بسم الله الرحمن الرحیم

۳۹۵۰۹

۱۳۸۰/۱۰/۲۱

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

بـه

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

016418

دانشجو : فرامرز صادقی

استاد راهنما: دکتر حسین محبی

داور ۱ : دکتر مهدی رجبعلی پور

داور ۲ : دکتر اسفندیار اسلامی

۳۹۵۰۹

حق چاپ محفوظ و مخصوص به مؤلف است.

بسم‌الله الرحمن الرحیم

* ن و القلم و مایسطرون *

سپاس خداوند بزرگ را که به من نعمت آموختن عطا فرمود و مسلم آنکه دریدن پرده جهل در آموختن است. و درود بر فرستاده بر حقش محمدبن عبداله (ص) که معلم بشریت و رسول آموختن است.

بر همگان از اهل معرفت و بینش مبرهن است که زحمات خستگی‌ناپذیر استاد و معلم را نمی‌توان با زبان قلم سپاس گفت و تنها حضرت دوست می‌تواند به تلاش‌های معنوی و خداپسندانهٔ یک معلم واقعی پاسخ بسنده و وافی دهد. بی‌تردید گذر از هر وادی آموزشی و پس پشت نهادنِ هر مرحله و سپری کردن هر دوره تحصیلی اگر با موفقیت همراه باشد چراغی را در دل استاد روشن خواهد ساخت، امیدوارم با عنایت خاص حضرت ولیعصر (عج) و بهره‌وری از باران رحمت خداوند بتوانم با خدمت صادقانه پاسخ زحمات اساتید بزرگوار را داده و اندکی از ظلمات جهل را از فرا راه ره‌پویان متعهدی که آینده‌سازان ایران اسلامی خواهند بود، بزدایم.

اینک که به یاری حضرت حق سبحانه و تعالی توانسته‌ام منزلی دیگر از منازل تحصیل را از این فراخنای آموزشی سپری کنم و خوشه‌چین میوه‌های جانبخشی از درخت دانش و معرفت باشم، بر خویش وظیفه می‌دانم به پاس تلاش و لطف همیشگی اساتید گرانقدر، از آنان تشکر کنم.

به پاس ادب و احترام نخست از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر حسین محبی که با آغوش باز همواره بعنوان یک دوست و برادر دلسوز مرا در پیمودن جاده‌های نور و

بیداری یاری کرد و هرگاه و بیگاه مرا بخویش می‌خواند و دریچه‌ای جدید از علوم را به رویم می‌گشود و بی‌دریغ مرا به باغ معرفت فرا می‌خواند تشکر کرده، سلامت و بهروزی آن وجود نازنین را از درگاه احدیت خواستارم. ضمن تشکر از زحمات بی‌شائبه اساتید محترم آقایان دکتر مهدی رجبعلی‌پور و دکتر اسفندیار اسلامی که با قبول داوری پایان‌نامه مرا رهین بیش از پیش الطاف خود نمودند، توفیق روزافزونشان را از آستان حضرت دوست خواستارم. از اساتید محترم بخش ریاضی که با محبت بسیار چه در دوران کارشناسی و چه در مقطع کارشناسی ارشد در غنا و توانمندیم سهیم بوده‌اند سپاسگزارم.

در پایان وظیفه خود می‌دانم از همسر بزرگوار و مهربانم به پاس رهیاریهای همیشگی‌اش در زندگی، گرچه همزمان با تحصیلاتم او نیز در مقطع کارشناسی در دانشگاه تحصیل می‌نمود و علاوه بر داشتن مشغله درسی، بار سنگین مشکلات زندگی را به تنهایی بر دوش می‌کشید و با ایجاد فرصت‌های مناسب در موفقیت اینجانب سهیم است، تشکر نمایم و از خداوند بزرگ صحت و سلامت ایشان را خواستارم.

از سرکار خانم سهیلا باقری که در تایپ این پایان‌نامه دقت وافر و زحمت بسیار کشیدند تشکر می‌کنم.

