دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

رشتهٔ ریاضی محض گرایش جبر

عنـوان:

گراف مقسوم علیه‌های صفر

حاصل‌ضرب‌های مستقیم حلقه‌های جابجایی

استاد راهنما:

دکتر کریم سامعی

پژوهشگر:

معصومه داودی صفدر

دی ماه ۱۳۸۸

یاد خدا آرام‌بخش دلهاست.

بی‌کران سپاسمان به درگاه حق او که قطره‌ای از اقیانوس بی‌انتهای علم خود را بر ما عنایت فرمود تا پیوسته، مشتاق بهره گیری از قطره‌ای دیگر باشیم.

اینک وظیفهٔ خود می‌دانم با تأسی جستن از حدیث نبوی ((من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق)) قدردانی خویش را از راهنمایی‌های بسیار گران‌قدر، جناب آقای دکتر کریم سامعی که همواره از هیچ کوششی در خصوص آراستن دانشجویان به زیور علم و دانش و هم‌چنین علم اخلاق دریغ نورزیده‌اند، بیان نموده و خالصانه برای ایشان از خداوند منان سلامتی و توفیق روز افزون آرزومندم. شاگردی ایشان افتخار همیشگی اینجانب می‌باشد.

تشکر و قدردانی می‌نمایم از زحمات بی‌دریغ و نگاه ریزبینانهٔ استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سامع که با وجود تمامی مشقات، رنج ویراستاری پایان‌نامهٔ اینجانب را برعهده گرفتند. برای ایشان توفیق روزافزون آرزومندم.

قدر و ارج می‌نهم بر زحمات بی‌شائبه و دلسوزانهٔ همسر مهربانم آقای افشار غلامی که در تمامی لحظات زندگیم یار و مددکارم بوده و هست.

و بی‌نهایت احساس قدردانی و سپاس را تقدیم می‌دارم به خانوادهٔ بی‌همتایم، پدرم، تکیه‌گاه زندگیم، مادرم، اسطورهٔ عشق و ایثار، خواهران و برادرانم، عزیزان زندگیم.

هم‌چنین تقدیر و تشکر می‌کنم از خانوادهٔ عزیز همسرم به خاطر همهٔ سختی‌هایی که به ایشان تحمیل کرده‌ام.

و در آخر از تمامی عزیزانی که در تکمیل و اتمام این پایان‌نامه مرا یاری نموده‌اند، از سرکار خانم کاشفی و به ویژه آقای علیرضا نصرالهی که دوستانه اینجانب را یاری نموده و از هیچ کوششی دریغ نورزیده‌اند، تقدیر و تشکر می‌کنم.

چکیده

برای حلقهٔ جابجایی و یکدار R، گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقهٔ R، که با $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی ساده است که رأس‌های آن همهٔ مقسوم علیه‌های صفر غیر بدیهی R هستند و دو رأس متمایز y, x مجاور می‌باشند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. هدف از مطالعهٔ گراف مقسوم علیه‌های صفر، ایجاد ارتباط بین نظریهٔ گراف و نظریهٔ حلقه‌های جابجایی است.

در این‌پایان‌نامه نتایجی از گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌های جابجایی را یادآوری کرده و سپس به تحلیل و بررسی قطر و بعد گراف $\Gamma(R \times S)$ می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم که $diam(\Gamma(R \times S))$ که در آن R و S حلقه‌های جابجایی با عنصر یکه و مقسوم علیه صفر ناصفر هستند، برابر با ۳ است. هم‌چنین در پایان ثابت می‌کنیم بُعد گراف $\Gamma(R \times S)$ در چه شرایطی برابر ۳ یا ۴ و یا ∞ است.

واژه‌های کلیدی: گراف مقسوم‌علیه‌های صفر، حاصل‌ضرب‌های مستقیم، قطر گراف، بُعد گراف.

