بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی ورایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

روش های مستقیم وتکراری

برای حل دستگاه معادلات خطی فازی و بازه ای

استاد راهنما :

دکتر عظیم ریواز

استادمشاور :

دکتر ماشاءالله ماشین چی

مؤلف :

مهدیه چاوشیان

بهمن ماه ۱۳۸۹

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو : مهدیه چاوشیان

استاد راهنما : دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور : دکتر ماشاءالله ماشین چی

داور ۱ : دکتر محمود محسنی مقدم

داور۲ : دکتر آزیتا تاج الدینی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به پدر دلسوز و مادر مهربانم

به پاس زحمات بیکرانشان

وتقدیم به همسر نازنینم

که بدون همراهی و بردباری او پیمودن این راه میسر نبود.

تشکر وقدر دانی

سپاس وستایش خداوندی را که گوهر اندیشه و دانش را در صدف وجود انسان به ودیعه گذاشت تا او را از دیگر آفریده ها متمایز سازد.

با تشکر وسپاس فروان از استاد فرهیخته وگرانقدر جناب آقای دکتر ریواز که همواره با استقبال گرم و روی گشاده مرا راهنما بودند،کمال تشکر را دارم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر ماشین چی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند، نیز تشکر می نمایم.

و همچنین ازجناب آقای دکتر محسنی مقدم وسرکار خانم دکتر تاج الدینی به خاطر قبول زحمت داوری این پایان نامه تشکر می نمایم.

در پایان از همه کسانی که در این مدت مرا یاری نمودند به ویژه همسر مهربانم و دوستان عزیزم تشکر می نمایم.

مهدیه چاوشیان

بهمن ۸۹

نویسنده ازحمایت مالی قطب سیستم های فازی و کاربردهای آن در دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر می نماید.

چکیده:

در این پایان نامه روش های مستقیم وتکراری برای حل دستگاه معادلات خطی فازی وبازه ای، مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات مورد نیاز، که در فصول بعد مورد استفاده قرار می گیرد، را ارائه می دهیم. در فصل دوم، شدنی بودن روش حذف گاوس را برای چندین نوع ماتریس بیان کرده ایم. ودر فصل سوم، حل دستگاه معادلات خطی فازی مربعی و مستطیلی را با استفاده از روشهای مستقیم مورد بحث قرار داده ایم. در آخر چندین روش تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی فازی مطرح شده است.

مقدمه:

در این پایان نامه، روش های مستقیم و تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی فازی و بازه ای را مورد بررسی قرار داده ایم. همان طور که می دانیم برای حل دستگاه معادلات خطی معمولی روش های متفاوتی از جمله روش های مستقیم وتکراری ارائه شده است، که در اینجا قصد داریم این روش ها را برای دستگاه معادلات خطی فازی و بازه ای‌ارائه دهیم.

در فصل اول، مفاهیم و مقدمات مورد نیاز که در فصول بعد مورد استفاده قرار می گیرد، را ارائه می دهیم. از جمله α – برش ها که مفهوم بسیار مهمی در نظریه مجموعه های فازی دارند.

در فصل دوم، به معرفی دستگاه معادلات خطی بازه ای می پردازیم وحل پذیری این دستگاه معادلات را در قضیه ای مطرح می کنیم، سپس الگوریتم حذف گاوس را برای دستگاه معادلات خطی بازه ای ارائه می دهیم ومعیار شدنی بودن الگوریتم را بدست می آوریم. همچنین شدنی بودن این الگوریتم را برای ماتریس های مختلفی از جمله ماتریس های نوک پیکانی، ماتریس های تماماً نامنفی، M – ماتریس های معکوس و ... بیان می کنیم.

در فصل سوم، ابتدا دستگاه معادلات خطی فازی $n \times n$ را معرفی می کنیم و در ادامه با بدست آوردن ماتریس S، به دستگاه معادلات خطی معمولی $2n \times 2n$ می رسیم که با روش های مستقیمی مانند تجزیه LU و... می توان آنها را حل کرد. در آخر فصل هم دستگاه معادلات خطی فازی $m \times n$ (مستطیلی) را معرفی می کنیم، که با استفاده از شبه معکوس ها و روش های تناوبی، در صورت امکان، آنها راحل می کنیم.

