بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

مسأله حمل و نقل با محدودیتهای جانبی ممانعت کننده

استاد راهنما:

دکتر محمدعلی یعقوبی

مؤلف:

عهدیه زمزم زاده

خرداد ماه ۸۸

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : عهدیه زمزم زاده

استاد راهنما : دکترمحمدعلی یعقوبی

داور ۱ : دکترماشااله ماشین چی

داور ۲ : دکترمحمودمحسنی مقدم

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به:

پدر مهربانم

و

مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

بهترین سپاس ها شایسته پروردگار سبحان که پرتو هدایتش روشنگر تاریکی هاست. خداوند مهربان را شکرگزارم که توفیق آموختن و فرصت اندیشیدن را به من عطا فرمود، تا از پی سالها تحصیل دریابم که آنچه جستنی است تنها اوست.

با تشکر و قدر دانی از پدر و مادر بزرگوارم که تمام لحظات زندگی ام با وجودشان پرفروغ است. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. در برابر قدمهایشان زانوی ادب بر زمین می گذارم و با قلبی مملو از عشق و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم. با سپاس از خواهر عزیز و برادرانم که زیباترین لحظات زندگی را در کنارشان تجربه کردم.

از استاد ارجمند و نیک اندیشم جناب آقای دکتر محمدعلی یعقوبی که فکر جوان و کم تجربه ام را با همراهی دلسوزانه و بی دریغشان پروراند، صمیمانه سپاسگذارم و از خداوند مهربان می خواهم که روشنگر راهش باشد. همواری راهی که تا کنون طی کرده ام مدیون تلاشهای قابل تقدیر این استاد گرانقدر و تمامی اساتیدی می دانم که از آغاز یاریم داده اند.

از اساتید بزرگوار آقایان دکتر محمود محسنی مقدم و دکتر ماشاالله ماشین چی به خاطر وقت و حوصله ای که صرف مطالعه و داوری این پایان نامه نمودند تشکر می کنم و توفیق روز افزونشان را آرزو دارم.

چکیده

مسائل حمل و نقل، از دسته مسائل مهم برنامه ریزی خطی ساختار شبکه ای می باشند که بدلیل کاربرد زیادی که این دسته از مسائل دارند مورد توجه بسیاری قرار گرفته اند. هدف از مدلسازی این مسائل، کمینه سازی هزینه حمل و نقل تعدادی کالا از چند مکان (مبدأ) مشخص به چند مکان (مقصد) مشخص می باشد. اگرچه مسائل حمل و نقل را می توان با روش سیمپلکس شبکه حل نمود اما شرایط ویژه آنها روش حل مناسب تری را ایجاب می کند.

در بعضی موارد بدلیل محدودیتهای خاصی که به مسائل حمل ونقل اضافه می گردد روشها و الگوریتمهای متفاوتی برای حل این مسائل مطرح می شوند که بعضی از آنها در این پایان نامه بحث و بررسی می شوند. بطور کلی در این پایان نامه ابتدا در فصل اول مسئله حمل و نقل استاندارد و روش حل آن بطور خلاصه توضیح داده می شود. در فصل دوم نوع خاصی از مسائل حمل و نقل با تعدادی محدودیت که به مسئله حمل ونقل استاندارد اضافه می شوند و الگوریتم حل آن بیان می شوند. در فصل سوم حالات خاصی از مسائلِ حمل و نقل بیان شده در فصل دوم مورد بررسی قرار می گیرد. در نهایت این پایان نامه در فصل چهارم به بیان تعمیمی ازحالت خاصی از مسئله حمل و نقل بصورت یک مثال کاربردی اشاره می کند.

در این پایان نامه هر جا که علامت [*] بکار رفته به این معنی است که آن قسمت ازخود نویسنده می باشد.

