دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز تهران

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی(گرایش آنالیز عددی)

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

حل مسایل مقدار مرزی منفرد غیر خطی با استفاده از روش تکرار تغییر پذیر

احمد ترابی نوش‌آبادی

استاد راهنما

دکتر فهیمه سلطانیان

استاد مشاور

دکتر خدیجه احمدی آملی

مرداد ۱۳۹۱

شماره: ....

تاریخ: ....

پیوست: ....

دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور استان تهران

اللهم عجل لولیک الفرج و العافیة و النصر

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

مرکز تهران شرق

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه کارشناسی ارشد آقای احمد ترابی نوش آبادی

دانشجوی رشته ریاضی کاربردی(آنالیز عددی) به شماره دانشجویی: ۸۸۰۰۰۱۵۰۳

تحت عنوان:

حل مسایل مقدار مرزي منفرد غير خطي با استفاده از روش تكرار تغيير پذير

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روزسه شنبه مورخ: ۹۱/۰۵/۱۰ ساعت : ۱۳-۱۲ درمحل تهران شرق بر گزار شد. و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد......۱۹ به حروف نوزده تمام.................. و با درجه ارزشیابی....عالی...................مورد قبول واقع شد ☑ نشد ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهي	دانشگاه/ موسسه	امضاء
۱	دكترفهيمه سلطانيان	استاد راهنما	استادیار	پیام نور	
۲	دكترخديجه احمدي آملي	استاد مشاور	استادیار	پیام نور	
۳	دكترفاطمه شاكري	استاد داور	استادیار	دانشگاه صنعتي اميركبير	
۴	دكترمسعود خليلي	نماينده علمي گروه / نماينده تحصيلات تكميلي	استادیار	پیام نور	

تهران ، خیابان کریمخان زند ،خیابان استاد نجات الهی ، خیابان شهید فلاح پور ، پلاک ۲۷ مرکز تهران شرق

تلفن : ۸۸۹۱۳۴۷۵

دورنگار: ۸۸۹۴۸۹۸۴

Tshargh.Tpnu.ac.ir

Tshargh@Tpnu.ac.ir

اینجانب **احمد ترابی نوش‌آبادی** دانشجوی ورودی سال **۱۳۸۸** مقطع **کارشناسی ارشد** رشته **ریاضی کاربردی** گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جواب‌گوی آن خواهم بود.

احمد ترابی نوش‌آبادی

اینجانب **احمد ترابی نوش‌آبادی** دانشجوی ورودی سال **۱۳۸۸** مقطع **کارشناسی ارشد** رشته **ریاضی کاربردی** گواهی می‌نمایم چنانچه براساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و **...** نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و **...** و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

احمد ترابی نوش‌آبادی

مرداد ۱۳۹۱

تقدیم به

پدرم ، مادر عزیزم ، یگانه دخترم و

همسر مهربانم که همواره حامی و مشوق من در زندگی و تحصیل بوده‌است.

سپاس...

خدایا، من در کلبه‌ی حقیرانه‌ام چیزی دارم که تو در عرش کبریائیت نداری...

من چون تویی دارم ، اما تو چون خود نداری.

پس از حمد و سپاس خدای مهربان که قدرت تفکر را به ما عطا فرمود، از زحمات بی‌دریغ استاد فرزانه ، سرکار خانم دکتر فهیمه سلطانیان که به واقع راهنمای بنده در طی نگارش این پایان نامه بودند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم .

*همچنین از **خانم دکتر خدیجه احمدی** و **خانم دکتر فاطمه شاکری** که در سمت استاد مشاور و استاد داور، با دقت نظر علمی خود در نگارش این پایان نامه همراه و راه‌گشای بنده بودند تشکر و قدردانی می-نمایم.*

