بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

موضوع:

کاربرد روش هم محلی سینک برای حل معادلات انتگرال فرد هلم غیر خطی

استاد راهنما:

دکتر سعید سهرابی

نام دانشجو:

چنور ترکی

مهر ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

سپاس گزاری...

مایه بسی افتخار وخوشبختی است که مراتب تقدیر وتشکر خود را از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سعید سهرابی که در انجام این پایان نامه از راهنماییهای ارزنده ایشان بهره گرفتم ابراز نمایم وهمچنین از تمام دوستان عزیزی که در انجام این کار مرا یاری کردند سپاسگزارم.

چنور ترکی
مهر ۱۳۹۳

چکیده

در این پایان نامه به بحث در مورد روش سینک مبتنی بر تبدیل نمایی ساده و نمایی مضاعف می‌پردازیم و همگرایی این دو روش را بررسی می‌کنیم که به صورت نمایی می‌باشد. همچنین معادلات انتگرال یوریسان را با استفاده از روش هم محلی سینک مبتنی بر تبدیل نمایی ساده و مضاعف حل می‌کنیم و کران خطای آن‌ها را بررسی می‌نماییم.

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست تصاویر

پیشگفتار

یکی از مسائل خوش وضع، معادلات انتگرال نوع دوم می‌باشد که به صورت تحلیلی حل شده‌اند. ما در این پایان نامه روی معادلات انتگرال فردهلم غیر خطی کار می کنیم. این معادلات را با روش هایی نظیر روش محاسبات مستقیم، روش تجزیه آدومین، روش تقریب های متوالی و ... می‌توان حل کرد امروزه اکثر مسائل علوم مهندسی را با توجه به پیچیدگی مربوط با روش های عددی حل می کنند.

در مطالعات اخیر، روش های تقریبی که در آن از تابع سینک استفاده شده است خانواده جدیدی از فرمول ها را ارائه می کنند.این فرمول ها ما را قادر به تقریب های دقیقی برای هر نوع عملیات حسابی مانند تقریب تابع، تقریب مشتق تابع و غیره... می‌سازند. یکی از مزیت های روش های سینک آن است که حتی در مسائل منفرد نیز مرتبه همگرایی، نمایی دارند.

تابع سینک نخستین بار در کار های برل [۱] و ویتاکر [۲] مورد استفاده قرار گرفت. ویتاکر نخستین کسی بود که ارتباط بین تابع سینک و توابع تحلیلی را مورد بررسی قرار داد. روش های عددی سینک اولین بار توسط استنگر [۳] توسعه یافته است.این روش ها روی انواع مسائل مقدار مرزی خطی و غیر خطی و معادلات پیاده شده و مقالاتی نیز در این زمینه ارائه شده است. در سال ۲۰۰۷ رشیدی نیا و ضارب نیا [۴] روش سینک مبتنی بر تبدیل نمایی ساده (SE) [۵] را برای معادلات انتگرال غیر خطی همرشتاین بررسی کردند و آن ها توانستند در سال ۲۰۱۰ با استفاده از تبدیل نمایی مضاعف(DE) [۶] معادلات انتگرال غیر خطی از نوع همرشتاین را حل کنند.

در این پایان نامه روش هم محلی سینک در دو طرح نمایی ساده و مضاعف برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیر خطی مورد استفاده قرار گرفته است. در فصل اول

---

[۱] Borl
[۲] Whittaker
[۳] Stenger
[۴] Rashidinia , Zarebnia
[۵] single exponential
[۶] double exponential

به تعریف و مقدمات می‌پردازیم و در فصل دوم خواص و قضایای مربوط به تابع سینک را بررسی می‌کنیم. فصل سوم نیز به حل معادلات انتگرال یوریسان با دو روش هم محلی سینک نمایی ساده و مضاعف می‌پردازد.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