فهرست

عنوان صفحه

فصل اول

مقدمه‌ای بر مسأله حمل ونقل استاندارد

۱-۱ مقدمه

یک دسته خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی، بعنوان مسائل حمل و نقل شناخته شده‌اند که غالباً در کاربردهای عملی بوجود می‌آیند. در عمل برنامه‌ریزی خطی از اهمیت قابل توجهی در کاربردش برخوردار است که این اهمیت، بدلیل کاربردی است که مسائل حمل و نقل در سیستمهای مختلف از جمله سیستمهای تولیدی دارند.

با توجه به اینکه در هر مکان تولیدی مسأله حمل و نقل مطرح می شود و بدنبال آن مسأله هزینه حمل و نقل مطرح می شود لذا این مسأله که هدف آن کمینه کردن هزینه ها است از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. در واقع مسأله حمل و نقل یکی از مسائل مهم برنامه‌ریزی خطی با ساختار شبکه‌ای است که در بسیاری از نوشته‌ها و متون علمی و عملی مورد توجه قرار گرفته است[۲].

مسائل حمل و نقل، بصورت الگوریتمی می‌توانند با استفاده از تکنیک‌های خاصی که دربخش های بعدی توضیح داده خواهند شد، حل شوند. تعدادی از این تکنیک‌های خاص بطور کامل و همراه با جزئیات از طریق جدول حمل و نقل، که بطور متداول برای ارائه الگوریتم سیمپلکس برای مسائل حمل و نقل استفاده می‌شود، ارائه خواهند شد.

تعریف ۱-۱-۱: فرض کنید V مجموعه ای ناتهی و متناهی باشد و $E \subseteq V \times V$. در اینصورت، جفت (V, E) یک گراف جهت دار نامیده می شود و با G(V, E) نشان داده می شود. V مجموعه رأسها و E مجموعه یالهای گراف نام دارد.

تعریف ۱-۱-۲: گراف جهت دار G(V, E) را در نظر بگیرید. به مجموعه یال‌های {(i,p), (p,q) … (s,j)} که در آن به جز i و j ابتدای هر کمان و انتهای کمان قبلی یکی هستند و هیچ

یالی بیش از یک بار تکرار نمی‌شود، یک مسیر از i به j و به سمت j گفته می شود. به یک مسیر بسته که رأس ابتدا و انتهای آن یکی است مدار گفته می شود.

تعریف ۱-۱-۳: گراف جهت دار G(V, E) را در نظر بگیرید. یک زنجیر از گره i به j، مسیری از i به j است که لزومی ندارد جهت هر یال به سمت j باشد. به یک زنجیر بسته دور گفته می‌شود.

تعریف ۱-۱-۴: گراف G(V, E) را در نظر بگیرید. اگر بین هر دو رأس گراف یک زنجیر وجود داشته باشد، آن گراف همبند نامیده می شود و اگر بین هر دو رأس یک مسیر وجود داشته باشد آن گراف همبند قوی نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۵: درخت، گراف همبندی است که شامل هیچ دوری نباشد.

قضیه ۱-۱-۶: یک درخت با n رأس شامل n-1 یال است و حداقل دو گره پایانی با درجه ۱ دارد.

تعریف ۱-۱-۷: گراف G(V, E) را در نظر بگیرید. $G_1(V_1, E_1)$ را یک زیر گراف G می نامند هرگاه $E_1 \subseteq E$ ، $\varnothing \neq V_1 \subseteq V$ و رأسهای واقع بر هر یال متعلق به E_1 متعلق به V_1 باشند. اگر $V_1 = V$ باشد، در اینصورت G_1 را یک زیر گراف فراگیر G می نامند.

تعریف ۱-۱-۸: گراف G(V, E) را در نظر بگیرید. زیر گراف ماکزیمال همبند گراف G را مؤلفه گراف G می نامند (ماکزیمال بودن به معنی داشتن بیشترین تعداد یال است).