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی یکی از روش‌های نیمه‌تحلیلی به نام روش تکرار تغییرپذیر می‌پردازیم و با ارائه‌ی مثال‌های متنوع، ویژگی‌های مهم و دلایل برتری این روش را بر سایر روش‌ها توضیح می‌دهیم. سپس از این روش برای حل معادلات منفرد غیرخطی امدن – فولر استفاده می‌کنیم و خواهیم دید که روش تکرار تغییرپذیر به خوبی می‌تواند بر مشکل منفرد بودن معادلات امدن– فولر در $x = ۰$ غلبه کرده و نتایج عددی با دقت بالا تولید کند. در ادامه، حالت خاصی از این معادلات به نام معادلات میکائیلیس– منتن را در نظر گرفته، جواب آن‌ها را در حالت‌های مختلف با استفاده از روش تکرار تغییرپذیر به‌دست آورده و نتایج عددی به‌دست آمده را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. برای حذف برخی محاسبات تکراری و کاهش هزینه‌های عملیاتی در روش تکرار تغییرپذیر، روش تکرار تغییرپذیر اصلاح شده را معرفی می کنیم. با بررسی مثال‌های مختلف مشخص می‌شود که این روش عملیات محاسباتی را تسهیل بخشیده و سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد.

واژگان کلیدی

معادلات دیفرانسیل غیرخطی، مسایل مقدار مرزی منفرد، روش تکرار تغییرپذیر، معادلات امدن – فولر، معادلات میکائیلیس – منتن، روش تکرار تغییرپذیر اصلاح شده.

فهرست مطالب

مقدمه:

گستردگی دامنه‌ی مباحث ریاضیات امروز به گونه‌ای است که متفکرین جهان هر کدام در یک راستا با این فرهنگ معما گونه‌ی حرکت زندگی همراه شده و دست به گسترش دامنه‌های جدید این علم پایه می‌زنند. در این میان مباحث معادلات دیفرانسیل، گوشه‌ای از این علم بی‌انتها است که بسیار مورد استفاده و راه گشای مهندسان و دانشمندان علوم مهندسی بوده است. امروزه معادلات دیفرانسیل و روش-های حل آن یکی از بارزترین و پراهمیت‌ترین مباحث مطرح در علوم می‌باشد که لزوم آگاهی و فراگیری مهارت‌های به کارگیری این علم را مشخص می‌نماید. نظریه معادلات دیفرانسیل، بهترین و عمومی‌ترین نظریه‌ی ریاضی و منشا ابداع نظریه‌های گوناگون در ریاضی و دیگر علوم است. همچنین با توجه به رابطه-ی نزدیک آن با علوم دیگر مخصوصا فیزیک، به نقش کلیدی و اهمیت وافر آن می‌توان پی برد.

مدل‌بندی بسیاری از مسایل علمی و مهندسی نظیر لایه های مرزی، کنترل و بهینه سازی، شبکه‌های جریان در بیولوژی، نجوم و ستاره شناسی، ترمودینامیک و بسیاری مسایل دیگر، منجر به یک مساله مقدار مرزی منفرد غیرخطی می‌شود. بنابراین یافتن جواب چنین مسایلی، موضوع مورد توجه بسیاری از محققان بوده و باعث شده است که روش‌های متنوع و گوناگونی برای یافتن جواب تحلیلی و عددی این مسایل ارائه شود.

یک دسته مهم از این مسایل، معادلات امدن– فولر می‌باشد. کاربرد وسیع این معادلات در ریاضی-فیزیک، نجوم و ترمودینامیک به ویژه مسایلی مانند رفتار دمایی یک توده‌ی گازی، همدمایی این توده‌ها، نظریه جریان در ترمودینامیک و چندین مساله از این نوع، محققان را برآن داشت تا روش‌های مختلفی را برای یافتن پاسخ این دسته از معادلات به کارگیرند.

از آنجا که روش‌های متداول و سنتی مستلزم انجام محاسبات سنگین، پر هزینه و پیچیده بوده و باعث اتلاف وقت وانرژی زیادی می‌شوند، تحقیقات قابل توجهی در زمینه‌ی ابداع روش‌های جدید برای حل تحلیلی و عددی معادلات امدن– فولر انجام گرفته است.