فهرست مندرجات

فصل ۰

مقدمه

هر چیزی باید به ساده‌ترین شکل ممکن باشد. اما نه ساده‌تر از آن.

آلبرت انستین

اگر ریاضیات آن‌گونه که معمولاً گفته می‌شود مادر همهٔ دانش‌هاست، بدون تردید جبر ابزاری دقیق و پرقدرت در دست توانای اوست. در این مبحث از ریاضیات است که استدلال‌های منطقی ریاضی به بهترین وجهی نمایان می‌شود. جبر شاخه‌ای از ریاضیات است که به مطالعهٔ ساختار و کمیت می‌پردازد. جبر را می‌توان تعمیم و تجدیدی از حساب دانست، که در آن بر خلاف حساب، عملیاتی مانند جمع و ضرب، نه بر روی اعداد بلکه بر روی نمادها انجام می‌گیرد. تاریخچهٔ این علم به بیش از ۳۰۰۰ سال پیش در مصر و بابل برمی‌گردد، که در آن جا در مورد حل برخی از معادلات جبری بحث شد. کتاب جبر و المقابلهٔ خوارزمی اولین اثر کلاسیک در جبر می‌باشد، که کلمهٔ جبر یا $Algebra$ در آن آمده است، خیام دیگر ریاضی‌دان شهیر ایرانی است، که در آثار خود جبر را از حساب تمیز داد و گامی بزرگ را در پیشرفت این علم برداشت.

طی سالهای اخیر علاقهٔ خاص ریاضی‌دانان به تحقیق و پژوهش در مقوله‌های ترکیبی ریاضی، مانند مباحث ترکیبی جبر، آنالیز و توپولوژی، ترکیب آنالیز و نظریهٔ احتمالات و همچنین جبر مجرد و

نظریهٔ گراف، باعث بوجود آمدن مباحث جدید و متنوعی در این زمینه گردیده است.

ایدهٔ برقراری ارتباط بین حلقه‌های جابجایی و نظریهٔ گراف برای اولین‌بار در سال ۱۹۸۸ توسط بک [1] طی مقالهٔ،

Beck, I., **1988**. Coloring of Commutative Rings. J. Algebra. 116: 208-226.

مطرح شده است. در تعریفی که این ریاضی‌دان در مقاله‌اش ارائه داده است، همهٔ عناصر حلقه بعنوان رئوس یک گراف قرار داده شده‌اند و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. بنابراین در این گراف رأس ۰ با همهٔ رئوس دیگر مجاور است.

مطالعه در این مقوله توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت، تا این که در سال ۱۹۹۹، اندرسون [2] و لیوینگستون [3] طی مقالهٔ،

Anderson, D. F., and Livingston, P. S. **1999**. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring.J. Algebra. 217: 434-447.

تعریف جدیدی برای گراف وابسته به یک حلقهٔ جابجایی ارائه دادند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعهٔ مقسوم علیه‌های صفر غیربدیهی حلقه هستند و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. در همین مقاله ثابت می‌شود که این گراف، گرافی همبند است.

---

[1] Beck

[2] Anderson

[3] Livingston

کنکاش و پژوهش عاشقان ریاضی باعث گسترش این مقوله در ساختارهای جبری و گراف انجامید. برای نمونه د.اف.اندرسون [۴]، لیوینگستون و مولای [۵] طی مقاله‌ای در مرجع [۱۵] و دی میر [۶] و اشنایدر [۷] طی مقاله‌ای در مرجع [۱۲] قطر و بعد گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌های جابجایی را مورد بررسی قرار دادند. برای مثال اندرسون و لیوینگستون نشان دادند که گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقهٔ جابجایی همبند است و قطر آن کمتر و یا مساوی ۳ است. دی میر، اشنایدر و مولای هر کدام به طور مستقل ثابت کردند که بعد گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌های جابجایی یا نامتناهی است و یا کمتر یا مساوی ۴ است.