در فصل چهارم، روش های تکراری از جمله ریچاردسون، ژاکوبی، گاوس– سایدل و ... را برای حل دستگاه معادلات خطی فازی ارائه می دهیم ودر ادامه همگرایی این روش ها را در چند قضیه بیان می کنیم.در پایان فصل، معیار توقف روش های تکراری با دقت $\varepsilon > 0$ را ارئه می دهیم.

فهرست مندرجات

فصل اول

آشنایی با مفاهیم اولیه

۱-۱مقدمه

در نظریه مجموعه ها، هر مجموعه با یک ویژگی خوشتعریف مشخص می شود، یعنی اگر شی مفروض دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه متناظر می باشد و اگر دارای آن ویژگی نباشد، عضو آن مجموعه نیست. مثلاً ویژگی خوشتعریفـ «بزرگتر از ۱۰ بودن» به راحتی می توان تصمیم قاطع گرفت که آیا یک عدد دارای این ویژگی است یا نه.

حال فرض کنید بخواهیم درباره آن دسته از مجموعه اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» هستند. در اینجا با یک ویژگی ناخوشتعریف و مبهم یعنی«بزرگ» سروکار داریم و این ویژگی وابسته به نظر افراد مختلف، متفاوت است. به عبارت دیگر، به طور قاطع نمی توان در مورد عضویت یک عضو در این مجموعه تصمیم گرفت. می بینیم که ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین نیست، از قضا بیشتر مفاهیم و ویژگی هادر زندگی روزمره درشاخه های مختلف علوم به ویژه علوم انسانی و اجتماعی اینگونه می باشد. یعنی مفاهیمی هستند منعطف و مجموعه هایی هستند با کران های نا دقیق.

برای مثال ما در زندگی واقعی کمتر از کودکان بلندقدتراز۱۱۰ سانتی متر، زمین های بزرگتر از۱۰هکتار، ... صحبت می کنیم. بلکه بیشتر با مفاهیمی همچون کودکان بلند قد، زمین های وسیع، ... سروکار داریم.

بدین ترتیب، نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسکرزاده، دانشمند ایرانی تبار واستاد دانشگاه برکلی آمریکا عرضه شد. به طور خلاصه، نظریه مجموعه های فازی نظریه ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها را که نادقیق و مبهم هستند، صورتبندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد.

بنابراین طبق پیشنهاد پروفسورعسکرزاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه[۰,۱] را به عنوان درجه بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر چه یک عدد بزرگتر باشد، عدد متناظربرای عضویت آن در A به یک نزدیکتر می باشد و بالعکس، هر چه عدد مورد نظر

کوچکتر باشد، عدد مربوط به آن در A به صفر نزدیکتر می باشد. مثلاً به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ عدد بزرگی است یا خیر، می گوییم درجه بزرگی آن مثلاً ۰/۷ است. برای مطالعه بیشتر به [۲] مراجعه شود.

تذکر: بیشتر مطالب بخش های ۱-۲، ۱-۴، ۱-۵، ۱-۶و ۱-۷ از مرجع [۱] می باشند.

۱-۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید X، یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. همان طور که می دانیم، تابع نشانگر(مشخصه) هر زیر مجموعهٔ معمولی A از X، یک تابع از X به $\{۰,۱\}$است که اینگونه تعریف می شود:

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \mathrm{x} \in \mathrm{A} \\ 0 & \mathrm{x} \notin \mathrm{A} \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

با توجه به رابطه(۱-۱)، $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$ یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را برای هر $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ خواهد گرفت. حال اگر برد تابع μ_{A} را از مجموعهٔ دو عضوی $\{۰,۱\}$به بازه $[۰,۱]$ توسعه دهیم، تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از X، عددی از بازه $[۰,۱]$ را نسبت می دهد. در چنین وضعیتی اگر $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) \in (0,1)$ آنگاه در مورد عضویت x به A با عدم قطعیت مواجه هستیم.