یکی از این روش‌ها روش تکرار تغییرپذیر نام دارد که یک روش مستقیم، آسان و معتبر برای حل بسیاری از مسایل موجود در فرایندهای فیزیکی است. عملکرد روش تکرار تغییرپذیر به گونه‌ای است که با استفاده از یک رابطه‌ی تکراری، یک دنباله از توابع را تولید می‌کند. به این صورت که در این روش در هر تکرار، تقریب‌های متوالی و پی‌درپی از جواب‌ها به‌دست می‌آیند که به جواب دقیق مساله همگرا هستند. در پاره‌ای از مسایل، این سری تولید شده از جواب‌ها ممکن است به جواب دقیق مساله همگرا شود، که در این صورت معمولا با استفاده از بسط سری تیلور توابع، می‌توان جواب تحلیلی مساله را به دست آورد. اما در برخی مسایل، جواب‌های به‌دست‌آمده فقط تقریب‌های عددی از جواب را به ما نشان می‌دهند.

در فصل اول این پایان نامه به بیان برخی مفاهیم پایه و کاربردی و تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم. در فصل دوم به معرفی روش تکرار تغییرپذیر پرداخته، مفاهیم موجود در این روش را توضیح داده و ویژگی‌های مهم آن را با ارائه‌ی مثال‌های متنوع نشان می‌دهیم. در این فصل همچنین، دلایل برتری این روش را بر روش‌های دیگر بیان خواهیم کرد.

در فصل سوم ابتدا به معرفی مساله مقدار مرزی منفرد غیرخطی امدن – فولر می‌پردازیم. حالت‌های خاص آن را همراه با کاربردهای فیزیکی بیان کرده و به حل آن با استفاده از روش تکرار تغییرپذیر می-پردازیم. مشکل اصلی که در حل عددی این مساله به‌وجود می‌آید، منفرد بودن آن در نقطه‌ی $x = ۰$ است. اما در ادامه خواهیم دید که روش تکرار تغییرپذیر به خوبی می‌تواند بر دشواری‌های حاصل از منفرد بودن معادلات امدن– فولر در $x = ۰$ غلبه کرده و نتایج عددی با دقت بالا تولید کند.

سپس حالت خاصی از معادلات امدن – فولر به نام معادله میکائیلیس – منتن را در نظر می‌گیریم. بخش عمده‌ی فصل سوم مربوط به حل معادله میکائیلیس – منتن با استفاده از روش تکرار تغییرپذیر است. حالت‌های مختلف این معادله را در نظر گرفته، به حل آنها با استفاده از روش تکرار تغییرپذیر پرداخته و نتایج عددی به‌دست آمده را با نتایج سایر روش‌ها مقایسه خواهیم کرد.

وجود برخی محاسبات تکراری و غیر ضروری در روش تکرار تغییر پذیر، باعث اتلاف زمان و صرف انرژی زیاد می‌شود. در فصل چهارم با ایجاد برخی اصلاحات و دست کاری‌ها در فرایند یافتن جواب در این روش، از بروز محاسبات تکراری برای حل معادلات امدن- فولر و میکائیلیس- منتن جلوگیری کرده، عملیات محاسباتی را تسهیل بخشیده و سرعت همگرایی را افزایش خواهیم داد.

۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱– ۱ مقدمه

بسیاری از مواقع در رشته‌های مختلف علوم، مهندسی، اقتصاد و ... ضرورت می‌یابد که برای بیان مسایل یک مدل ریاضی ساخته شود. اغلب این مدلهای ریاضی معادلاتی شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل هستند. چنین معادلاتی را ***معادلات دیفرانسیل*** می‌نامیم. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت در فیزیک، شیمی، زیست شناسی و نجوم و ... طبیعی‌ترین بیان خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند.

۱– ۲ مفاهیم پایه

تعریف ۱:

اگر تنها یک متغیر مستقل در معادله وجود داشته باشد آنگاه مشتقات موجود در معادله، مشتقات معمولی بوده و معادله‌ی مزبور ***معادله دیفرانسیل معمولی*** یا ***عادی*** نامیده می‌شود. اگر دو متغیر مستقل یا بیشتر در معادله وجود داشته باشد، آنگاه مشتقات موجود در معادله مشتقات جزئی بوده و معادله‌ی مزبور ***معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی*** نامیده می‌شود.