- K.Maleknejad,K.Nedaiasl,Application of sinc-collocation method for solving a classs of nonlinear Fredlhom integral equations *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, 62(2011)3292-3303.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهم ترین شاخه های علم ریاضی است. اصولا اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است. معادلات انتگرال در علوم ریاضی، فیزیک، شیمی، علوم فنی و ... کاربرد های فراوانی دارد. در حقیقت توسعه نظریه معادلات انتگرال تنها در اواخر قرن ۱۹ شروع شد. در حدود سالهای ۱۹۰۳-۱۹۰۰ ریاضیدان ایتالیایی به نام ولترا [۱] روی آن کار کرد و همچنین ریاضیدان سوئدی به نام فرد هلم [۲] در همان سالها یک روش جدید جهت حل مسئله دیریکله [۳] پیشنهاد داد. از آن زمان به بعد معادلات انتگرال موضوع تحقیق ریاضیدانان زیادی شده است و روی معادلات انتگرال خطی وغیر خطی کار کرده اند و همچنین روش هایی برای حل آن ها ارائه کرده اند.

در سال ۲۰۰۹ مقاله ای توسط اسماعیل بابلیان[۴] واحمد شاهسواران[۵] ارائه شد که در آن جواب عددی معادلات انتگرال فرد هلم غیر خطی با استفاده از روش موجک ها ی هار[۶] بررسی شده است، که در آن یک جواب تقریبی برای معادله انتگرال فردهلم غیر خطی با استفاده از روش موجک های هار بدست می آید و نرخ همگرایی آن از مرتبه $O(\frac{1}{n})$ می باشد. در حالی که روش های چند جمله ای برای حل این معادلات در بهترین حالت از مرتبه $O(n^{-a})$ می باشد که در آن a ثابت است. اتکینسن [۷] استفاده از چند جمله ای های تکه ای را به عنوان یک زیر فضای تقریبی بررسی کرد و همگرایی از مرتبه چند جمله ای را به دست آورد.

در سال ۱۹۷۴ برای اولین بار موری [۸] و تکاهاشی [۹] تبدیل نمایی مضاعف را برای ارزیابی مؤثر از انتگرال های یک تابع تحلیلی با نقاط پایانی تکین طرح کردند. اخیرا روشن شده است که تبدیل نمایی مضاعف برای انواع مختلف روش های عددی سینک مفید است. روش سینک در واقع یک ابزار قدرتمند برای پیدا کردن جوابهای دقیق و سریع از انواع مختلف مسائل است و همچنین در شاخه های مختلف علوم و مهندسی کاربرد دارد.

[۱] Volterra
[۲] Fredholm
[۳] dirichle
[۴] E.Babolian
[۵] A.Shahsavaran
[۶] haaar wavelets
[۷] Atkinson
[۸] Mori
[۹] Takahasi

در واقع ما در این پایان نامه می خواهیم جواب معادلات انتگرال یوریسان را به روش هم محلی سینک بررسی کنیم.
معادلات انتگرال فردهلم از نوع دوم به شکل زیر را در نظر می گیریم:

$$u(t) = g(t) + \int_a^b k(t,s,u(s))\mathrm{d}s,\ -\infty < a \leq s \leq b < +\infty, \tag{۱.۱}$$

که در آن $k(t,s,u)$ و$g(t)$ معلوم اند و $u(t)$ تابع مجهول می باشد. این معادلات برای اولین بار توسط یوریسان معرفی شده است که معادله دیفرانسیل غیر خطی $y''(x) + f(x,y) = ۰$ با شرایط مرزی $y(a) = ۰$ و$y(b) = B$ را به معادله انتگرال برگرداند که نتیجه آن یک معادله همرشتاین بود و آن را به معادله (۱.۱) تعمیم داد.

معادلات از این نوع در کاربردهای زیادی ظاهر می شوند و نویسندگان زیادی حل عددی این معادلات را با استفاده از روش های مختلف بررسی کرده اند [۵]. دو روش برای حل این نوع معادلات بررسی می شود: روش سینک مبتنی بر تبدیل نمایی ساده و مضاعف که روش تبدیل نمایی ساده توسط استنگر برای معادلات انتگرال غیر خطی فردهلم توسعه داده شده است و نشان می دهد که مقدار همگرایی آن به صورت نمایی و از مرتبه $O(\exp(-c\sqrt{n}))$، $(c > ۰)$ و n تعداد گره های بسط داده شده است. همچنین این مقدار همگرایی سریعتر از مرتبه همگرایی چند جمله ای ها می باشد. همان طور که گفتیم حل معادلات انتگرال فردهلم غیر خطی با استفاده از روش موجک های هار مقدار همگرایی آن از مرتبه $O(\frac{۱}{n})$ می باشد که در واقع همگرایی سینک نمایی ساده سریعتر از موجک هار می باشد.

