دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم — گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی محض — گرایش آنالیز

موضوع:

قضایای نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های چندمقداری یکنوا در فضاهای متریک مرتب

نگارش:

زینب برچلویی

استاد راهنما:

دکتر هاشم پروانه‌مسیحا

استاد مشاور:

دکتر کوروش نوروزی

آبان ۱۳۹۰

تقدیم به:

مادر مهربانم به فروغ نگاه مهربانش

و

پدر عزیزم به شکوه دستان پر مهرش

و

همه‌ی دوستانم.

اظهار نامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: قضایای نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های چندمقداری یکنوا در فضاهای متریک مرتب

استاد راهنما: دکتر سید هاشم پروانه‌مسیحا

نام دانشجو: زینب برچلویی

شماره دانشجویی: ۸۸۰۴۳۹۴

اینجانب **زینب برچلویی** دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضای دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

خداوند منان را سپاس‌گذارم که توفیق تحصیل علم و تلاش در راه کسب معرفت را بر من ارزانی داشت تا بدین سبب لطافت و زیبایی خلقت بی‌نظیر و پر رمز و رازش را بهتر بشناسم. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از همه‌ی کسانی که اینجانب را در تهیه‌ی این پایان‌نامه یاری نمودند به ویژه استاد راهنمایم جناب آقای دکتر مسیحا و همین‌طور استاد مشاورم جناب آقای دکتر نوروزی که نه تنها در راستای پایان‌نامه‌ام بلکه در طول دوره‌ی کارشناسی ارشدم همواره علم و دانششان را آمیخته با تجربیاتشان کرده و بی هیچ چشم‌داشتی خالصانه در اختیار اینجانب قرار داده‌اند، قدردانی نمایم.

در پایان نیز از زحمات خانواده‌ام و همه دوستانم که صادقانه در کنارم بودند، از صمیم قلب تشکر می‌کنم و امیدوارم که خداوند لیاقت و فرصت جبران نمودن را در اختیارم قرار دهد.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به یادآوری چند مفهوم از نظریه‌ی مجموعه‌ها پرداخته و سپس در فصل دوم، با ارائه‌ی مثال‌هایی به بررسی قضایای نقطه‌ی ثابت و نقطه‌ی ثابت زوجی نگاشت‌های تک‌مقداری در فضاهای متریک مرتب جزیی می‌پردازیم. در پایان، در فصل سوم، نگاشت‌های چندمقداری را معرفی کرده و با بررسی مفاهیم پیوستگی، نیم‌پیوستگی و یکنوایی برای این نگاشت‌ها، برخی قضایای نقطه‌ی ثابت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: رابطه‌ی ترتیب جزیی؛ نقطه‌ی ثابت؛ نقطه‌ی ثابت زوجی؛ نگاشت انقباضی مرتب باناخ؛ نگاشت یکنوای ترکیبی؛ نیم‌پیوستگی بالایی؛ نیم‌پیوستگی پایینی.

فهرست مندرجات

پیش فتار ۳

۱ **مفاهیم مقدماتی** ۶

۱.۱ رابطه‌ی ترتیب جزیی ۶

۲.۱ لم زُرن ۱۰

۲ **نگاشت‌های تک‌مقداری** ۱۱

۱.۲ نقطه‌ی ثابت ۱۱

۲.۲ قضایای نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های تک‌مقداری ۱۳