تعریف ۱-۱-۹: گراف G(V, E) را در نظر بگیرید. درخت فراگیر[1] زیر گرافی از G(V,E) است که درخت باشد و شامل تمام رئوس گراف G باشد.

۱- Spanning tree

تعریف ۱-۱-۱۰: ماتریس $m\times n$، A را در نظر بگیرید. تعداد ماکزیمم سطرها یا ستونهای مستقل خطی ماتریس A که با هم برابرند، رتبه آن نامیده می شود که با rank(A) نشان داده می شود.

تعریف ۱-۱-۱۱: سیستم $A\,x = b,\ \ x \geq 0$ را در نظر بگیرید که در آن A یک ماتریس $m\times n$ و b یک بردار $m\times 1$ است. فرض کنید $\text{rank}\ (A, b)= \text{rank}\ A= m$، بعد از تغییر ترتیب ستون‌های A در صورت لزوم، فرض کنید $A= [B,N]$، که در آن B یک ماتریس معکوس‌پذیر $m\times m$ و N یک ماتریس $m\times(n\text{-}m)$ است. جواب $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ برای معادلات $Ax= b$ را که در آن

$$x_B = B^{-1}b,\ \ x_N = 0$$

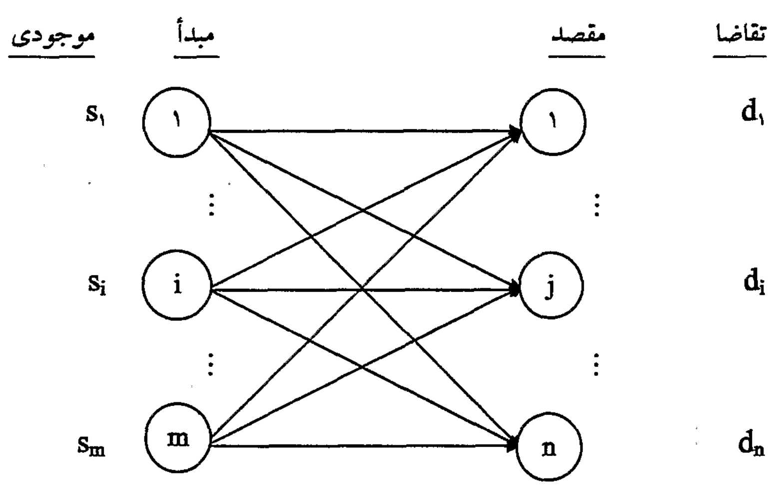
یک جواب پایه‌ای سیستم می‌گویند. اگر $x_B \geq 0$ آنگاه x جواب پایه ای شدنی[۱] سیستم گفته می‌شود. B، ماتریس پایه و N، ماتریس غیرپایه نامیده می شود. به مؤلفه های x_B متغیرهای پایه ای و به مؤلفه های x_N متغیرهای غیرپایه ای گفته می شود. اگر حداقل یکی از مؤلفه‌های x_B یا به عبارتی یکی از متغیرهای پایه‌ای مقدار صفر داشته باشد، آنگاه جواب پایه‌ای شدنی، تباهیده نامیده می‌شود.

۱-۲ تعریف مسأله حمل و نقل

m گره مبدأ را از شماره ۱ تا m در نظر بگیرید بطوریکه گره i موجودی s_i واحد از یک محصول خاص را دارد $(i=1, \ldots, m)$. بعلاوه n گره مقصد از شماره ۱ تا n، بطوریکه مقصد jام، d_j واحد از محصول را نیاز دارد در نظر بگیرید $(j=1, \ldots, n)$. فرض می‌شود که $s_i\ ,\ d_j > 0$ برای