تعریف ۱.۱.۱. تابع f را بر D تحلیلی گوییم، هرگاه در هر نقطه D مشتق پذیر باشد و تابع f در نقطه $z_۰$ تحلیلی است هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد. اگر تابع f در تمام صفحه اعداد مختلط $(\mathbb{C})$ تحلیلی باشد، تام نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۱. مسیر بسته ساده، مسیر بسته ای است که خودش را قطع نکرده باشد یا بر خودش مماس نباشد.

تعریف ۳.۱.۱. دامنه D واقع در صفحه مختلط را دامنه به طور ساده همبند گویند اگر هر مسیر بسته ساده واقع در D، فقط شامل نقاط D باشد.

تعریف ۴.۱.۱. عملگر به طور کامل پیوسته، عملگری است که هم پیوسته و هم فشرده باشد.

روش سینک نمایی مضاعف با جایگزینی تبدیل هموار به کار گرفته شده در روش سینک نمایی ساده به دست می‌آید و مقدار همگرایی آن به صورت $O(\exp(\frac{-cn}{\log n}))$ بهبود می یابد که می بینیم همگرایی نمایی مضاعف سریعتر از نمایی ساده می‌باشد. معادله (۱.۱) را می‌توان به شکل عملگری زیر نوشت:

$$u = Ku + g,$$

که در آن عملگر انتگرال K به شکل $Ku(t) = \int_a^b k(t,s,u(t))\mathrm{d}s$ می‌باشد. این عملگر روی فضای باناخ X تعریف شده است که $X = Hol(D) \cap C(\bar{D})$ و D دامنه به طور ساده همبند است به طوری که $(a,b) \subset D$ و $Hol(D)$ خانواده همه توابع f است که روی دامنه D تحلیلی‌اند. اگر طرف راست معادله(۱.۱) یک عملگر به طور کامل پیوسته باشد، معادله حداقل یک جواب دارد [۸]. علاوه براین فرض کنید که $u^*(t)$ به طور هندسی مجزا تعیین شده باشد [۷]، به عبارت دیگر، گویی به صورت

$$B(u^*, r) = \{u \in X : \| u - u^* \| < r\},$$

وجود دارد که در آن $r > ۰$ و شامل هیچ جواب برای معادله (۱.۱) به جز خود u^* نیست.

۲.۱ معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول$u(x)$ زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود و یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید به صورت زیر معلوم شود:

$$u(x) = f(x) + \int_a^{b(x)} k(x,t)u(t)\mathrm{d}t, \qquad (۲.۱)$$

باید توجه داشت که هسته $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ معلوم اند و $u(x)$ مجهول می‌باشد. بر اساس نوشته های بوچر[۱] در سال ۱۹۱۴ میلادی، نام معادله انتگرال اولین بار در سال ۱۸۸۸ میلادی، توسط دوبویس ریموند [۲] پیشنهاد شد. همچنین اولین ظهور معادله انتگرال را به آبل [۳] زمانی که پایان نامه وی در سال های ۱۸۲۳تا ۱۸۲۶ میلادی منتشر شد، نسبت می دهند. نظریه

[۱] Bocher
[۲] Du Bois-Reymond
[۳] Abel

معادلات انتگرال در دهه سوم و چهارم قرن پیش توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام ژیراد [۱] و دو ریاضیدان روسی به نام های وکوا و موسخلیش[۲] توسعه پیدا کرد. یک شکل کلی معادلات انتگرال به صورت زیر است:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} k(x,t)u(t)\mathrm{d}t, \qquad (۳.۱)$$

که در آن $b(x)$ و a حدود انتگرال و λ ضریب معلوم است. اگر $h(x) \neq ۰$ باشد، با تقسیم طرفین معادله بر $h(x)$ به معادله (۲.۱) می رسیم. در واقع هدف تعیین تابع مجهول $u(x)$ می باشد به طوری که در (۲.۱) صدق می کند.