۳.۲ قضایای نقطه‌ی ثابتِ زوجی برای نگاشت‌های تک‌مقداری ۲۶

۳ **نگاشت‌های چندمقداری** ۵۲

۱.۳ نگاشت‌های چندمقداری ۵۲

۲.۳ پیوستگی و نیم‌پیوستگی نگاشت‌های تک‌مقداری و چندمقداری ۵۵

۳.۳ قضایای نقطه ثابت نگاشت‌های چندمقداری ۶۱

۴.۳ قضایای نقطه ثابتِ زوجی نگاشت‌های چندمقداری ۷۲

مراجع ۷۹

نمایه ۸۳

واژه نامه‌ی فارسی — انگلیسی ۸۶

واژه نامه‌ی انگلیسی — فارسی ۹۱

پیش‌گفتار

نظریه‌ی معادلات یکی از مباحث مهم و اساسی در ریاضیات است. در این نظریه، حل معادلاتی که تنها یک جواب دارند یا تحت شرایطی فقط یک جواب خواهند داشت، حایز اهمیت است. اما در این راستا اولین سؤال این است که آیا معادله‌ی مورد نظر جواب دارد یا خیر؟ برای پاسخ به این سؤال تلاش‌های بسیاری صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به قضیه‌ی بولتزانو[۱] اشاره کرد. این تلاش‌ها رفته‌رفته منجر به ایجاد نظریه‌ای در آنالیز غیرخطی جهت یافتن نقاط ثابت برای خودنگاشت‌های متفاوت در فضاهای گوناگون شد.

امروزه، ریاضیدانان بسیاری درصدد یافتن نقاط ثابت خودنگاشت‌ها برآمده‌اند تا از این رهگذر کمکی به حل معادلات بکنند. ما نیز در این پایان‌نامه بر آن شدیم که به بررسی نقاط ثابت نگاشت‌های تک‌مقداری و چندمقداری در فضاهای متریک مرتب جزیی بپردازیم.

مفهوم نگاشت چندمقداری تعمیم طبیعی مفهوم نگاشت (تابع) با حذف شرط یکتایی تصویر برای هر عضو دامنه است. نگاشت‌های چندمقداری علاوه بر کاربردهایی که در ریاضیات دارند، در بحث نظریه‌ی بازی‌ها، کنترل بهینه و سیستم‌های دینامیکی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. مطالعه روی قضایای نقطه‌ی ثابت برای نگاشت‌های چندمقداری اولین بار توسط کاکوتانی[۲] در سال ۱۹۴۱ صورت گرفت. البته دامنه‌ی مطالعات کاکوتانی محدود به فضاهای باناخ با بعد متناهی می‌شد. سپس، در سال ۱۹۵۰ کارلین[۳] و بوننبلاست[۴] مطالعات کاکوتانی را به فضاهای باناخ با بعد نامتناهی نیز تعمیم دادند و کِی فان[۵]، در سال ۱۹۵۲ این مطالعات را روی فضاهای موضعاً محدب مورد بررسی قرار

[۱] Bolzano
[۲] Kakutani
[۳] Karlin
[۴] Bohnenblust
[۵] Ky Fan

داد. به این ترتیب، ریاضیدانان متعددی در این عرصه قدم گذاشته و قضایای نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت‌های چندمقداری در زمینه‌های مختلفی گسترش دادند.

اما وجود نقطه‌ی ثابت برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متریک مرتب جزیی اولین بار توسط رَن[۶] و ریورینگز[۷][۲۳] و سپس نیتو[۸] و رودریگز—لوپز[۹][۲۱] و [۲۰] مورد بررسی قرار گرفت. این افراد همچنین،کاربردهایی از قضایای خود را در حل معادلات ماتریسی و معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه دادند. از آن پس نویسندگان متعددی از جمله بهسکار[۱۰] و لاکشمیکانتام[۱۱] در [۱۴] و چیریچ[۱۲][۱۹] مطالعاتی را در این زمینه انجام دادند. بهسکار و لاکشمیکانتام [۱۴]، به معرفی نگاشت‌های یکنوای ترکیبی پرداخته و شرایطی کافی را برای وجود نقاط ثابت زوجی برای این نگاشت‌ها ارائه دادند.

در این پایان‌نامه سعی شده است که به بررسی قضایای نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های چندمقداری صعودی در فضای متریک مرتب جزیی پرداخته شود. شایان ذکر است که شماره‌هایی که در مقابل تعاریف، قضایا و... و همچنین در متن پایان‌نامه داخل قلاب آورده شده‌اند، شماره‌ی مراجعی هستند که کل یا قسمتی از این مطالب از آن‌ها برداشت شده است و ممکن است آن مرجع برای اولین بار مطلب مورد نظر را ذکر نکرده باشد.

به هر حال، با وجود این که سعی زیادی به عمل آمده است تا این پایان‌نامه از هر جهت بدون اشکال باشد، ولی یقیناً این طور نیست. اما هر چه که هست آن را در طبق اخلاص گذاشته و به محققین و دوستداران ریاضی محض تقدیم می‌نمایم.