در سال ۲۰۰۶، ام. آکستل [۸]، جی. استیکلس [۹] و جی. وارفل [۱۰] در مقالهٔ،

Axtell, M., Stickles, J., and Warfel, J., **2006**. Zero-Divisor Graphs of direct products of commutative Rings. Houston Journal of Mathematics. 32:985-994.

گراف مقسوم علیه‌های صفر را برای حاصل‌ضرب‌های مستقیم مورد تحلیل قرار دادند و هم‌چنین به بررسی ساختار قطر و بعد این نوع گراف‌ها پرداختند. هدف اصلی این پایان‌نامه نیز تحلیل و بررسی این مطلب است که در فصل سوم به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار کلی این مجموعه به صورت زیر می‌باشد.

---

[۴] D.F.Anderson

[۵] Mulay

[۶] Demeyer

[۷] Schneider

[۸] M.Axtell

[۹] J.Stickles

[۱۰] J.Warfel

در فصل اول که شامل ۳ بخش می‌باشد، ابتدا مفاهیم و تعاریف ابتدایی را از نظریهٔ حلقه‌ها ارائه می‌دهیم، سپس در بخش‌های بعد به ترتیب به مقوله‌های، مقسوم علیه صفر یک حلقه و حلقهٔ کسرها خواهیم پرداخت. اغلب مطالب و نمادگذاری‌های این فصل برگرفته از کتاب گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر نوشته رودنی شارپ می‌باشد که نام دقیق آن در مرجع [۳] آمده است.

فصل دوم از این پایان‌نامه را با ارائهٔ تعاریف مقدماتی در نظریهٔ گراف آغاز کرده که مطالب این بخش از مرجع [۵] می‌باشد و در بخش دوم گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقهٔ جابجایی را معرفی کرده و به ذکر مثال‌هایی از آن بسنده می‌کنیم. در بخش سوم نیز برخی از قضیه‌های اساسی و ضروری برای پیشبرد مقاله را به کار می‌گیریم.

و بالاخره فصل سوم که بر اساس مرجع [۱۰] تنظیم شده است، شامل سه بخش می‌باشد که در بخش اول به تحلیل قضایای ضروری در باب ساختار گراف مقسوم علیه صفر می‌پردازیم و در دو بخش آخر به ترتیب به تحلیل مقوله‌های قطر و بعد گراف مقسوم علیه‌های صفر حاصل‌ضرب‌های مستقیم حلقه‌های جابجایی می‌پردازیم.

در پایان بیان می‌کنم که با توجه به تمام ریزنگاری‌ها و دقت اینجانب سعی شده که مطالب به بهترین شکل ممکن تنظیم گردد، با وجود این هیچ گونه ادعایی مبنی بر بی‌نقصی این مجموعه وجود ندارد و پذیرای انتقادات سازندهٔ عاشقان عرصهٔ ژرف و زیبای ریاضیات می‌باشم.

استدلال اولین موهبت زمینی است.

ادوارد گیبون

فصل ۱

مفاهیمی در نظریه حلقه‌های جابجایی

جوهر ریاضیات، آزادی آن است.

جورج فردیناند فیلیپ کانتور

در فصل اول مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را ارائه می‌دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. از آن‌جایی که هدف این پایان‌نامه بررسی گراف مقسوم علیه‌های صفر حاصل‌ضرب‌های مستقیم حلقه‌های جابجایی می‌باشد، لذا این فصل شامل ۳ بخش می‌باشد. در بخش اول مفاهیم ابتدایی و مقدماتی را از نظریهٔ حلقه‌های جابجایی می آوریم و در ۲ بخش بعد به ترتیب به تعریف و بررسی مقسوم علیه صفر و حلقهٔ کسرها می‌پردازیم.

۱—۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی

در این بخش به‌طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ حلقه‌های جابجایی می‌پردازیم و قضایای مهمی را در باب ساختار مجموعهٔ مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه بیان می‌کنیم.