همچنین μ_{A} را تابع عضویت A و $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$ را درجه عضویت x در مجموعه A می نامیم. در نظریه مجموعه های فازی، مجموعه A دیگر یک مجموعه معمولی نیست، بلکه مجموعه ای است که آن را یک مجموعه فازی می نامیم. به طوریکه یک مجموعه فازی A، مجموعه ای است که درجات عضویت اعضای آن می توانند به طور پیوسته از بازه$[۰,۱]$ اختیار شوند.

نزدیکی مقدار $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$ به عدد یک، نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس، نزدیکی آن به عدد صفر، نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. چنانچه x کاملاً در A عضو باشد، داریم $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = 1$ و چنانچه در A عضو نباشد، داریم $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = 0$.

پس مجموعه های معمولی و توابع نشانگر آنها، حالت های خاصی از مجموعه های فازی و توابع عضویت آنها هستند.

تعریف ۱-۲-۱: ([۳] را ببینید.) فرض کنید که X مجموعه ای ناتهی باشد. هر زیر مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X توسط یک تابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ مشخص می شود، که در آن برای هر $x \in X$ ، مقدار $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ در بازه [۰,۱] درجه عضویت x را در $\widetilde{A}$ نشان می دهد.

قرارداد: از این به بعد، مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X را با تابع عضویت $\widetilde{A}: X \rightarrow [0,1]$ ودرجه عضویت x را با $\widetilde{A}(x)$ نشان می دهیم. به علاوه، مجموعه تمام زیر مجموعه های فازی X را با $F(X)$ نشان می دهیم، به طوریکه $F(X) = \{\widetilde{A}|\widetilde{A}: X \rightarrow [0,1]\}$.

تعریف ۱-۲-۲: فرض کنید که R مجموعه اعداد حقیقی باشد، در این صورت اعضای $F(R)$ را کمیت های فازی می نامیم.

تعریف ۱-۲-۳: فرض کنید $\widetilde{A} \in F(X)$. (یعنی X یک مجموعه مرجع و $\widetilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد.)تکیه گاه $\widetilde{A}$ را با $\operatorname{supp}\widetilde{A}$ نشان می دهیم و به صورت $\operatorname{supp}\widetilde{A} = \{x \in X|\widetilde{A}(x) > 0\}$ تعریف می شود.

تعریف ۱-۲-۴: فرض کنید $\widetilde{A} \in F(X)$. ارتفاع $\widetilde{A}$ را با $M = \sup_{x \in X} \widetilde{A}(x)$ تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۲-۵: فرض کنید $\widetilde{A} \in F(X)$. هرگاه ارتفاع مجموعه فازی $\widetilde{A}$ برابر یک باشد، آن گاه $\widetilde{A}$ را نرمال می نامیم. در غیراین صورت، $\widetilde{A}$ را زیر نرمال می نامیم. بدیهی است که هر مجموعه فازی زیر نرمال $\widetilde{A}$ را با تقسیم $\widetilde{A}(x)$ ها بر ارتفاع $\widetilde{A}$ می توان نرمال کرد.

تعریف ۱-۲-۶: اگر x عنصری باشد که برای آن $\widetilde{A}(x) = \frac{1}{2}$، در این صورت x را یک نقطه گذر (معبر) $\widetilde{A}$ می نامیم. ([۲] راببینید.)

تعریف ۱-۲-۷: فرض کنید $\widetilde{A} \in F(X)$. در این صورت یک α-برش $\widetilde{A}$ برای هر $\alpha \in (0,1]$ به صورت $\widetilde{A}_\alpha = \{x \in X|\widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$ تعریف می شود. همچنین در بعضی موارد از

مفهوم α –برش قوی استفاده می شود، که با $\widetilde{\mathrm{A}}_{\overline{\alpha}}$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\overline{\alpha}} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} | \widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) > \alpha\}$$

در نظریه مجموعه های فازی، اصل توسیع(گسترش) یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی می باشد که اکنون به توضیح آن پرداخته می شود.