مقاله‌های اصلی مورد استفاده در این پایان‌نامه عبارتند از:

[1] Y . Feng, S . Liu, *Fixed point theorems for multi-valued increasing operators in partial ordered spaces*, Soochow J. Math. **30** (2004) 461-469.

---

[۶] Ran
[۷] Reurings
[۸] Nieto
[۹] Rodríguez-López
[۱۰] Bhaskar
[۱۱] Lakshmikantham
[۱۲] Ćirić

[2] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal. **65** (2006) 1379-1393.

[3] J. J. Nieto, R. Rodríguez-López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order **22** (2005) 223-239.

[4] J. J. Nieto, R. Rodríguez-López, *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Acta Math. Sin. (Engl.Ser.) **23** (2007) 2205-2212.

[5] A. C. M. Ran, M. C. B. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004) 1435-1443.

[6] X. Zhang, *Fixed point theorems of multivalued monotone mappings in ordered metric space*, Appl. Math. Lett. **23** (2010) 235-240.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل، چند مفهوم مقدماتی ریاضی را که در کل این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌کنیم، مورد بررسی قرار داده و برای مطالعات بیشتر، خواننده را به [۱۷] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ رابطه‌ی ترتیب جزیی

در این بخش، به یادآوری رابطه‌ی ترتیب جزیی و کلی پرداخته و سپس چندین مثال در این زمینه که در ادامه آن‌ها را مورد استفاده قرار می‌دهیم، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ [۷] رابطه‌ی $\preceq$ روی مجموعه‌ی ناتهی X یک **رابطه‌ی ترتیب جزیی** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

۱) $x \preceq x$ (خاصیت بازتابی)؛

۲) اگر $x \preceq y$ و $y \preceq x$، آن‌گاه $x = y$ (خاصیت پادتقارنی)؛

۳) اگر $x \preceq y$ و $y \preceq z$، آن‌گاه $x \preceq z$ (خاصیت ترایایی).

در این صورت $(X, \preceq)$ (یا به اختصار X) یک مجموعه‌ی مرتب جزیی خوانده می‌شود.

اگر $x, y \in X$، آن‌گاه منظور از $x \succeq y$ همان $y \preceq x$ می‌باشد، به‌علاوه اگر حداقل یکی از روابط $y \preceq x$ یا $x \succeq y$ برقرار باشد، آن‌گاه x و y دو عضو **مقایسه‌پذیر** X نامیده می‌شوند. همچنین می‌دانیم یک رابطه‌ی **ترتیب کلی**، رابطه‌ی ترتیب جزیی‌ای است که در آن هر دو عضو مقایسه‌پذیر باشند. یک **زنجیر** نیز، زیر مجموعه‌ای مرتب کلی از یک مجموعه‌ی مرتب جزیی است. (به عبارت دیگر زنجیر اعضای مقایسه‌ناپذیر ندارد.)

تعریف ۲.۱.۱ [۱۸] فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌ی مرتب جزیی X است.

۱) عضو x از X را یک **کران بالای (پایین)** A می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \preceq x$ $(x \preceq a)$.

۲) عضو a از A را یک عضو **ماکسیمال (مینیمال)** می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $b \in A$، اگر $a \preceq b$ $(a \succeq b)$، آن‌گاه $a = b$.

مثال ۳.۱.۱ [۱۸] مجموعه‌ی $\mathbb{R}^n$ را با رابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall 1 \leq i \leq n, x_i \leq y_i \quad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

در این صورت $\preceq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزیی روی $\mathbb{R}^n$ است که **ترتیب مؤلفه به مؤلفه** نامیده می‌شود و در آن هر دو عضو $\mathbb{R}^n$ هم کران بالا و هم کران پایین دارند. در واقع، اگر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$، آن‌گاه

$$\Big(\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}\Big)$$

و

$$\Big(\min\{x_1, y_1\}, \ldots, \min\{x_n, y_n\}\Big)$$

به ترتیب کران‌های بالا و پایین x و y هستند.