تعریف ۲:

مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل معمولی، بالاترین درجه‌ی مشتق موجود در معادله است و مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بالاترین مرتبه‌ی مشتق جزئی موجود، نامیده می‌شود.

معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n ام معادله دیفرانسیلی است که به صورت

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = ۰$$

نشان داده می‌شود. هدف از حل این معادله آن است که تابعی مانند $y = y(x)$ بیابیم که با جایگذاری y و مشتقاتش در معادله، آن را تبدیل به اتحادی بر حسب x نماید.

مثال: معادلات $\frac{dy}{dx} + ۲xy = e^{-x^۲}$ ، $\frac{d^۳y}{dx^۳} = x$ و $y'' + ۵y' + ۶y = ۰$ معادلات دیفرانسیل معمولی به ترتیب از مرتبه‌ی اول، سوم و دوم می‌باشند.

همچنین معادلات $\frac{\partial^۲\omega}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\omega}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲\omega}{\partial z^۲} = ۰$ ، $x^۲ z_{xx} = z_y$ و $\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} = y + x\frac{\partial y}{\partial t}$ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به ترتیب از مرتبه‌ی دوم، دوم و اول می‌باشند.

تعریف ۳ :

درجه‌ی یک معادله دیفرانسیل عبارت است از توان بزرگترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله.

مثال: معادله‌ی $y^۲ + y'^۲ = ۱$ معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و درجه‌ی دوم می‌باشد.

تعریف ٤ :

جواب معادله دیفرانسیل را که شامل پارامتر c است، ***جواب عمومی معادله دیفرانسیل*** گوییم. گاهی اوقات لازم است جوابی از یک معادله دیفرانسیل را که نمودار آن از نقطه‌ی خاصی می‌گذرد، بیابیم. چنین معادله‌ای را معادله با شرط اولیه یا ***مساله مقدار اولیه*** می‌نامیم. جواب یک مساله مقدار اولیه را ***جواب خصوصی معادله دیفرانسیل*** گوییم.

۱ – ۳ معادلات خطی

تعریف۵:

یک معادله دیفرانسیل را ***خطی*** گوییم اگر بر حسب متغیر وابسته y و مشتقات $y^{(n)}\ ,\ \dots, y'$ خطی باشد. بنابراین صورت کلی معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه‌ی n چنین است:

$$a_{\cdot}(x)y^{(n)} + a_{۱}(x)y^{(n-۱)} + \cdots + a_n(x)y(x) = g(x) \quad . \qquad (۱-۳-۱)$$

مهمترین نوع معادلات دیفرانسیل، معادلات خطی هستند که در آنها مشتق بالاترین مرتبه، تابعی از مشتقات مراتب پایین‌تر می‌باشد. بنابراین شکل کلی معادله خطی مرتبه اول به صورت $y' + p(x)y = q(x)$ می‌باشد و شکل عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم به صورت $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ است. واضح است که با انتخاب یک به عنوان ضریب y'' در این معادله، به هیچ وجه از کلیت مساله کاسته نمی‌شود زیرا می‌توان معادله را به ضریب y'' تقسیم نمود. این دسته از معادلات دیفرانسیل در فیزیک، به خصوص در رابطه با ارتعاشات و نظریه مدارات الکتریکی از اهمیت زیادی برخوردارند.

مثال: معادلات $y' - xy = xe^x$ و $y'' + ٤y' + ٤y = ۰$ به ترتیب معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول و دوم می‌باشند.

تعریف ٦ :

اگر در معادله‌ی (۱-۳-۱)، $g(x) = ۰$ باشد، معادله را یک معادله دیفرانسیل خطی **همگن**، در غیر این صورت یک معادله دیفرانسیل ***ناهمگن*** می‌نامیم.

مثال: $x^۲y'' - ۲xy' + ۲y = ۰$ یک معادله دیفرانسیل همگن و $x^۲y - ۲xy' + ۲y = sinx$ یک معادله دیفرانسیل ناهمگن است.