فرض کنید که $\mathrm{f}: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ یک تابع و A زیر مجموعه ای از X باشد. لذا $\mathrm{f}(\mathrm{A})$ زیرمجموعه ای از Y خواهد بود. حال می خواهیم f را طوری گسترش دهیم که بر یک زیرمجموعهٔ فازی از X اثر کند. بنابراین انتظار داریم حاصل عمل f بر زیرمجموعه فازی موردنظر، یک زیر مجموعه فازی از Yباشد. به عبارت دیگر تابع f، تابع جدیدی به صورت زیر القا می کند که درآن $\mathrm{f}(\widetilde{\mathrm{A}})$ زیرمجموعهٔ فازی از Y است:

$$\begin{aligned} &\mathrm{f}: \mathrm{F}(\mathrm{X}) \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{Y}) \\ &\widetilde{\mathrm{A}} \mapsto \mathrm{f}(\widetilde{\mathrm{A}}) \end{aligned} \qquad (۲-۱)$$

ابتدا شکل ساده اصل توسیع را بیان می کنیم و سپس با تعریف ضرب دکارتی فازی، شکل کلی آن را بیان می کنیم.

اصل توسیع: فرض کنید که X و Y دو مجموعه، $\mathrm{f}: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ یک تابع و $\widetilde{\mathrm{A}}$ یک زیرمجموعه فازی از X باشد. آن گاه f تابع جدیدی به صورت(۱-۲) القا می کند که در آن:

$$\left(\mathrm{f}(\widetilde{\mathrm{A}})\right)(\mathrm{y}) = \begin{cases} \sup_{\mathrm{y}=\mathrm{f}(\mathrm{x})} \widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) & ; \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}) \neq \emptyset \\ 0 & ;\ \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}) = \emptyset \end{cases}$$

تعریف ۱-۲-۸(ضرب دکارتی): فرض کنید که $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\dots,\widetilde{A}_n$ به ترتیب زیرمجموعه های فازی از مجموعه های مرجع $X_1,X_2,\dots,X_n$ باشند، آن گاه حاصل ضرب دکارتی

$\widetilde{A}=\widetilde{A}_1\times\widetilde{A}_2\times\dots\times\widetilde{A}_n$ یک زیرمجموعه فازی از $X=X_1\times X_2\times\dots\times X_n$ می باشد که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\widetilde{A}_1\times\widetilde{A}_2\times\dots\times\widetilde{A}_n)(x_1,x_2,\dots,x_n)=\min_{1\le i\le n}\{\widetilde{A}_i(x_i)\}\qquad;\forall x_i\in X_i$$

اصل توسیع تعمیم یافته: فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد که $X=X_1\times X_2\times\dots\times X_n$ و $\widetilde{A}=\widetilde{A}_1\times\widetilde{A}_2\times\dots\times\widetilde{A}_n$ یک زیرمجموعه فازی از X باشد. در این صورت $\widetilde{B}=f(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\dots,\widetilde{A}_n)$ یک زیرمجموعه فازی از Y است، که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\widetilde{B}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)}\left(\min\limits_{1\le i\le n}\{\tilde{A}_i(x_i)\}\right) & ;f^{-1}(y)\neq\emptyset\\ 0 & ;f^{-1}(y)=\emptyset\end{cases}$$

حال به کمک اصل توسیع می توان عملگرهای جبری را روی کمیت های فازی تعریف کرد. به عبارت دیگر، عمل دو تایی $*:R\times R\to R$ را می توان به عمل دوتایی $\otimes:F(R)\times F(R)\to F(R)$ گسترش داد، ولی باید توجه داشت که این تعمیم ها تنها بعضی از خواص اعمال دوتایی معمولی را حفظ می کنند.