فرامرز صادقی

آبانماه ۱۳۷۱

تقدیم به :

فرزندان دلبندم،

سعیــده

و

مریــــم

(فهرست)

مقدمه

پایان‌نامه حاضر دربارهٔ جبرهای دوگان یکنواخت تولید شده توسط تک عنصر است و به بیان و اثبات یک قضیه ساختاری می‌پردازد که مربوط به B.Prunaru که در مقاله‌ای تحت عنوان

A structure theorem for singly generated dual uniform algebras

در سال ۱۹۹۰ انتشار یافته است می‌باشد. جبرهای دوگانی که در این رساله مد نظر است جبرهای باناخ دوگان است و منظور از جبرهای باناخ دوگان آن جبرهای باناخ است که دوگان فضاهای باناخ می‌باشند و برای آنها عملگر ضرب بطور جداگانه (مؤلفه به مؤلفه) w^* - پیوسته است این پایان نامه مشتمل بر دو فصل است که در فصل اول آن مقدمات لازم شامل تعاریف و بیان قضیه‌های مهم که در سرتاسر این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند و همچنین بیان و اثبات چند لم مهم که در اثبات قضیه اصلی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، آورده شده است. در فصل دوم ابتدا بحثی خواهیم داشت پیرامون تبدیل گلفاند یک جبر باناخ جابجائی و سپس یک قضیه گسترشی را بیان و اثبات می‌کنیم، آنگاه به تفصیل به بیان و اثبات قضیه اصلی که یک قضیه ساختاری است می‌پردازیم.

تاریخچه

مطالعه جبرهای دوگان عملگرهای روی فضای هیلبرت اولین بار توسط D.Sarason انجام شده است. وی ابتدا در سال ۱۹۷۲ در مقاله‌ای تحت عنوان "W* - density of polynomials" ثابت کرد اگر $K \subset \mathbb{C}$ یک زیر مجموعه فشرده و $R(K)$ جبر دریکله باشد و اگر μ یک اندازه بورد متناهی و مثبت با محمل (support) فشرده باشد آنگاه w* - بستار چند جمله‌ایها در $L^{\infty}(\mu)$ برابر با $L^{\infty}(\mu) \oplus H^{\infty}(\text{int } K)$ است که تجزیه فوق نقش مهمی را در پیدا کردن زیرفضاهای پایای کلاس وسیع عملگرها از جمله عملگرهای زیر نرمال (تحدید یک عملگر نرمال روی یک زیرفضای پایا) ایفا می‌کند که برای مثال S.Brown در سال ۱۹۷۸ در مقاله‌ای تحت عنوان

"some invariant subspace for subnormal operators"

از تجزیه فوق استفاده کرده و زیرفضاهای پایا برای عملگرهای زیر نرمال را پیدا نموده است. J.B.Conway در کتاب Subnormal Operators خود که در سال ۱۹۸۱ انتشار یافته است ثابت می‌کند که اگر $S \in L(H)$ یک عملگر زیر نرمال باشد آنگاه جبر دوگان A_S تولید شده توسط عملگر S در $L(H)$ یک جبر یکنواخت است. برای حالت خاص فوق قبلاً نیز در سال ۱۹۷۷ R.Olin , J.B.Conway در مقاله‌ای تحت عنوان

"A functional calculus for subnormal operators"

یک قضیه ساختاری همراه با نتایج مهمی در رابطه با نظریه عملگرهای زیر نرمال ثابت کردند. بدین معنی که جبر دوگان تولید شده توسط عملگر زیر نرمال را به روش ساختاری پیدا کردند و بعنوان نتیجه‌ای از آن توانستند وجود زیر فضاهای پایای غیر بدیهی را برای عملگرهای زیر نرمال خاص ثابت کنند.

در سال ۱۹۸۸ Bercovici در مقاله خود تحت عنوان

"Factorization theorems and the stracture of operators on Hilbert space"

ثابت کرد اگر H یک فضای هیلبرت و $A \subset L(H)$ یک زیر جبر باشد بطوریکه نگاشت $\Phi : H^{\infty}(\mathbb{D}) \longrightarrow A$ طولپا، یکریخت و در توپولوژی و یک - ستار همیومورفیسم باشد آنگاه A دارای این خاصیت است که برای هر تابعک مختلط w^* - پیوسته φ روی A یک زوج $x,y \in H$ وجود دارد بطوریکه:

$$\varphi(f) = \langle f(x),y \rangle \quad \forall f \in A \ , \quad \| x \| \| y \| \leq S \| \varphi \| , \quad S \geq 1$$

که بعضاً نگاشت φ را برای زوج $x,y \in H$ با علامت $\varphi = [x \otimes y]$ نشان می‌دهند.