۱- Basic feasible solution

$i=1, \dots, m$ و $j=1, \dots, n$ همچنین امکان ارسال مستقیم کالا از هر مبدأ به هر مقصد وجود دارد. به عبارت دیگر بین هر گره مبدأ مانند i $(i=1, \dots, m)$ و هر گره مقصد مانند j $(j=1, \dots, n)$ یک یال (کمان) وجود دارد که با (i, j) نمایش داده می شود. متناظر با هر کمان (i,j) از مبدأ i به مقصد j، یک هزینه c_{ij} برای حمل هر واحد محصول از مبدأ i به مقصد j وجود دارد. هدف تعیین یک روش حمل و نقل شدنی از مبدأها به مقصدها است بطوریکه هزینه کل حمل و نقل کمینه شود. این مسأله بعنوان مسأله حمل و نقل شناخته شده است. در این پایان نامه از مسأله فوق بعنوان مسأله حمل و نقل استاندارد نام برده می شود. شکل ۱-۱، گراف یک مسأله حمل و نقل را نشان می دهد.



شکل ۱-۱: نمایش ترسیمی یک مسأله حمل ونقل

این گراف که ترکیبی از گره‌های مبدأ و مقصد و کمانهای مربوط به آنها است یک گراف کامل دوبخشی جهت دار نامیده می شود. به این معنی که گره‌ها به دو مجموعه تقسیم شده‌اند بطوریکه

همه کمان‌ها در گراف از یک گره در مجموعه اول (گره‌ها مبدأ) به یک گره در مجموعه دوم (گره‌های مقصد) وصل شده‌اند.

برای مدل‌سازی مسأله حمل و نقل فرض کنید که x_{ij}، میزان واحدهای حمل شده در طول کمان (i,j) از مبدأ i به مقصد j باشد. بعلاوه فرض می‌شود که مسأله متوازن است یعنی موجودی کل با تقاضای کل برابر است. به عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \,.$$

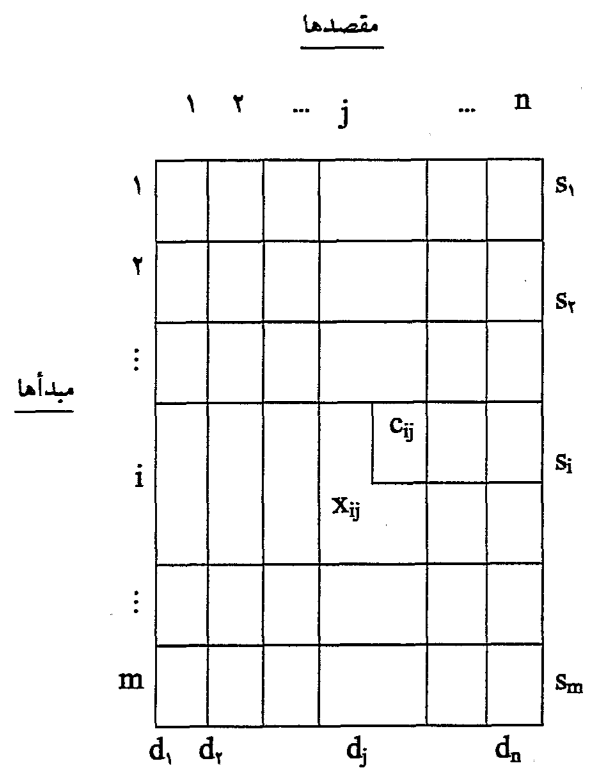
اگر موجودی کل از تقاضای کل بیشتر باشد یک گره مقصد فرضی با شماره $n+1$ و تقاضای $d_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j$ و $c_{i,n+1} = 0\,,\ i = 1, \ldots, m$ ایجاد می‌شود. اگر تقاضای کل بیشتر از موجودی کل باشد یک گره مبدأ فرضی با شماره $m+1$ و موجودی $s_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i$ و $c_{n+1,j} = 0\,,\ j = 1, \ldots, n$ ایجاد می‌شود. البته باید توجه کرد که در این حالت مسأله نشدنی می‌شود. زیرا مبدأ فرضی است و هیچ موجودی در این مبدأ وجود ندارد لذا تقاضاها برآورده نمی‌شوند. با فرض اینکه موجودی کل با تقاضای کل برابر است، مدل برنامه‌ریزی برای مسأله حمل و نقل بصورت زیر می‌باشد:

$$Minimize: Z = c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

$$\begin{aligned}
&Subject\ \ to:\\
&x_{11} + \cdots + x_{1n} = s_1\\
&x_{21} + \cdots + x_{2n} = s_2\\
&\vdots\\
&x_{m1} + \cdots + x_{mn} = s_m\\
&x_{11} + \cdots + x_{m1} = d_1\\
&\vdots\\
&x_{1n} + \cdots + x_{mn} = d_n\\
&x_{ij} \ge 0,\ \ i = 1,\cdots,m,\ \ j = 1,\cdots,n.
\end{aligned} \qquad (۱-۱)$$

چنانچه در مدل (۱-۱) x_{ij}ها شرط پیوسته بودن را داشته باشند، مدل (۱-۱) یک مدل برنامه ریزی خطی است اما اگر x_{ij}ها شرط صحیح بودن را داشته باشند مدل (۱-۱) یک مدل برنامه ریزی صحیح می باشد ولی با توجه به ساختار مدل (۱-۱) در صورت صحیح بودن مقادیر سمت راست معادلات مدل (۱-۱) می توان شرط صحیح بودن را در صورت وجود نادیده گرفت و مدل را یک مدل برنامه ریزی خطی در نظر گرفت. برای مشاهده اثبات این موضوع به [۲] مراجعه کنید.

مسأله حمل و نقل می‌تواند بصورت یک جدول حمل و نقل (بصورتی که در جدول ۱-۱ نشان داده شده است) که سطرهای ۱ تا m آن، گره‌های مبدأ و ستون‌های ۱ تا n آن، گره‌های مقصد را نشان می‌دهند، بیان شود. خانه مربوط در سطر iام و ستون jام جدول ۱-۱ متغیر x_{ij} را نشان می‌دهد. ضریب هزینه مربوطه، c_{ij}، معمولاً بصورتی که در خانه (i, j) نشان داده شده است، قرار می گیرد.



جدول ۱-۱: جدول مسأله حمل و نقل

برای اینکه مقادیر خانه های جدول ۱-۱ جوابی شدنی برای مسأله حمل و نقل باشند، باید تمام مقادیر نامنفی بوده و جمع مقادیر هر سطر با عدد جلوی آن سطر و جمع مقادیر هر ستون با عدد جلوی آن ستون برابر باشد.

همچنین مسأله حمل و نقل می‌تواند به فرم ماتریسی نوشته شود. برای این منظور تعریف کنید:

$x= (x_{۱۱}, x_{۱۲}, \dots , x_{۱n}, x_{۲۱}, \dots , x_{۲n}, \dots , x_{m۱}, \dots ,x_{mn})^t$

$c= (c_{۱۱}, c_{۱۲}, \dots , c_{۱n}, c_{۲۱}, \dots , c_{۲n}, \dots, c_{m۱}, \dots ,c_{mn})$

$b= (s_۱, s_۲, \dots , s_m, -d_۱, \dots , -d_n)^t$

$A= (a_{۱۱}, a_{۱۲}, \dots , a_{۱n}, a_{۲۱}, \dots, a_{۲n}, \dots, a_{m۱}, \dots ,a_{mn})$

بطوریکه $a_{ij}= e_i - e_{m+j}$ و e_i و e_{m+j} بردارهای واحد در R^{m+n} هستند که به ترتیب iامین و m+jامین مؤلفه آنها ۱ و بقیه مؤلفه‌های آنها صفر است. به این ترتیب مسأله حمل و نقل را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