مثال ۴.۱.۱ [۴] رابطه‌ی $\preceq$ را روی $\mathbb{R}^{۲}$ به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$(x_{۱}, x_{۲}) \preceq (y_{۱}, y_{۲}) \iff x_{۱} \leq x_{۲} \ \vee \ (x_{۱} = x_{۲} \wedge y_{۱} \leq y_{۲}) \qquad ((x_{۱}, x_{۲}), (y_{۱}, y_{۲}) \in \mathbb{R}^{۲}).$$

به روشنی دیده می‌شود که $\preceq$ یک رابطه‌ی ترتیب کلی روی $\mathbb{R}^{۲}$ است و آن را **ترتیب قاموسی** می‌نامند. به کمک استقرا می‌توان ترتیب قاموسی را روی $\mathbb{R}^{n}$ تعمیم داد.

مثال ۵.۱.۱ [۴] فرض کنید A زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت رابطه‌ی $\preceq$ که به شکل

$$x \preceq y \iff x = y \ \vee \ (x, y \in A \wedge x \leq y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

تعریف می‌شود، یک رابطه‌ی ترتیب جزیی روی $\mathbb{R}$ است. در واقع $\leq$ بیان می‌کند که اعضای مقایسه‌پذیر و متمایز $\mathbb{R}$ همان اعضای A می‌باشند. در حالت خاص، اگر $A = \mathbb{R}$، آن‌گاه $\preceq$ ترتیب معمولی روی $\mathbb{R}$ می‌باشد و اگر $A = \emptyset$، آن‌گاه $\preceq$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل می‌شود.

مثال ۶.۱.۱ [۱۸] مجموعه‌ی اعداد حقیقی با رابطه‌ی ترتیب معمولی $\leq$ روی $\mathbb{R}$ ترتیب کلی‌ایی است که عضو ماکسیمال ندارد.

مجموعه‌ی توانی X که با $\mathcal{P}(X)$ نشان داده می‌شود با رابطه‌ی شمول $(\subseteq)$ یک رابطه‌ی ترتیب جزیی است که عضو ماکسیمالش همان X است.

مثال ۷.۱.۱ [۱۷] رابطه‌ی ترتیب معمولی روی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی $A = \{x \mid ۱ < x < ۴\}$ را به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ فرض می‌کنیم. در این مجموعه ۱ و ۴ به ترتیب بزرگ‌ترین کران پایین (اینفیمم) و کوچک‌ترین کران بالا (سوپریمم) A هستند. اما این مجموعه نه عضو ماکسیمال و نه عضو مینیمال دارد.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید X مجموعه‌ای مرتب جزیی باشد و $x \in X$. در این صورت شعاع‌های $[x,+\infty)$ و $(-\infty,x]$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$[x,+\infty)=\{y\in X \mid x\preceq y\} \quad , \quad (-\infty,x]=\{y\in X \mid x\succeq y\}.$$

تعریف ۹.۱.۱ یک مجموعه‌ی مرتب جزیی که هر جفت از عناصرش کوچک‌ترین کران بالا (سوپریمم) و بزرگ‌ترین کران پایین (اینفیمم) داشته‌باشد، یک **شبکه** نامیده می‌شود.

مثال ۱۰.۱.۱ فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و $F(S)$ خانواده‌ای ناتهی از توابع حقیقی با دامنه‌ی S باشد. در این صورت رابطه‌ی $\preceq$ با تعریف

$$f\preceq g \iff \forall\ s\in S, f(s)\leq g(s) \qquad (f,g\in F(S))$$

یک رابطه‌ی ترتیب جزیی روی $F(S)$ تعریف می‌کند. به علاوه، این رابطه‌ی ترتیب جزیی $F(S)$ را به یک شبکه تبدیل می‌کند.

گزاره ۱۱.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرتب جزیی باشد و $x,y\in X$. در این صورت حداکثر یکی از گزاره‌های زیر صحیح می‌باشد:

۱) $x=y$؛

۲) $x\preceq y$ و $x\neq y$؛

۳) $y\preceq x$ و $x\neq y$.

برهان. به [۱۱] صص ۱۷۲—۱۶۷رجوع شود. ■

۲.۱ لم زُرن

لم زُرن[۱] که در سال ۱۹۳۵ بیان و ثابت شد، برای اثبات وجود نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های تک‌مقداری و چندمقداری تعریف‌شده روی مجموعه‌های مرتب جزیی به کار گرفته می‌شود. به علاوه، این لم کاربردهای متعددی در ریاضیات دارد. به عنوان مثال، [۱۸] صص ۲۱۲ – ۲۱۰ را ببینید.