در سال ۱۹۸۹، Casier در مقاله‌ای تحت عنوان

"Algebres duales uniformes dopereteure sur lespace de Hilbert"

ثابت کرد اگر جبر دوگان تولید شده توسط عملگر T یکنواخت باشد، آنگاه T یک زیر فضای پایای غیر بدیهی دارد. که نتیجه فوق را از یک قضیه تجزیه‌ای برای این کلاس جبرهای دوگان گرفت.

ایده ما نیز در این پایان نامه مبتنی بر ساختن تجزیه مشابهی در زمینه جبرهای باناخ دوگان است.

فصل ۱

مقدمات

در فصل ۱ سعی ما بر این است که پاره‌ای از علامت‌ها و تعاریف و قضایای خاص و استاندارد را که در اثبات قضیه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند آورده شود و بعضی از لم‌ها و قضیه‌ها را اثبات می‌کنیم

۱ - بخش ۱: علامت‌ها

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی.

$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط λ با مزدوج مختلط $\bar{\lambda}$.

∂K : مرز مجموعه K.

$L(X)$: جبر همه عملگرهای کراندار و خطی که روی یک فضای باناخ X تعریف می‌شوند.

Σ : σ - جبر روی یک مجموعه غیر تهی X

$\mathbb{D}$: گوی باز به شعاع واحد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < ۱ \}$$

$\mathcal{B}$: σ - جبر همه مجموعه‌های بورل.

$H^{\infty}(G)$: جبر باناخ همه توابع تحلیلی و کراندار روی G که با سوپریمم نرم $\|.\|_{\infty}$ همراه می‌باشند که دوگان فضای باناخ $L^{۱}(G)/^{\perp}H^{\infty}(G)$ می‌باشد.

$B(a\,;\,r)$: گوی باز به مرکز a و شعاع r.

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $a \in A$، آنگاه

$\sigma(a)$: طیف عنصر a نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda - a \text{ معکوس پذیر نباشد } \}$$

$\gamma(a)$: شعاع طیفی عنصر $a \in A$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma(a) = \operatorname{Sup} \{ |\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(a) \}$$

$C(K)$: جبر همه توابع پیوسته که روی مجموعه فشرده K تعریف می‌شود.

$Rat(K)$: جبر همه توابع گویا تعریف شده بر K که قطبهای آنها خارج K قرار دارد.

$R(K)$: بستار یکنواخت $Rat(K)$ در $C(K)$ می‌باشد.

H : فضای هیلبرت.

$B(H)$: جبر باناخ همه عملگرهای کراندار و خطی که روی فضای هیلبرت H

تعریف می‌شود.

$C_R(\partial K)$: فضای همه توابع پیوسته حقیقی روی مرز K.

X^* : فضای همه تابعک‌های خطی کراندار روی X (دوگان X).

$L^1(\mu)$: جبر همه توابع اندازه‌پذیر f که $\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu < \infty$ باشد.

فرض کنید $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد و فرض کنید

$$\beta = \inf S \ , \ S = \{ \alpha \in \mathbb{R} : \mu(g^{-1}((\alpha,\infty))) = 0\}$$

در این صورت β را سوپریمم اساسی (essential supremum) g می‌نامند و می‌نویسیم $\|g\|_\infty = \beta$. اگر $S = \emptyset$ آنگاه $\beta = +\infty$.

$L^\infty(\mu)$: جبر همه توابع اندازه‌پذیر f بطوریکه $\|f\|_\infty < \infty$ باشد.

M_A : فضای ایده‌آل ماکزیمال جبر باناخ جابجائی A.

M_f : مجموعه همه اندازه‌های نمایش برای $f \in M_A$.

