بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه رازی
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

تکیه‌گاه کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما:
دکتر احد رحیمی

نگارش:
صادق رحیمی ناغانی

بهمن ۸۹

دانشگاه رازی

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

تکیه‌گاه کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما:

دکتر احد رحیمی

نگارش:

صادق رحیمی ناغانی

بهمن ۸۹

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

نام دانشجو:
صادق رحیمی ناغانی

تحت عنوان :
تکیه‌گاه کوهمولوژی موضعی

در تاریخ ۱۳۸۹/۱۱/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱ - استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر احد رحیمی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

۲ - استاد داور داخل گروه دکتر سیروس رسولیار با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

۳ - استاد داور خارج گروه دکتر سیامک یاسمی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء:

سپاس گزاری

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می داری.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

خداوندا ! دستانم خالی‌اند و دلم غرق آرزوها، یا با قدرت بیکرانت دستانم را توانا گردان یا دلم را از آرزوهای دست نیافتنی خالی کن.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر احد رحیمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید و بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر فداکارم و برادران و خواهر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند. در پایان از دوستان عزیزم آقایان امیدی، کرمیانی، صالحی، طاهرآبادی و نورمحمدی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

صادق رحیمی ناغانی

بهمن ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر، مادر و همسر مهربانم

چکیده

در این پایان نامه به بررسی این سؤال می‌پردازیم که، اگر R حلقه‌ای نوتری، I ایده‌آلی از آن و M یک R–مدول متناهی مولد باشد، آیا تکیه‌گاه $H_I^i(M)$ با توپولوژی زاریسکی بسته است؟ در چند مورد به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهیم؛ بویژه ثابت می‌کنیم اگر بعد کوهمولوژیکی ایده‌آل I حداکثر دو باشد، و یا حلقه مورد نظر موضعی با بعد حداکثر چهار باشد آنگاه به ازای هر $i \geq o$ تکیه‌گاه $H_I^i(R)$ بسته است.

کلمات کلیدی:

کوهمولوژی موضعی، تکیه‌گاه، ایده‌آل‌های اول وابسته، توپولوژی زاریسکی.

فهرست مطالب

عنوان		صفحه

پیشگفتار

در مرجع [۱۵] هونیکه[۱] این سؤال را مطرح کرد: اگر R حلقه‌ای نوتری I ایده‌آلی از آن و M، R–مدولی متناهی مولد باشد، آیا مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته کوهمولوژی مدول موضعی $H_I^i(M)$ همواره متناهی است؟
سپس در چند مورد به این سؤال پاسخ منفی داده شد. به عنوان مثال:

۱. در مرجع [۴۰] سینگ[۲] ثابت کرد اگر $R = \mathbb{Z}[u,v,w,x,y,z]/(ux+vy+wz)$ باشد، آنگاه مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته $H^{۳}_{(x,y,z)}(R)$ نامتناهی است.

۲. کاتزمن[۳] در مرجع [۱۹] ثابت کرد اگر

$$R = K[s,t,u,v,x,y]/(su^{۲}x^{۲} - (s+t)uxvy + tv^{۲}y^{۲})$$

باشد آنگاه مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته $H^{۲}_{(x,y)}(R)$ نامتناهی است.

۳. سر انجام سوانسون[۴] و سینگ در مرجع [۴۱] مثال‌هایی را ارائه دادند که در آنها مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته $H_I^i(R)$ نامتناهی است.

در پی پاسخ‌های منفی به آن، سؤال را به صورت زیر تغییر کرد.
آیا عناصر مینیمال تکیه‌گاه کوهمولوژی مدول‌های موضعی همواره متناهی است؟ این سؤال معادل با این است که بگوییم: آیا تکیه‌گاه کوهمولوژی مدول‌های موضعی از حلقه‌های نوتری (یا مدول‌ها) همواره با توپولوژی زاریسکی[۵] زیر مجموعه‌ای بسته از $\mathrm{Spec}(R)$ است؟ (قضیه ۱–۴–۸). این سؤال در حالی کلی تاکنون حل نشده است. هدف اصلی ما در این پایان نامه بررسی مواردی است که به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهند.
در چند مورد به کمک قضیه ۱–۴–۷ می‌توان به این سؤال پاسخ مثبت داد که در زیر به برخی از آنها اشاره می‌کنیم. قضیه ۱–۴–۷ بیان می‌کند که، روی حلقه نوتری R اگر مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته R–مدول Mمتناهی باشد، آنگاه تکیه‌گاه آن بسته است.