۱ – ۴ معادلات غیر خطی

تعریف ۷ :

یک معادله دیفرانسیل را ***غیر خطی*** گوییم اگر بر حسب متغیر وابسته y و مشتقات $y' , \dots , y^{(n)}$ خطی نباشد.

مثال: معادلات $\frac{d^۳y}{dx^۳} + siny = ۰$ و $yy' = x$ معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌باشند.

در ادامه، بحث مختصری پیرامون جواب‌های معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی مرتبه‌ی اول مطرح کرده و آنها را با هم مقایسه می‌کنیم.

معادله دیفرانسیل به صورت

$$y' = f(x, y) \qquad (۱-٤-۱)$$

با شرط اولیه‌ی

$$y(x_۰) = y_۰ \qquad (۲-٤-۱)$$

را در نظر می‌گیریم. معادله دیفرانسیل (۱-٤-۱) همراه با شرط اولیه‌ی (۱-٤-۲)، یک مساله مقدار اولیه تشکیل می‌دهند. سوالات اساسی که باید مورد توجه قرار گیرند عبارتند از این‌که آیا جوابی برای این مساله مقدار اولیه وجود دارد؟ آیا چنین جوابی یکتا است؟ جواب در چه فاصله‌ای معین است، و چگونه می‌توان فرمول مناسبی برای جواب ساخت؟ در حالتی که معادله‌ی (۱-٤-۱) خطی باشد، پاسخ به آسانی مشخص

می‌شود [۹]. اما اگر f نسبت به متغیر وابسته y تابعی خطی نباشد، کار دشوار می‌شود. علت آن که معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول نسبتا ساده‌ترند این است که فرمولی وجود دارد که جواب چنین معادله‌ای را در همه‌ی حالت‌ها به‌دست می‌دهد. بر عکس، برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و غیر خطی یک چنین روش کلی وجود ندارد. در واقع تعیین جواب $y = \varphi(x)$ به روش تحلیلی برای معادلات غیرخطی، معمولا دشوار و اغلب غیر ممکن است.

فقدان روش کلی برای تعیین جواب معادلات غیرخطی، حداقل دارای دو نتیجه‌ی مهم است. اول آن‌که روش‌های تقریب جواب مانند روش‌های عددی، و اطلاعات کیفی در باره‌ی جواب‌ها در معادلات غیر خطی اهمیت بیشتری نسبت به معادلات خطی پیدا می‌کنند. دوم آن‌که برای بررسی وجود و یکتایی جواب، باید از روش‌های غیر مستقیم استفاده کرد، زیرا در حالت کلی نمی‌توان از روش‌های مستقیم، جواب را به‌دست آورد.

معادلات خطی و غیرخطی از جنبه‌ی دیگری نیز تفاوت دارند که مربوط به مفهوم جواب عمومی است. برای معادله‌ی مرتبه‌ی اول می‌توان جوابی یافت که شامل یک ثابت دلخواه باشد، که با مشخص کردن مقادیر این ثابت همه‌ی جواب‌های ممکن به‌دست می‌آیند. درباره‌ی معادلات غیرخطی ممکن است وضع چنین نباشد. حتی اگر بتوان جوابی شامل یک ثابت دلخواه پیدا کرد، ممکن است جواب‌هایی وجود داشته باشد که نتوان آنها را به ازای هیچ مقداری از این ثابت به‌دست آورد. (خواننده برای مطالعه‌ی بیشتر می‌تواند به کتاب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی مراجعه کند.)

۱ – ۵ نقاط عادی و منفرد

تعریف ۸ : *بسط سری تیلور* [۱]

اگر تابع f در همسایگی x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f را می‌توان به صورت توان‌هایی از $(x - x_0)$ نوشت. یعنی

[۱] - Taylor Series

$$f(x) = f(x_\cdot) + \frac{f'(x_\cdot)(x - x_\cdot)}{۱!} + \frac{f''(x_\cdot)(x - x_\cdot)^۲}{۲!} + \cdots \Rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_\cdot)}{n!}(x - x_\cdot)^n.$$

که در اینجا، $f^{(n)}$ مشتق n–ام تابع f است. این بسط به نام ریاضی‌دان انگلیسی بروک تیلور اسم‌گذاری شده است. این بسط برای همه‌ی توابع حقیقی انجام‌پذیر نیست. مخصوصا اگر $x_\cdot = ۰$ ، سری فوق را سری مک‌لوران f می‌نامیم. در حالت کلی ممکن است سری تیلور f حول $x_\cdot$ در x به $f(x)$ همگرا نباشد.