۲ - بخش ۲: تعاریف

تعریف ۱.۲.۱ جبر مختلط (Complex algebra): یک فضای برداری A روی میدان اعداد مختلط را یک جبر مختلط می‌نامند هرگاه برای هر $x,y,z \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ روابط زیر برقرار باشد

۱) $x(yz) = (xy)z$

$(x + y)z = xz + yz$ (۲

$x(y + z) = xy + xz$ (۳

$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$ (۴

تعریف ۱.۲.۲ جبر مختلط نرم‌دار (Normed complex algebra): یک جبر مختلط را یک جبر مختلط نرم‌دار گویند هرگاه یک نرم روی A وجود داشته باشد بطوریکه A به یک فضای نرم‌دار تبدیل شود و نامساوی ضربی زیر برای هر $x,y \in A$ برقرار باشد $\| xy \| \le \| x \| \| y \|$.

تعریف ۱.۲.۳ جبر باناخ (Banach algebra): اگر یک جبر مختلط نرم‌دار یک فضای باناخ نیز باشد آنگاه A را یک جبر باناخ می‌نامند.

تعریف ۱.۲.٤ جبر دریکله (Dirichlet algebra): جبر R(K) را یک جبر دریکله می‌نامند هرگاه $Re\,[R(K)\,|_{\partial K}\,]$ (فضای قسمت حقیقی توابع $f \in R(K)$ تحدید شده روی ∂K) در $C_R(\partial K)$ چگال باشد.

تعریف ۱.۲.۵ اندازه بورل (Borel measure): یک اندازه μ روی σ - جبر مجموعه‌های بورل از یک فضای توپولوژیک X را یک اندازه بورل می‌نامند هرگاه برای هر مجموعه فشرده K، $\mu(K) < \infty$ باشد.

تعریف ۱.۲.۶ اندازه بورل مثبت (Positive Borel measure): یک اندازه مثبت روی σ - جبر مجموعه‌های بورل از یک فضای توپولوژیک X را یک اندازه بورل مثبت روی X می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۷ اندازه بورل منظم (Regular Borel measure): یک اندازه μ روی مجموعه‌های بورل B، $\mu : B \longrightarrow [0,\infty]$ را یک اندازه بورل منظم می‌نامند. هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱) برای هر مجموعه فشرده K از X، $\mu(K) < \infty$ باشد.

۲) اگر B یک مجموعه بورل باشد آنگاه،

$$\mu(B) = \inf \{\mu(O) : B \subseteq O \ , \ \text{یک مجموعه باز است}\ O\}$$

۳) اگر O یک مجموعه باز از X باشد آنگاه،

$$\mu(O) = \sup \{\mu(K) : K \subseteq O \ , \ \text{یک مجموعه فشرده است}\ K\}$$

تعریف ۱.۲.۸ اندازه علامت‌دار (Signed measure): یک تابع مجموعه‌ای $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^*$ را یک اندازه علامت‌دار گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱) μ حداکثر یکی از مقادیر $+\infty$ و $-\infty$ را اختیار کند

۲) $\mu(\emptyset) = 0$

۳) μ جمع‌پذیر باشد. بدین معنی که اگر $\{A_n\}$ یک دنباله جدا از هم از اعضای Σ باشد آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

تعریف ۱.۲.۹ اندازه متعامد (Singular measure): دو اندازه μ و ν روی σ - جبر Σ از مجموعه X را متعامد نامند و با $\mu \perp \nu$ نمایش می‌دهند هرگاه دو زیرمجموعه از هم جدا A و B از Σ وجود داشته باشد بطوریکه $X = A \cup B$ و $\mu(A) = \nu(B) = 0$.

تعریف ۱.۲.۱۰ اگر μ یک اندازه باشد و $E \in \Sigma$ آنگاه

$$|\mu|(E) = \operatorname{Sup} \sum_{i \geq 1} |\mu(E_i)|$$

و $\{E_i\}$ افرازی از E است و سوپ روی تمام افرازهای E گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۱ اندازه بطور مطلق پیوسته (absolutly continuous measure): اندازه μ نسبت به اندازه ν بطور مطلق پیوسته است و با $\mu \ll \nu$ نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر $A \in \Sigma$، اگر $\nu(A) = 0$ باشد آنگاه $\mu(A) = 0$ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۲ همبندی (Connectedness): فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، یک جدا کننده (Separation) از X یک زوج باز، از هم جدا