تعریف ۱-۲-۹: فرض کنید که $\widetilde{A},\widetilde{B}\in F(R)$. اگر $\widetilde{A}+\widetilde{B}=\tilde{C}$، دراین صورت تابع عضویت برای $\tilde{C}$ با استفاده از اصل توسیع به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{C}(z)=\sup_{x,y\in R}\{\min\ (\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(y))\big|z=x+y\}$$

حال اگر قرار دهیم $\tilde{C}=\widetilde{A}-\widetilde{B}$، داریم:

$$\tilde{C}(z)=\sup_{x,y\in R}\{\min\ (\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(y))\big|z=x-y\}$$

و به طور مشابه برای $\tilde{C}=\widetilde{A}.\widetilde{B}$ و $\tilde{C}=\widetilde{A}/\widetilde{B}$، داریم:

$$\tilde{C}(z)=\sup_{x,y\in R}\{\min\ (\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(y))\big|z=x.y\}$$

$\tilde{C}(z) = \sup_{x,y\in R}\{\min\ (\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)) | z = x/y\}$

در همه حالتها $\tilde{C}$ کمیت فازی است. همچنین باید توجه داشت که صفر متعلق به تکیه گاه $\tilde{B}$ در $\tilde{C} = \tilde{A}/\tilde{B}$ نمی باشد.

همچنین می دانیم عملگر های $\oplus$ و $\otimes$ روی $F(R)$ دارای خاصیت جابه جایی و شرکت پذیری هستند؛ به عبارت دیگر اگر $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in F(R)$ آنگاه:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{B} \otimes \tilde{A} \quad (۱)$$
$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A} \quad (۲)$$
$$\tilde{A} \otimes (\tilde{B} \otimes \tilde{C}) = (\tilde{A} \otimes \tilde{B}) \otimes \tilde{C} \quad (۳)$$
$$\tilde{A} \oplus (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) = (\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \oplus \tilde{C} \quad (۴)$$

از آنجایی که جمع دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با استفاده از تابع عضویت بنا بر اصل توسیع بسیارمشکل است، بنابراین برای این کار از α–برش ها استفاده می کنیم. اعداد فازی را با استفاده از α –برش ها به بازه های بسته و کراندار تبدیل می کنیم، بنابراین فرض می کنیم:

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \qquad \tilde{B}_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \quad ; \forall 0 < \alpha \leq 1$$

حال فرض می کنیم $*$ یکی از چهار عمل اصلی روی بازه ها باشد، بنابراین داریم:

$$\forall\alpha \in (0,1] \quad ; (\tilde{A} * \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha * \tilde{B}_\alpha$$

از آنجایی که $\tilde{A}_\alpha$ و $\tilde{B}_\alpha$ هردو بازه هستند، با استفاده از عملیات حساب بازه ها که بعداً توضیح خواهیم داد به راحتی قابل محاسبه هستند.(برای مطالعه بیشتر به[۹] مراجعه شود.)

۱-۳ عملگرهای مجموعه ای

در این بخش عملگرهای مجموعه ای را برای مجموعه های فازی تعریف می کنیم. در تمامی موارد زیر، X یک مجموعه مرجع و $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ و... زیر مجموعه های فازی آن که به ترتیب با توابع عضویت $\widetilde{A}(x)$ و $\widetilde{B}(x)$ و ... نمایش داده می شوند. لازم به ذکر است که تمام مطالب این بخش از مرجع[۲] می باشند.

تعریف ۱-۳-۱: مجموعه فازی $\widetilde{A} \in F(X)$ را تهی نامیم، هرگاه برای هر $x \in X$، $\widetilde{A}(x) = 0$.

- مجموعه فازی $\widetilde{A} \in F(X)$ را تام نامیم، هرگاه برای هر $x \in X$، $\widetilde{A}(x) = 1$.
- دو مجموعه فازی $\widetilde{A} \in F(X)$ و $\widetilde{B}$ را مساوی نامیم، هرگاه برای هر $x \in X$، $\widetilde{A}(x) = \widetilde{B}(x)$.
- مجموعه فازی $\widetilde{A}' \in F(X)$، متمم مجموعه فازی $\widetilde{A} \in F(X)$ است که توسط تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\forall x \in X \quad ; \widetilde{A}'(x) = 1 - \widetilde{A}(x)$$