به وسیله بسط تیلور، می‌توان توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر را به صورت توابع توانی نوشت، و یا به عبارتی، بسط داد.

مثال: تابع $f(x) = e^{۲x}$ در همسایگی منفی یک، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$e^{۲x} = \frac{۱}{e^۲} + \frac{۲(x+۱)}{۱!e^۲} + \frac{۲^۲(x+۱)^۲}{۲!e^۲} + \cdots .$$

تعریف ۹ :

تابع f را در $x_\cdot$ ***تحلیلی*** نامیم هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی $(x_\cdot - R, x_\cdot + R)$ و $R > ۰$ ، بسط سری تیلور f به $f(x)$ همگرا باشد. یعنی

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_\cdot)}{n!}(x - x_\cdot)^n \ , \quad |x - x_\cdot| < R .$$

تعریف ۱۰ :

نقطه‌ی $x = x_\cdot$ را یک نقطه‌ی ***عادی*** معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ گوییم، هرگاه دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ در $x_\cdot$ تحلیلی باشند. اگر حداقل یکی از این دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ در $x_\cdot$ تحلیلی نباشند، نقطه‌ی $x_\cdot$ را یک نقطه‌ی ***منفرد*** یا ***تکین*** معادله دیفرانسیل مزبور می‌نامیم. در بیشتر معادلات دیفرانسیل توابع $p(x)$ و $q(x)$ توابعی گویا هستند. بنابراین، این توابع در هرنقطه به جز

نقاطی که به ازای آنها مخرج صفر می‌شود، تحلیلی هستند. نقاطی که به ازای آنها مخرج صفر می‌شود، نقاط منفرد معادله بوده و بقیه‌ی نقاط، نقاط عادی هستند.

مثال: در معادله دیفرانسیل $(۱-x^۲)y''-۲xy'+۲y=۰$ داریم:

$$p(x)=\frac{-۲x}{۱-x^۲} \quad , \quad q(x)=\frac{۲}{۱-x^۲} \; .$$

نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ نقاط منفرد، و هر نقطه‌ی دیگر عادی است.

در معادله دیفرانسیل $y''+\frac{۲}{x}y'+y^m=۰$ نقطه‌ی $x=۰$ منفرد است.

۱ – ۶ مسایل مقدار مرزی

یک معادله دیفرانسیل به صورت

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{۱-۶-۱}$$

به همراه شرایط اولیه‌ی

$$y(x_۰)=y_۰ \quad , \quad y'(x_۰)=y'_۰ \tag{۱-۶-۲}$$

تشکیل یک مساله مقدار اولیه می‌دهند. اما مدل‌بندی بیشتر مسایل، اغلب به نوع دیگری از مسایل منجر می‌شوند که در آن مقدار متغیر وابسته‌ی y یا مشتقش، در دو نقطه‌ی مختلف معین است. این شرایط را ***شرایط مرزی*** می‌نامند تا از مسایل مقدار اولیه که مقدار y و y' در نقطه‌ی *واحدی* معین می‌شوند، متمایز گردد. یک معادله دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی مناسب، یک ***مساله مقدار مرزی*** تشکیل می‌دهند. یک مثال نوعی عبارت است از :

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \quad , \quad \alpha<x<\beta \tag{۱-۶-۳}$$

با شرایط مرزی

$$y(\alpha)=y_۰ \quad , \quad y(\beta)=y_۱ \; . \tag{۱-۶-۴}$$

برای حل مساله مقدار مرزی (۱-٦-۳) و (۱-٦-٤) باید تابعی چون $y=\varphi(x)$ بیابیم که در معادله دیفرانسیل (۱-٦-۳) در بازه‌ی $\alpha<x<\beta$ صدق کند و مقادیر معین $y_۰$ و $y_۱$ را در نقاط انتهایی بازه بگیرد. معمولا ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل را یافته و سپس، با استفاده از شرایط مرزی، مقادیر ثابت‌های دلخواه را تعیین می‌کنیم.