۱. اگر R حلقه‌ای موضعی و منظم شامل یک میدان و I ایده‌آلی از آن باشد، آنگاه به ازای هر $i \geq o$ تکیه‌گاه $H_I^i(R)$ بسته است. در واقع در مرجع [۱۷] برای حلقه‌های موضعی و منظم شامل یک میدان با مشخصه $p > o$ و در مرجع [۲۳] برای حلقه‌های موضعی و منظم شامل یک میدان با

[۱]Huneke [۲]Sing [۳]Katzman [۴]Swanson [۵]Zariski toplplogy

مشخصه صفر ثابت می‌شود، به ازای هر $i \geq 0$ و هر ایده‌آل I مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته $H_I^i(R)$ متناهی است.

۲. اگر R حلقه‌ای متحد[۱] موضعی و منظم با مشخصه آمیخته[۲] باشد، آنگاه به ازای هر ایده‌آل I و هر $i \geq 0$ تکیه‌گاه $H_I^i(R)$ بسته است. این مطلب در مرجع [۲۴] ثابت می‌شود.

۳. در مرجع [۴] ثابت می‌شود اولین کوهمولوژی مدول موضعی که متناهی مولد نیست دارای تعداد متناهی ایده‌آل اول وابسته است (گزاره ۳–۵ از فصل سوم را ببینید).

۴. در فصل سوم ثابت می‌کنیم اگر Rحلقه‌ای نوتری و I ایده‌آلی از آن باشد، آنگاه برای $i \in \{0,1\}$، $i = \operatorname{grade}(I,R)$ ، $i = \dim(R)$ یا (در حالت موضعی بودن حلقه) $i = \dim(R) - 1$، مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به $H_I^i(R)$ متناهی و در نتیجه تکیه‌گاه آن بسته است.

بویژه علاقه‌مندیم پاسخ این سؤال را بدانیم: آیا تکیه‌گاه آخرین کوهمولوژی مدول موضعی[۳] همواره بسته است؟ ($H_I^i(R)$ را آخرین کوهمولوژی مدول موضعی گوییم هرگاه $H_I^i(R) \neq 0$ و به ازای هر $j > i$، $H_I^j(R) = 0$). به این سؤال نیز در چند مورد پاسخ مثبت داده شده است. به عنوان مثال

۱. در فصل سوم در قضیه ۳–۱–۸ ثابت می‌کنیم، اگر R حلقه‌ای نوتری و I ایده‌آلی با بعد کوهمولوژیکی[۴] دو باشد (تعریف ۲–۳–۱ را ببنید) آنگاه به ازای هر R–مدول متناهی مولد M تکیه‌گاه $H_I^2(M)$ بسته است.

۲. در فصل پنجم در قضیه ۵–۱–۱۱ نشان می‌دهیم، اگر R حلقه‌ای مدرج با ساختار استاندارد (یعنی $R = R_0[R_1]$) و M، R–مدولی مدرج و متناهی مولد باشد، آنگاه تکیه‌گاه آخرین کوهمولوژی مدول موضعی از M نسبت به ایده‌آل $R_+ = \underset{i \geq 1}{\oplus} R_i$ همواره بسته است.

۳. در مرجع [۲۰] کاتزمن ثابت کرد، اگر حلقه $\mathbb{N}$–مدرج و نوتری R به گونه‌ای باشد که R_0 تصویر همریخت یک حوزه صحیح و R_+ توسط n عنصر همگن تولید شود، آنگاه تکیه‌گاه $H_{R_+}^n(R)$ بسته است.

۴. کاتزمن به کمک استدلالی از لیوبزنیک در مرجع [۲۰] ثابت کرد، اگر R حلقه‌ای با مشخصه $p > 0$ و I ایده‌آلی تولید شده توسط n عنصر باشد، آنگاه تکیه‌گاه $H_I^n(R)$ بسته است. در قضیه ۳–۳–۱۲ این مطلب را تعمیم خواهیم داد.