لم ۱.۲.۱ (زرن) فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرتب جزیی باشد. اگر هر زنجیر از اعضای X یک کران بالا داشته‌باشد، آن‌گاه X یک عضو ماکسیمال دارد.

برهان. به [۱۷] صص ۱۴۴ – ۱۳۹ رجوع شود. ■

---

۱ Zorn

فصل ۲

نگاشت‌های تک‌مقداری

در این فصل، ابتدا نگاشت‌های انقباضی مرتب را تعریف کرده و سپس به بررسی قضایای نقطه‌ی ثابت این خودنگاشت‌ها در فضاهای متریک مرتب جزیی تام می‌پردازیم. به علاوه، با مثالی نشان می‌دهیم که نقاط ثابت این‌گونه خودنگاشت‌ها لزوماً یکتا نمی‌باشند. اما شرایطی کافی برای یکتایی نقاط ثابت ارایه می‌دهیم. در ادامه، نقطه‌ی ثابت زوجی را برای نگاشت‌های تک‌مقداری تعریف کرده و به بیان قضایایی در این زمینه می‌پردازیم.

در سال ۲۰۰۴، رن و ریورینگز [۲۳] به بررسی قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ در فضاهای متریک مرتب جزیی پرداختند و سپس نیتو و رودریگز—لوپز [۲۰] و [۲۱] حالات کلی‌تر این قضایا را بیان و ثابت کردند.

شایان ذکر است که اثبات تعداد قابل توجهی از قضایای نقطه‌ی ثابت طولانی است، برای جلوگیری از پیچیده‌شدن اثبات‌ها، از گذاشتن پرانتز در جلوی نگاشت‌ها خودداری می‌کنیم؛ یعنی، به جای $f(x)$ به اختصار می‌نویسیم fx.

۱.۲ نقطه‌ی ثابت

این بخش را به معرفی مفهوم نقطه‌ی ثابت و بیان مثال‌ها و گزاره‌هایی مقدماتی، از دیدگاه نظریه‌ی مجموعه‌ها، اختصاص می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. هر نگاشت مانند $f : X \to X$ را یک **خودنگاشت** روی X نامیم.

تعریف ۲.۱.۲ [۱۸] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. نقطه‌ی $x \in X$ را یک **نقطه‌ی ثابت** خودنگاشت f می‌نامیم، هرگاه x توسط f ثابت نگه داشته شود؛ یعنی، $fx = x$.

مثال ۳.۱.۲ [۱۸] از ساده‌ترین و بدیهی‌ترین مثال‌ها برای نقطه‌ی ثابت می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) در هر فضای برداری، نگاشت انتقال هیچ نقطه‌ی ثابتی ندارد.

۲) نگاشت دوران در $\mathbb{R}^۲$، فقط یک نقطه‌ی ثابت دارد که همان مرکز دوران می‌باشد.

۳) نگاشت تصویر روی مختص اول در $\mathbb{R}^۲$، تعداد ناشمارا نقطه‌ی ثابت دارد.(تمام نقاط روی محور xها)

گزاره ۴.۱.۲ فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و f یک خودنگاشت روی X باشد. در این صورت اگر به ازای یک $n \geq ۱$، نقطه‌ی $x \in X$ تنها نقطه‌ی ثابت f^n باشد، آن‌گاه x تنها نقطه‌ی ثابت f نیز هست.

برهان. چون x یک نقطه‌ی ثابت f^n است، پس $f^n x = x$ است و لذا

$$f^n(fx) = f(f^n x) = f^{n+۱} x = fx$$

از این رو fx نیز یک نقطه‌ی ثابت f^n می‌باشد و چون x تنها نقطه‌ی ثابت f^n بود لذا باید $fx = x$ باشد، یعنی x نقطه‌ی ثابت f نیز هست. از طرفی هر نقطه‌ی ثابت f یک نقطه‌ی ثابت f^n هم می‌باشد، لذا f فقط و فقط یک نقطه‌ی ثابت دارد. ■

مثال ۵.۱.۲ فرض کنید $X = \{۰, ۱\}$ و $f = \{(۰, ۱), (۱, ۰)\}$. در این صورت به ازای هر $n \geq ۱$ $f^{۲n} = \mathrm{id}_X$. به ویژه $f^{۲} = \mathrm{id}_X$. بنابراین صفر و ۱ نقاط ثابت $f^{۲}$ می‌باشند. در حالی که f هیچ نقطه‌ی ثابتی ندارد.