۱—۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی باشد، مجموعهٔ تمام ایدآل‌های اول R را **طیف اول** R می‌نامیم و با $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱. اگر R دامنهٔ صحیح باشد، آن‌گاه $(\circ) \in \mathrm{Spec}(R)$. به عنوان مثال در حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، $(\circ)$ ایدآل اول است، به علاوه به ازای هر عدد اول p، $p\mathbb{Z}$ نیز ایدآل اول $\mathbb{Z}$ می‌باشد.

۱—۲ لم و تعریف. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی و I ایدآل R باشد، در این صورت،

$$\sqrt{I} = \{\ r \in R \mid\ r^n \in I, \text{ به طوری که } n \text{ای متعلق به } \mathbb{N} \text{ موجود باشد،} \ \}$$

ایدآلی از R است، که I را شامل می‌شود و **رادیکال** I نام دارد.

اثبات. لم و تعریف ۳—۴۶، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱—۳ گزاره. هرگاه I و J دو ایدآل حلقهٔ R باشند، در این صورت:

الف) $I \subseteq \sqrt{I}$؛

ب) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$؛

ج) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$؛

د) $I = (۱) \Longleftrightarrow \sqrt{I} = (۱)$؛

و) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$؛

ه) هرگاه P ایدآل اول باشد، آن‌گاه به ازای هر $n \geq \circ$، $\sqrt{P^n} = P$.

۱–۴ لم و نمادگذاری. فرض کنیم I اید آل سرهٔ حلقهٔ جابجایی R باشد. **واریتهٔ**[۱] I را با نماد $\mathrm{Var}(I)$ نشان می‌دهیم و به صورت،

$$\mathrm{Var}(I) = \{\ P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq P\ \}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Var}(I)} P.$$

اثبات. لم ۳–۴۸، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱–۵ قضیه. فرض کنیم I اید آل سرهٔ حلقهٔ جابجایی R باشد، در این صورت $\mathrm{Var}(I)$، حداقل یک عضو مینیمال نسبت به رابطهٔ مشمولیت دارد. عضوهای مینیمال $\mathrm{Var}(I)$ را اید آل‌های **اول مینیمال** I می‌نامیم و با $\mathrm{Min}(I)$ نشان می‌دهیم. اگر R ناصفر باشد، اید آل‌های اول مینیمال اید آل صفر را، اید آل‌های اول مینیمال R می‌نامیم و با $\mathrm{Min}(R)$ نمایش می‌دهیم.

اثبات. قضیهٔ ۳–۵۲، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱–۶ نتیجه. فرض کنیم I اید آل سرهٔ حلقهٔ جابجایی R باشد، در این صورت:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{p \in \mathrm{Min}(I)} P.$$

---

[۱] Variety

اثبات. نتیجهٔ ۳—۵۴، از مرجع [۳] را ببینید.

۱—۷ نتیجه. اگر در لم ۱—۲، قرار دهیم $I = \circ$، آن‌گاه $\sqrt{\circ}$ را **رادیکال پوچ** حلقهٔ جابجایی R می‌گوییم، در این صورت بنا بر نتیجهٔ ۱—۶،

$$\sqrt{\circ} = \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}(R)} P = \bigcap_{p \in \mathrm{Min}(R)} P.$$

اثبات. نتیجهٔ ۳—۴۹، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱—۸ نتیجه. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی باشد، در این صورت مجموعهٔ عناصر پوچ‌توان R را با $\mathrm{Nil}(R)$ نشان می‌دهیم که طبق لم ۱—۲ و نتیجهٔ ۱—۷، در رابطهٔ بعدی صدق می‌کند:

$$\mathrm{Nil}(R) = \sqrt{\circ} = \bigcap_{p \in \mathrm{Min}(R)} P.$$

۱—۹ تعریف. حلقهٔ جابجایی R را **کاهشی** می‌گوییم، اگر $\mathrm{Nil}(R) = \circ$.