معادلات انتگرال دو نوع اند:

۱ـ خطی

۲ـ غیر خطی

یک معادله انتگرال را خطی گویند در صورتی که تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال خطی باشد یعنی تابع مجهول در زیر علامت انتگرال به صورت توان یک ظاهر شود. اگر تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به شکل غیر خطی نظیر $F(u(x))$، $\cos(u(x))$، $\exp(u(x))$ و غیره ظاهر شود، آنگاه معادله انتگرال را غیر خطی گوییم.

۱.۲.۱ معادلات انتگرال ولترا

در معادله (۳.۱) اگر $b(x) = x$، معادله حاصل را معادله انتگرال ولترا خطی می نامند و شکل کلی آن به صورت زیر می باشد:

$$h(x)u(x) = f(x) + \int_a^{x} k(x,t)u(t)\mathrm{d}t.$$

هرگاه $h(x) = ۰$، معادله انتگرال ولترای نوع اول است و شکل آن به صور ت زیر است:

$$-f(x) = \int_a^{x} k(x,t)u(t)\mathrm{d}t.$$

[۱] Girad
[۲] Vekua,Muskhlishvili

و هرگاه $h(x) = 1$، معادله انتگرال ولترا از نوع دوم گفته می‌شود و شکل آن به صورت زیر است:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)\mathrm{d}t.$$

برای حالت غیر خطی نیز به همین صورت است ولی در آن تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت غیر خطی می‌باشد.

۲.۲.۱ معادلات انتگرال فردهلم

در معادله (۳.۱) اگر $b(x) = b$، معادله حاصل را معادله انتگرال فردهلم خطی می‌نامند و شکل کلی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$h(x)u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t.$$

همانند معادلات ولترا، هرگاه $h(x) = 0$، معادله انتگرال فردهلم نوع اول است و شکل آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t.$$

هرگاه $h(x) = 1$، معادله انتگرال فردهلم نوع دوم نامیده می‌شود و شکل آن به صورت زیر است:

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t.$$

معادله انتگرال فردهلم غیر خطی مانند حالت خطی دو نوع است، ولی در حالت غیر خطی تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به شکل غیر خطی می‌باشد.

معادلات انتگرال فردهلم غیر خطی نوع دوم به شکل کلی زیر می‌باشند:

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t,u(t))\mathrm{d}t. \tag{۴.۱}$$

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه وجود و یکتایی). *فرض کنید سه شرط زیر برقرار باشند:*
۱ــ تابع $f(x)$ کراندار باشد، یعنی

$$a \leq x \leq b; \mid f(x) \mid < R.$$

۲ــ هسته $k(x,t,u(t))$ انتگرال پذیر و کراندار باشد به طوری که در بازه $a \leq x,t \leq b$ داشته باشیم:

$$\mid k(x,t,u(t)) \mid < L.$$

۳ــ تابع $k(x,t,u(t))$ در شرط لیپ شیتس صدق کند که در آن $M > 0$ ثابت است:

$$\mid K(x,t,z) - k(x,t,z') \mid < M \mid z - z' \mid .$$

پس یک جواب منحصر بفرد $u(x)$ برای معادله انتگرال فردهلم غیر خطی نوع دوم (۴.۱) *وجود دارد.*

تعریف ۲.۲.۱. اگر درمعادلات انتگرال فردهلم و ولترای نوع دوم شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد، آنگاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می نامند . در غیر این صورت معادله موردنظر را یک معادله غیر همگن می گویند.

نکته ۳.۲.۱. یک معادله انتگرال می تواند به عنوان نمایش جواب یک معادله دیفرانسیل به کار رود. به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسئله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می شود ازنوع فردهلم خواهد بود و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسئله مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

فصل ۲

تعاریف و قضایای تقریب سینک