مثال ۵.۱.۲ نشان می‌دهد که شرط یکتایی نقطه‌ی ثابت f^n در گزاره‌ی ۴.۱.۲ لازم است. به علاوه، ممکن است به ازای یک $n > ۱$، f^n نقطه‌ی ثابت داشته‌باشد، در حالی که f فاقد نقطه‌ی ثابت است.

۲.۲ قضایای نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های تک‌مقداری

همان‌طور که در ابتدای فصل اشاره شد، نیتو و رودریگز—لوپز تلاش‌های رن و ریورینگز را ادامه دادند. این بخش را به تحلیل این تلاش‌ها اختصاص می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲ فرض کنید X یک فضای متریک مرتب جزیی و f یک خودنگاشت روی X باشد. در این صورت،

۱) f را **صعودی(نزولی)** گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \preceq y$ داشته‌باشیم $fx \preceq fy$ $(fx \succeq fy)$.

۲) f را یک **نگاشت انقباضی مرتب باناخ** گوییم، هرگاه $k \in [۰, ۱)$ وجود داشته‌باشد به طوری که به ازای هر دو عضو مقایسه‌پذیر x و y از X، داشته باشیم $d(fx, fy) \leq kd(x, y)$.

مثال ۲.۲.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $\preceq = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۲, ۱)\}$. در این صورت خودنگاشت $f = \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۳, ۳), (۴, ۳)\}$ صعودی نیست، چون $۱ \preceq ۲$ ولی $f۲ \not\preceq f۱$.

تذکر ۳.۲.۲ باید توجه داشت که هر نگاشت انقباضی یک نگاشت انقباضی مرتب باناخ است اما عکس آن الزاماً برقرار نیست.

مثال ۴.۲.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳\}$ و $f = \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۳, ۱)\}$ و رابطه‌ی ترتیب جزیی $\preceq$ را روی X به شکل $\preceq = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۱, ۳)\}$ تعریف کنید. همچنین متر $d(x, y) = |x - y|$ را در نظر بگیرید. در این صورت f به ازای $k = \frac{۱}{۲}$ یک نگاشت انقباضی مرتب باناخ است اما نمی‌تواند انقباضی باناخ باشد، زیرا به ازای هر $k \in [۰, ۱)$ داریم: $d(f۲, f۱) = ۱ \nleq kd(۲, ۱)$.

قضیه ۵.۲.۲ [۲۰] فرض کنید X یک فضای متریک مرتب جزیی تام باشد. در این صورت اگر f یک خودنگاشت انقباضی مرتب باناخ پیوسته و صعودی باشد که به ازای یک $x_۰ \in X$ داشته‌باشیم $x_۰ \preceq fx_۰$، آن‌گاه f یک نقطه‌ی ثابت دارد.

برهان. چون f نگاشتی صعودی است، داریم:

$$x_۰ \preceq fx_۰ \preceq f^۲x_۰ = f(fx_۰) \preceq \cdots \preceq f^nx_۰ \preceq \cdots.$$

حال به کمک استقرا و با توجه به شرط انقباضی f داریم:

$$\begin{aligned} d(f^{n+۱}x_۰, f^nx_۰) &= d(f(f^nx_۰), f(f^{n-۱}x_۰)) \\ &\leq kd(f^nx_۰, f^{n-۱}x_۰) \\ &\leq k^nd(fx_۰, x_۰). \end{aligned}$$

فرض کنید $m > n$ در این صورت

$$\begin{aligned} d(f^mx_۰, f^nx_۰) &\leq d(f^mx_۰, f^{m-۱}x_۰) + \cdots + d(f^{n+۱}x_۰, f^nx_۰) \\ &\leq (k^{m-۱} + k^{m-۲} + \cdots + k^n)d(fx_۰, x_۰) \\ &= \frac{k^n - k^m}{۱ - k}d(fx_۰, x_۰) \\ &\leq \frac{k^n}{۱ - k}d(fx_۰, x_۰). \end{aligned}$$