با آن که مساله مقدار اولیه (۱-٦-۱) و (۱-٦-۲) و مساله مقدار مرزی (۱-٦-۳) و (۱-٦-٤) ممکن است مشابه به نظر برسند، لیکن جواب‌هایشان به طرق بسیار مهم مختلفی فرق دارند. از آن سو، مسایل مقدار مرزی تحت شرایط مشابه ممکن است جواب منحصر به فرد داشته باشند، ممکن است جواب نداشته باشند یا در بعضی حالات بی‌نهایت جواب داشته باشند.

مثال زیر یک مساله مقدار مرزی ناهمگن با جواب منحصر به فرد را نشان می‌دهد.

مثال: مساله مقدار مرزی

$$y''+۲y=۰\ \ ,\ \ y(۰)=۱\ \ ,\ \ y(\pi)=۰$$

را در نظر می‌گیریم. جواب عمومی این مساله عبارت است از:

$$y=c_۱cos\sqrt{۲}x+c_۲sin\sqrt{۲}x.$$

شرط مرزی اول حکم می‌کند که $c_۱=۱$. شرط مرزی دوم ایجاب می‌کند که

$$cos\sqrt{۲}\pi+c_۲sin\sqrt{۲}\pi=۰\ ;$$

در نتیجه $c_۲=-cot\sqrt{۲}\pi\cong -۲\ /\ ۲۷٦۲$. بنابراین، جواب جواب مساله عبارت است از

$$y=cos\sqrt{۲}x-cot\sqrt{۲}\pi sin\sqrt{۲}x\ \ .$$

مثال بعد نشان می‌دهد که یک مساله مقدار مرزی ناهمگن ممکن است جواب نداشته باشد، و نیز تحت شرایط خاص ممکن است بی‌نهایت جواب داشته باشد.

مثال: مساله مقدار مرزی

$$y''+y=۰\ \ ,\ \ y(۰)=۱\ \ ,\ \ y(\pi)=a$$

را در نظر می‌گیریم که در آن a ثابت دلخواه است.

جواب عمومی این مساله عبارت است از :

$$y = c_1 cosx + c_2 sinx.$$

از شرط مرزی اول داریم: $c_1 = 1$. شرط مرزی دوم حکم می‌کند که $-c_1 = a$. اگر $a \neq -1$ ، این دو شرط برای c_1 ناسازگارند. در نتیجه مساله در این حالت جواب ندارد. اما، اگر $a = -1$ ، هردو شرط مرزی برقرارند مشروط بر اینکه، صرف نظر از مقدار c_2، $c_1 = 1$. در این حالت بی‌نهایت جواب به شکل زیر داریم:

$$y = cosx + c_2 sinx \ ,$$

که در آن c_2 ثابت می‌ماند.

۱ – ۷ تابعک

فرض کنید X یک فضای برداری خطی باشد، یک عملگر(خطی) از X به توی فضای R یک تابعک (خطی) حقیقی روی X نامیده می‌شود. همچنین اگر X یک فضای خطی نرم‌دار باشد، یک عملگر خطی کراندار از X به توی R یک تابعک خطی پیوسته حقیقی روی X نامیده می‌شود [۱۳].

۱– ۸ قاعده‌ی لایب نیتز[1]

فرض کنیم $f(x,t)$ و $\frac{\partial f}{\partial t}$ توابعی پیوسته روی دامنه‌ی D بوده و $\alpha'(t)$ و $\beta'(t)$ توابعی پیوسته در نقاط x و t در فاصله‌ی $[c,d]$ باشند. اگر φ در $[c,d]$ به صورت

$$\varphi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$$

تعریف شده باشد، آنگاه φ به ازای هر t در $[c,d]$ مشتق دارد و این مشتق برابر است با

[1] - Leibniz

$$\varphi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dx.$$

(برهان در [۵]).