مثال ۲. فرض کنیم R دامنهٔ صحیح باشد، در این صورت چون $\{\circ\}$ ایدآل اول R است، در نتیجه $\mathrm{Nil}(R) = \circ$ و بنابراین حلقهٔ R کاهشی است. به عنوان مثال حلقهٔ $\mathbb{Z}$ کاهشی است.

مثال ۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$، در این صورت $\mathrm{Nil}(R) = 0$ و بنابراین حلقهٔ R کاهشی است.

مثال ۴. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی باشد، در این صورت حلقهٔ $\frac{R}{\mathrm{Nil}(R)}$ یک حلقهٔ کاهشی است.

زیرا بنا به نتیجهٔ ۱—۶ داریم:

$$\mathrm{Nil}(\frac{R}{\mathrm{Nil}(R)}) = \bigcap_{P\in \mathrm{Min}(R)} \frac{P}{\mathrm{Nil}(R)} = \frac{\bigcap_{P\in \mathrm{Min}(R)} P}{\mathrm{Nil}(R)}$$
$$= \frac{\mathrm{Nil}(R)}{\mathrm{Nil}(R)} = 0$$

۱—۱۰ لم. فرض کنیم P ایدآل اول حلقهٔ جابجایی R باشد و I_1، ...، I_n ایدآل‌هایی از R باشند، در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) به ازای jای که $1 \leq j \leq n$، $I_j \subseteq P$.

ب) $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$.

ج) $\prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$.

اثبات. لم ۳—۵۵، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱—۱۱ نتیجه. فرض کنیم R حلقهٔ جابجایی و P_1، ...، P_n ایدآل‌های اول مینیمال R باشند، در این صورت به ازای هر $1 \leq j \leq n$ ، $\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} P_i \neq 0$.

اثبات. فرض کنیم $1 \leq j \leq n$ وجود دارد، به طوری که $\bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} P_i = 0$، در این صورت:

$$0 = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i \subseteq P_j.$$

اما طبق لم قبل $1 \leq k \leq n$ وجود دارد، به طوری که $P_k \subseteq P_j$ و این متناقض با اول مینیمال بودن P_j است. بنابراین $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i \neq 0$. ∎

۱—۱۲ لم. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی و برای $n \geq 2$، I_1، ...، I_n ایدآل‌هایی از حلقهٔ R باشند. همریختی حلقه‌ای

$$\varphi : R \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{R}{I_i}$$

$$\varphi(x) = (x + I_1, ..., x + I_n)$$

تعریف می کنیم، در این صورت:

الف) هرگاه I_i و I_j که $i \neq j$ متباین باشند، آن‌گاه $\prod I_i = \bigcap I_i$؛

ب) φ پوشا است اگر و تنها اگر I_i و I_j که $i \neq j$ متباین باشند؛

ج) φ یک به یک است اگر و تنها اگر $\bigcap I_i = (0)$.

اثبات. گزارهٔ ۱—۱۰ از مرجع [۸] را ببینید. ∎

۱—۱۳ تعریف. ایدآل M از حلقهٔ جابجایی R را **ماکسیمال** می‌گوییم، هرگاه نسبت به رابطهٔ مشمولیت، عضو ماکسیمال مجموعهٔ ایدآل‌های سرهٔ R باشد.

به عبارت دیگر ایدآل M از حلقهٔ R ماکسیمال است، هرگاه:

الف) $M \subset R$، یعنی M ایدآل سرهٔ R باشد.

ب) ایدآلی چون I از R وجود نداشته باشد، به طوری که $M \subset I \subset R$.

مجموعهٔ تمام ایدآل‌های ماکسیمال R را **طیف ماکسیمال** حلقهٔ R می‌نامیم و با $\mathrm{Max}(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱–۱۴ نکته. هر ایدآل ماکسیمال از حلقهٔ R، ایدآل اول R نیز است، یعنی $\mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$. ولی عکس آن همواره درست نیست. به عنوان مثال ایدآل صفر در حلقهٔ اعداد صحیح ایدآل اولی است که ماکسیمال نیست.

۱–۱۵ قضیه. فرض کنیم R حلقهٔ جابجایی ناصفر باشد، در این صورت R حداقل یک ایدآل ماکسیمال دارد.

اثبات. قضیهٔ ۳–۹، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱–۱۶ نتیجه. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی باشد و $a \in R$، در این صورت a عضو وارون‌پذیری از R است، اگر و تنها اگر برای هر ایدآل ماکسیمال M از R، $a \notin M$.

اثبات. نتیجهٔ ۳–۱۱، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱–۱۷ تعریف. حلقهٔ جابجایی R را **شبه‌موضعی** می‌گوییم، اگر و تنها اگر فقط یک ایدآل ماکسیمال داشته باشد.

مثال ۵. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_{16}$، در این صورت R یک حلقهٔ شبه موضعی با ایدآل ماکسیمال منحصر به فرد $M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ است.

۱–۱۸ لم. حلقهٔ R شبه موضعی است، اگر و تنها اگر مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R، ایدآل R باشد.

اثبات. لم ۳–۱۳، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱–۱۹ تعریف. فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی باشد. اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال R را **رادیکال جیکبسن**[۲] R می‌گوییم و با $Jac(R)$ نشان می‌دهیم.

در حالتی که R حلقهٔ صفر باشد، قرار می‌دهیم $Jac(R) = R$.

توجه داریم که اگر R شبه موضعی باشد، آن‌گاه $Jac(R)$ ایدآل ماکسیمال منحصر به فرد R است.

۱–۲۰ لم. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی باشد و $r \in R$، در این صورت $r \in Jac(R)$، اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، $1 - ra$ عضو وارون‌پذیری از R باشد.

اثبات. لم ۳–۱۷، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱–۲۱ قضیه. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی و شبه موضعی باشد، در این صورت R عناصر خودتوانی به غیر از ۰ و ۱ ندارد.

---

[۲] Jacobson radical

اثبات. فرض کنیم R یک حلقهٔ شبه‌موضعی با ایدآل ماکسیمال M باشد، به طوری که $x \in R$، عنصر خودتوانی از R است و $x \neq ۰, ۱$، در این صورت اگر x وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$x^{-۱}x^{۲} = x^{-۱}x \implies x = ۱.$$

اما فرض کردیم $x \neq ۱$، لذا به تناقض رسیدیم، بنابراین x وارون‌ناپذیراست و در نتیجه $x \in M = J(R)$، پس بنا بر لم ۱—۲۰، $u = ۱ - x$ وارون‌پذیر است و داریم:

$$x = ۱ - u \ , \ x^{۲} = x \implies (۱ - u)^{۲} = (۱ - u) \implies u^{۲} = u$$

اما u وارون‌پذیر است، پس $u = ۱$ و در نتیجه $x = ۰$ و این متناقض با مخالف صفر بودن x است. در نتیجه R عناصر خودتوانی به غیر از ۰ و ۱ ندارد. ■

۱—۲۲ تعریف. فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی باشد، در این صورت R را **نوتری** می‌گوییم، اگر در شرایط معادل زیر صدق کند:

الف) R در شرط زنجیرهٔ صعودی ایدآل‌ها صدق کند، یعنی هرگاه زنجیرهٔ

$$I_{۱} \subseteq I_{۲} \subseteq \ldots \subseteq I_{i} \subseteq I_{i+۱} \subseteq \ldots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآل‌های R باشد، آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$.

ب) هر مجموعهٔ ناتهی از ایدآل‌های R نسبت به رابطهٔ مشمولیت دارای عضو ماکسیمال باشد.

مثال ٦. حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، نوتری است.