---

[۱] unramified [۲] mixed characteristic [۳] top local cohomology module [۴] cohomological dimension

البته مسأله (۴) برای حلقه‌هایی که شامل یک میدان با مشخصه صفر هستند تاکنون حل نشده است. همچنین اگر $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی با هم‌مشخصه[۱] صفر و I ایده‌آلی تولید شده توسط سه عنصر باشد به طوری که $\mathrm{pd}(R/I) = \mathrm{grade}(R/I,R) = ۲$، بسته بودن تکیه‌گاه $H^{۳}_{I}(R)$ هنوز برای ما مشخص نیست. با توجه به نتیجه ۴-۲۵ از اگر بسته بودن تکیه‌گاه $H^{۳}_{I}(R)$ ثابت شود، آنگاه برای ایده‌آل $J=(x_{۱},\dots,x_n)$ که در آن $n\geq ۶$ تکیه‌گاه $H^{n}_{J}(R)$ نیز بسته خواهد بود.

موارد (۱) تا (۴) فوق پاسخ‌های مثبتی برای سؤال زیر نیز فراهم می‌آورند.

اگر Rحلقه‌ای نوتری، M یک R-مدول متناهی مولد و I ایده‌آلی تولید شده توسط n عنصر باشد. آیا تکیه‌گاه $H^{n}_{I}(M)$ بسته است؟

در گزاره ۳-۱-۳ ثابت می‌کنیم، کافیست به این سؤال برای $M=R$ پاسخ داده شود. اگر $n=۱$ باشد، بدیهی است که تکیه‌گاه $H^{۱}_{I}(R)$ بسته است. حالتی که $n=۲$ باشد نیز توسط هاکستر[۲] در نتیجه ۶.۱۱ از مرجع [۱۳] ثابت شد، که در قضیه ۳-۱-۸ آنرا تعمیم خواهیم داد. متأسفانه تکنیکی که برای اثبات قضیه ۳-۱-۸ به کار می‌بریم، برای بعد کوهمولوژیکی بالاتر بدون تغییرات اساسی کارساز نیست.

برای حالت $n=۳$ در گزاره ۳-۴-۱۰ ثابت می‌کنیم، اگر R-مدول متناهی مولد M به گونه‌ای باشد که به ازای هر ایده‌آل I تولید شده توسط سه عنصر تکیه‌گاه $H^{۳}_{I}(M)$ بسته باشد، آنگاه به ازای هر ایده‌آل I تولید شده توسط n عنصر تکیه‌گاه $H^{n}_{I}(M)$ بسته است.

در بخش دوم از فصل (۳) نشان می‌دهیم اگر R حلقه‌ای موضعی و نوتری با بعد حداکثر چهار و M یک R-مدول متناهی مولد باشد، آنگاه به ازای هر $i\geq o$ و هر ایده‌آل I تکیه‌گاه $H^{i}_{I}(M)$ بسته است (گزاره ۳-۲-۸). در بخش سوم از فصل (۳) تعمیمی از نتیجه لیوبزنیک[۳] روی حلقه‌های با مشخصه p را ثابت می‌کنیم که در بالا اشاره‌ای به آن کردیم (قضیه ۳-۳-۱۲).

اگر R شامل یک میدان از مشخصه صفر باشد نتیجه زیر از قضیه ۴-۲۰ را ثابت می‌کنیم:

فرض کنید I ایده‌آلی تولید شده توسط n عنصر باشد، که $n\geq ۶$. آنگاه ماتریسی ۳×۲ مانند Aبا درآیه‌هایی از R وجود دارد که یکریختی $H^{n}_{I}(R)\cong H^{۳}_{I_{۲}(A)}(R)$ را داشته باشیم که در آن $I_{۲}(A)$ ایده‌آل تولید شده توسط کهادهای ۲×۲ از ماتریس A است. به‌علاوه اگر $\mathrm{grade}(I,R)\geq ۲$ باشد آنگاه می‌توان فرض کرد $\mathrm{grade}(I_{۲}(A),R)\geq ۲$ و درنتیجه $\mathrm{pd}(R/I_{۲}(A))=۲$. این قضیه نتایج جالبی دارد، بویژه در ارتباط با مثال هارتشرن نتایج آنرا خواهیم دید (مثال ۴-۲۰).