Minimize: $Z= cx$

s.t. (۲-۱)

$$Ax=b$$

$$x \geq 0$$

از آنجائیکه به ازاء هر رأس در گراف حمل و نقل یک سطر در ماتریس A و به ازاء هر یال در گراف حمل و نقل یک ستون در ماتریس A وجود دارد، لذا ماتریس A، ماتریس وقوع رأسی – کمانی[1] با بعد $(m+n) \times mn$ نامیده می‌شود و فرم خاص زیر را دارد:

$$\begin{array}{cc} \text{mn ستون} & \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -I & -I & \cdots & -I \end{bmatrix} & \text{m+n سطر} \end{array}$$

بطوریکه در آن 1 یک بردار $1\times n$ با همه مؤلفه‌های ۱ است و I یک ماتریس همانی $n\times n$ است.

مثال ۱-۲-۱۲: یک مسأله حمل و نقل با ۲ مبدأ و ۳ مقصد را در نظر بگیرید. داده های این مسأله در جدول ۱-۲ نشان داده شده است (هزینه‌ها، موجودی‌ها، تقاضاها مشخص شده‌اند).

۱- Node-arc incidence matrix

	۱	۲	۳	s_i
۱	۴	۳	۲	۲۰
۲	۱	۵	۴	۳۰
d_j	۱۵	۲۰	۱۵	

جدول ۱-۲: جدول حمل ونقل مثال ۱-۲-۱۲

برای این مثال ماتریس A بصورت زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است که برای اینکه بتوان از الگوریتم سیمپلکس شبکه که در بخش‌های بعدی توضیح داده خواهد شد برای حل مسأله حمل و نقل استفاده کرد، باید ساختار این مسأله را به ساختار شبکه (برای توضیحات بیشتر به [۲] فصل ۹ مراجعه شود.) تبدیل کرد. لذا در مدل (۱-۲) طرفین n قید آخر مدل (۱-۱) در ۱- ضرب شده‌اند.

در این قسمت بعضی از خواص ماتریس وقوع رأسی-کمانی A که باعث ساختار خاص مسأله حمل و نقل شده است، بیان می‌شوند. این خواص کاربرد ساده و کارای روش سیمپلکس را برای مسائل حمل و نقل امکان‌پذیر می‌سازند.

قضیه ۱-۲-۱۳: یک مدل حمل و نقل با m مبدأ و n مقصد را در نظر بگیرید. رتبه ماتریس وقوع رأسی-کمانی آن برابر با $m+n-1$ است.

اثبات: چون هر ستون ماتریس وقوع رأسی-کمانی (A) مدل حمل و نقل دارای دقیقاً یک ۱+ و یک ۱- است چنانچه تمام $m+n$ سطر آن را با هم جمع کنیم حاصل صفر می شود. لذا رتبه آن کمتر از $m+n$ می باشد. با توجه به اینکه گراف حمل و نقل همبند است، لذا دارای یک زیر گراف فراگیر است. یک زیر درخت فراگیر گراف را مانند T در نظر بگیرید. درخت T دارای $m+n$ رأس و $m+n-1$ یال است. ماتریس ضرایب مربوط به درخت T، A_T، را در نظر بگیرید. A_T یک زیر ماتریس، ماتریس A است. از طرفی چون T درخت است، پس یک گره پایانی دارد. در سطر مربوط به این گره پایانی یک و فقط یک عدد مخالف با صفر وجود دارد، این عدد ۱+ یا ۱- است. با جابه‌جایی متغیرها و معادلات می‌توان ماتریس A_T را به فرم زیر در نظر گرفت:

$$A_T = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0,\ldots,0 \\ \hline P & A_{T'} \end{array}\right)$$

که در حقیقت در آن $A_{T'}$، ماتریس ضرایب مربوط به درختی است که از حذف یال متصل به گره پایانی در نظر گرفته شده و حذف خود گره پایانی بدست آمده است. اگر ماتریس $A_{T'}$ به جای A_T، در نظر گرفته شود و روندی که برای A_T انجام شد برای $A_{T'}$ تکرار شود، ماتریس A_T بصورت زیر قابل نمایش است: