta x^۲} &= O(\Delta x^۲) + O(\Delta \tau) \end{aligned}$$

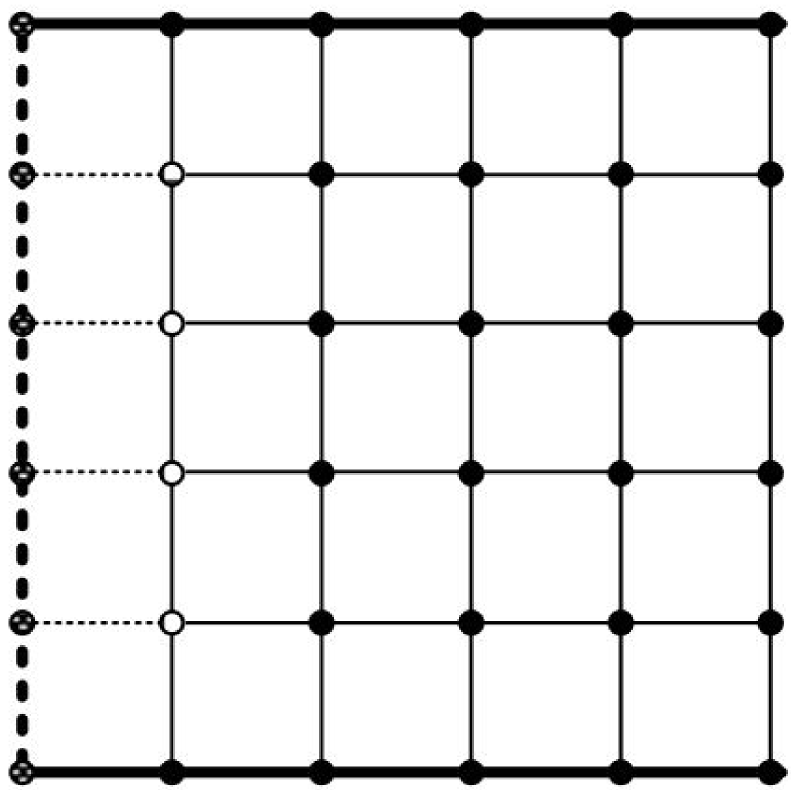
از این تقریب برای $u_{j,k}$ استفاده می‌شود و رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{U_{j,k+۱} - U_{j,k}}{\Delta \tau} - \kappa \frac{U_{j-۱,k} - ۲U_{j,k} + U_{j+۱,k}}{\Delta x^۲} = ۰ \qquad (۱۳.۱)$$

به طوریکه مشاهده می‌شود این گسسته‌سازی منجر به یک خطا از مرتبه $O(\Delta x^۲) + O(\Delta \tau)$ می‌شود. برای حل PDE در نقطه (x_j, τ_k) روی دامنه مسئله، باید از نقطه $\tau = ۰$ کار را شروع کرد. در این زمان شرایط ابتدایی، جواب PDE در همه نقاط را تعیین می‌کند. بدین ترتیب برای حل PDE روی شبکه، به‌طوریکه $\tau = \triangle \tau$ روش تفاضل متناهی صریح به کار گرفته می‌شود. در شکل (۲.۱) شبکه‌بندی در این روش نشان

داده شده است.

شکل ۲.۱: شبکه‌بندی در روش تفاضل متناهی صریح



خطوط پررنگ سیاه نشان دهنده شرایط مرزی، خطوط تیره نشان‌دهنده‌ی شرایط ابتدایی، نقاط توخالی نشان‌دهنده مقادیری که برای محاسبه PDE در اولین برش زمانی از آنها استفاده می‌شود، هستند. دایره‌های توپر نیز نشان‌دهنده‌ی نقاطی روی شبکه هستند که می‌خواهیم برای آنها یک جواب به دست آوریم. باید توجه داشت که حل PDE در برش زمانی فعلی فقط به مقادیر دوره گذشته بستگی دارد. برای حل کردن PDE در نقاط (x_j, τ_k) روی تمام شبکه به سادگی می‌توان این تکنیک را به صورت بازگشتی به کار گرفت تا به نقطه $\tau = T$ رسید. در حالت خاص، با بازچینی معادلات تفاضل متناهی برای جواب در هر نقطه‌ی شبکه از دوره زمانی قبلی، می‌توان PDE را به‌طور هم‌زمان برای تمام نقاط یک برش حل کرد. در این حالت رابطه (۱۳.۱)