در بخش دوم از فصل (۵) به کمک محک توپولوژیکی ناگاتا[۴] نشان می‌دهیم، اگر Rحلقه‌ای مدرج با ساختار استاندارد باشد، به گونه‌ای که بعد R_o حداکثر دو باشد، آنگاه تکیه‌گاه $H^{i}_{R_+}(M)$ به ازای هر $i\geq o$ و هر R-مدول مدرج متناهی مولد و کوهن-مکالی مانند M بسته است (گزاره ۵-۲-۱۲). در گزاره

[۱] equicharacteristic [۲] Hochster [۳] Lyubeznik [۴] topological Nagata criterion

۵-۲-۱۳ نیز نشان می‌دهیم اگر R_o با بعد حداکثر سه و دارای تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد، آنگاه به ازای هر R-مدول مدرج متناهی مولد و کوهن-مکالی M و هر $i \geq o$ تکیه‌گاه $H^i_{R_+}(M)$ بسته است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه R
$\mathrm{Max}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R
$\mathrm{Supp}(M)$	تکیه‌گاه مدول M
$\mathrm{ZD}(M)$	مجموعه تمام مقسوم علیه‌های صفر مدول M
NZD	مجموعه تمام غیر مقسوم علیه‌های صفر مدول M
$\mathrm{Ass}(M)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول M
$\mathrm{Ann}(M)$	پوچساز مدول M
$V(I)$	واریته ایده‌آل I
$\subseteq$	زیرمجموعه
$\oplus$	حاصل جمع مستقیم
$\otimes$	حاصلضرب تانسوری
$\cup$	اجتماع
$\cap$	اشتراک
$\mathrm{grade}(I, M)$	رتبه I در M
$\mathrm{depth}(M)$	عمق M
$\dim(M)$	بعد مدول M
$\mathrm{ht}I$	ارتفاع ایده‌آل I
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\mathrm{id}(M)$	بعد انژکتیو مدول M
$\mathrm{pd}(M)$	بعد پروژکتیو مدول M
$\cong$	یکریختی
$\sup$	کوچکترین کران بالا
$\inf$	بزرگترین کران پایین
UFD	حوزه تجزیه یکتا
$l(M)$	طول مدول M
vdim	بعد فضای برداری
$\mathrm{Ker}(f)$	هسته‌ی همریختی f
$\mathrm{Im}(f)$	تصویر (برد) همریختی f
$\varinjlim$	حد مستقیم
$\mathrm{cd}(I)$	بعد کوهمولوژیکی ایده‌آل I
$\mathrm{cd}(I, M)$	بعد کوهمولوژیکی ایده‌آل I نسبت به مدول M
$\mathcal{C}(R)$	رسته R–مدول‌ها و R–همریختی‌های بین آنها
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	مجموعه تمام R–همریختی‌های بین R–مدول‌های M و N
$\widehat{M}$	کامل شده مدول M
$E(M)$	پوشش انژکتیو مدول M
$K[x_1, \ldots, x_n]$	حلقه چندجمله‌ای
$\mathrm{Soc}(M)$	ساکل مدول M

فصل ۱

پیش نیازها

تمامی حلقه‌ها در این پایان نامه جابه‌جایی و یکدار در نظر گرفته شده‌اند.

۱ - ۱ مفاهیم و قضایایی از جبر جابه‌جایی

تعریف ۱ - ۱ - ۱ (تکیه‌گاه[۱]). *فرض کنید M یک R - مدول دلخواه باشد، تکیه‌گاه M را با نماد $\mathrm{Supp}(M)$ (اگر بخواهیم بر حلقه مربوطه تاکید کنیم با $\mathrm{Supp}_R(M)$) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : M_{\mathfrak{p}} \neq o\}.$$

لم ۱ - ۱ - ۲. *فرض کنید M یک R - مدول باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند.*

۱. $M = o$،

۲. به ازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $M_{\mathfrak{p}} = o$ یعنی $\mathrm{Supp}(M) = \emptyset$،

۳. به ازای هر $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$، $M_{\mathfrak{m}} = o$.

برهان. رجوع شود به لم ۱۵.۹ مرجع [۳۹] . □

گزاره ۱ - ۱ - ۳. *اگر $o \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow o$ دنباله‌ای دقیق[۲] از R - مدول‌ها و R - همریختی‌ها باشد، آنگاه $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'')$.*
بویژه اگر $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از R - مدول‌ها باشد $\mathrm{Supp}(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Supp}(M_i)$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۱.۵.۴ از مرجع [۲]. □

تعریف ۱ - ۱ - ۴ (واریته یک ایده‌آل[۳]). *فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. واریته I را با $V(I)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

لم ۱ - ۱ - ۵. *اگر R حلقه‌ای نوتری و M، R - مدولی متناهی مولد باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}_R(M)).$$

---
[۱] Support [۲] exact sequence [۳] variety

برهان. رجوع شود به لم ۲۰.۹ مرجع [۳۹]. $\square$

تعریف ۱-۱-۶. *برای R-مدول دلخواه M مجموعه همه مقسوم علیه‌های صفر R نسبت به M را با نماد $\mathrm{ZD}(M)$ (اگر بخواهیم به حلقه تاکید کنیم با $\mathrm{ZD}_R(M)$) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\mathrm{ZD}(M) = \{x \in R : xm = o \text{ به ازای عنصر ناصفری چون } x \text{ از } M \text{ داشته باشیم، }\}.$$

مجموعه $\mathrm{NZD}(M) = R \backslash \mathrm{ZD}(M)$ را مجموعه تمام غیر مقسوم علیه‌های صفر R نسبت به M می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۷ (ایده‌آل های اول وابسته[۱]). *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول باشد. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R را ایده‌آل اول وابسته به M گوییم هرگاه عنصر ناصفری چون $m \in M$ وجود داشته باشد که $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(m)$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با نماد $\mathrm{Ass}(M)$ (اگر بخواهیم بر حلقه مربوطه تاکید کنیم با $\mathrm{Ass}_R(M)$) نمایش می‌دهیم. لذا*

$$\mathrm{Ass}(M) = \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(x) \text{ به ازای عنصر ناصفری چون } x \text{ از } M \text{ داشته باشیم، }\right\}.$$

با این تعریف به سادگی می‌توان نشان داد $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ اگر و تنها اگر دنباله دقیقی چون $o \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M$ وجود داشته باشد.

گزاره ۱-۱-۸. *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M, N، R-مدول‌هایی دلخواه باشند. در این صورت*

۱. $M = o$ *اگر و تنها اگر* $\mathrm{Ass}_R(M) = \emptyset$.

۲. *اگر M متناهی مولد باشد، $\mathrm{Ass}_R(M)$ مجموعه‌ای متناهی است.*

۳. *اگر $N \subseteq M$ باشد، آنگاه* $\mathrm{Ass}_R(N) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(N) \cup \mathrm{Ass}_R(M/N)$.

۴. $\mathrm{ZD}_R(M) = \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$.

۵. *اگر $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ خانواده‌ای از R-مدول‌ها باشد* $\mathrm{Ass}(\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} M_i) = \bigcup\limits_{i\in\Lambda} \mathrm{Ass}(M_i)$.

برهان. رجوع شود به بخش ۱.۳ از مرجع [۲]. $\square$

گزاره ۱-۱-۹. *اگر R حلقه‌ای نوتری و M، R-مدول باشد، به ازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ شرایط زیر معادل‌اند.*

[۱] associated prime ideals

۱. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$،

۲. $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$ وجود دارد که داشته باشیم $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۱.۵.۸ از مرجع [۲]. □

تعریف ۱-۱-۱۰. *ایده‌آل سره $\mathfrak{q}$ از حلقه R را ابتدایی[۱] گوییم، هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in \mathfrak{q}$ و $a \notin \mathfrak{q}$ آنگاه داشته باشیم $b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. بدیهی است که هر ایده‌آل اول ایده‌آلی ابتدایی است. همچنین اگر $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی ابتدایی باشد آنگاه $\sqrt{\mathfrak{q}}$ ایده‌آلی اول است، اگر $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ آنگاه $\mathfrak{q}$ را $\mathfrak{p}$-ابتدایی می‌نامیم.*

تعریف ۱-۱-۱۱ (تجزیه ابتدایی[۲]). *فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. اگر I را بتوان به صورت اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های ابتدایی بیان کرد، یعنی $I = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ به‌طوری که $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ آنگاه این اشتراک را یک تجزیه ابتدایی برای I می‌نامیم. همچنین این تجزیه ابتدایی را مینیمال گوییم هرگاه*

۱. *ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ همگی متمایز باشند.*

۲. *به ازای هر $j = 1, \dots, n$ داشته باشیم $\bigcup\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{q}_i \nsubseteq \mathfrak{q}_j$ یعنی $I \neq \bigcup\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{q}_i$.*

قرارداد ۱-۱-۱۲. *اگر $I = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ به طوریکه به ازای هر $i = 1, \dots, n$، $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ یک تجزیه ابتدایی مینیمال برای I باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $\mathrm{ass}(I) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$. در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Minass}(I)$.*

تعریف ۱-۱-۱۳. *اگر I ایده‌آلی تجزیه پذیر باشد (دارای یک تجزیه ابتدایی باشد). آنگاه عناصر مجموعه $\mathrm{Minass}(I)$ را ایده‌آل‌های اول منفرد[۳] و بقیه عناصر $\mathrm{ass}(I)$ را ایده‌آل‌های اول محاطی[۴] می‌نامیم. همچنین ایده‌آل I را مرتب[۵] گوییم هرگاه فاقد ایده‌آل‌های اول محاطی باشد، یعنی $\mathrm{Minass}(I) = \mathrm{ass}(I)$.*

نکته ۱-۱-۱۴. *اگر I ایده‌آلی از R باشد می‌توان ثابت کرد*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(I)} \mathfrak{p}.$$

---

[1] primary [2] primary decomposition [3] isolated primes [4] embeded primes [5] unmixed ideal

تعریف ۱-۱-۱۵ (ارتفاع[۱]). *فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی اول از R باشد، ارتفاع $\mathfrak{p}$ را طول بزرگترین زنجیر از ایده‌آل‌های اول R به صورت $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ تعریف کرده و آنرا با نماد $\operatorname{ht} \mathfrak{p}$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر R نوتری باشد برای ایده‌آل دلخواه I تعریف می‌کنیم*

$$\operatorname{ht} I = \min\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

با این تعریف به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$\operatorname{ht} I = \min\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(I)\} = \min\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(I)\}.$$

گزاره ۱-۱-۱۶. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه نوتری R باشد که $\sqrt{I} = I$ و $\operatorname{ht} I = n$. در این صورت I را می‌توان به صورت $I = L \cap K$ نوشت که در آن L ایده‌آلی مرتب است که $\operatorname{ht} L = n$ و K ایده‌آلی است که $\operatorname{ht} K \geq n+1$ و $\operatorname{ht}(L+K) \geq n+2$.*

برهان. مجموعه $\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{A} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(I) : \operatorname{ht} \mathfrak{p} = n\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Minass}(I) : \operatorname{ht} \mathfrak{p} = n\}.$$

حال قرار می‌دهیم $L = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{A}} \mathfrak{p}$ و $K = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(I) \setminus \mathcal{A}} \mathfrak{p}$ ادعا می‌کنیم L و K در شرایط خواسته شده صدق می کنند. با توجه به نکته ۱-۱-۱۴ واضح است که $I = L \cap K$. حال داریم

۱. $L = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{A}} \mathfrak{p}$ یک تجزیه ابتدایی مینیمال برای L است، پس $\operatorname{Minass}(L) = \operatorname{ass}(L) = \mathcal{A}$. بنابراین L ایده‌آلی مرتب است. همچنین به ازای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(L)$، $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = n$ لذا $\operatorname{ht} L = n$.

۲. $K = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(I) \setminus \mathcal{A}} \mathfrak{p}$ یک تجزیه ابتدایی مینیمال برای K است، پس $\operatorname{ass}(K) = \operatorname{Min}(I) \setminus \mathcal{A}$. بنابراین اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(K)$ دلخواه باشد آنگاه $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq n+1$ لذا $\operatorname{ht} K \geq n+1$.

۳. فرض کنید $\mathfrak{q} \in V(L+K)$ دلخواه باشد. لذا $K \subseteq \mathfrak{q}$ پس $\operatorname{ht} \mathfrak{q} \geq n+1$ و $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Min}(I) \setminus \mathcal{A}$ وجود دارد که $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}$. حال اگر $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = n+1$ باشد، آنگاه $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$ اما $L \subseteq \mathfrak{q}$ لذا $\mathfrak{q}_2 \in \mathcal{A}$ وجود دارد که $\mathfrak{q}_2 \subsetneq \mathfrak{q}_1$ و این تناقض است با $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Min}(I)$ پس $\operatorname{ht} \mathfrak{q} \geq n+2$. در نتیجه $\operatorname{ht}(L+K) \geq n+2$. □

گزاره ۱-۱-۱۷. *اگر R یک UFD و $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ ایده‌آل‌هایی ابتدایی با ارتفاع یک باشند، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ ایده‌آلی اصلی[۲] است (توسط یک عنصر تولید می‌شود).*

برهان. رجوع شود به تمرین ۲۰.۳ از فصل هفتم از مرجع [۲۸]. □

[۱] height [۲] principal