تعریف ۱-۳-۲: اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی $\widetilde{A} \in F(X)$ و $\widetilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت های زیر تعریف می شود:

$$(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})(x) = \max[\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(x)] \qquad ; \forall x \in X$$

$$(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})(x) = \min[\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(x)] \qquad ; \forall x \in X$$

گزاره ۱-۳-۳(ویژگیهای مربوط به عملگرهای متمم، اجتماع واشتراک)

فرض کنید $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ و $\widetilde{C}$ مجموعه های فازی باشند، در این صورت داریم:

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{A} = \widetilde{A} \qquad ; \widetilde{A} \cap \widetilde{A} = \widetilde{A}$$

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \widetilde{B} \cup \widetilde{A} \qquad ; \widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \widetilde{B} \cap \widetilde{A}$$

$$\widetilde{A} \cup (\widetilde{B} \cup \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cup \widetilde{C} \qquad ; \widetilde{A} \cap (\widetilde{B} \cap \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) \cap \widetilde{C}$$

$$\widetilde{A} \cup (\widetilde{B} \cap \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap (\widetilde{A} \cup \widetilde{C}) \qquad ; \widetilde{A} \cap (\widetilde{B} \cup \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{C})$$

$$(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})' = \widetilde{A}' \cap \widetilde{B}' \qquad ; (\widetilde{A} \cap \widetilde{B})' = \widetilde{A}' \cup \widetilde{B}'$$

تنها قوانین مربوط به مجموعه های معمولی که در زمینه مجموعه های فازی برقرار نیست، قوانین مربوط به متمم(قوانین شمولیت وطرد) است. یعنی برای مجموعه های فازی در حالت کلی

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{A}' \neq \emptyset \qquad , \widetilde{A} \cup \widetilde{A}' \neq X$$

این از آنجا ناشی می شود که مجموعه های فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{A}'$ هیچکدام کران های دقیقی ندارند و در نتیجه $\widetilde{A}$ و $\widetilde{A}'$ تا اندازه ای همدیگر را در بر دارند و اصطلاحاً همپوش هستند.

۱-۴ حساب بازه ها

در این بخش، اعمال حسابی روی بازه های بسته شرح داده می شود. سپس با استفاده از این اعمال حسابی وبرخی از خواص مجموعه های فازی واعداد فازی، به تعریف اعمال حسابی روی اعداد فازی پرداخته می شود.

تعریف ۱-۴-۱: چهار عمل حسابی روی بازه های بسته به صورت زیر تعریف می شوند:

۱) $[a, b] \oplus [d, e] = [a + d, b + e]$

۲) $[a, b] \ominus [d, e] = [a - e, b - d]$

۳) $[a, b] \otimes [d, e] = [\min(ad, ae, bd, be), \max(ad, ae, bd, be)]$

۴) مشروط بر اینکه $0 \notin [d, e]$، آنگاه

$$[a, b] \div [d, e] = [a, b] \otimes \left[\frac{1}{e}, \frac{1}{d}\right] = [\min\left(\frac{a}{e}, \frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{e}, \frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{b}{d}\right)]$$

نتیجه ۱-۴-۲: حال برخی از خواص اعمال حسابی روی بازه های بسته را شرح می دهیم. برای این منظور فرض کنیدکه:

$$0 = [0,0] \qquad 1 = [1,1] \qquad A = [a_1, a_2] \qquad B = [b_1, b_2] \qquad C = [c_1, c_2]$$

در این صورت خواص زیر برقرارند:

۱)جابه جایی:

$$A \oplus B = B \oplus A, \qquad A \otimes B = B \otimes A$$

۲)شرکت پذیری:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C), \qquad (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

۳)عضو همانی:

$$A = 0 \oplus A = A \oplus 0, \qquad A = 1 \otimes A = A \otimes 1$$

۴)زیر پخشی:

$$A \otimes (B \oplus C) \subseteq (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

۵)پخشی: اگر $bc > 0$ برای هر $b \in B$ و $c \in C$، آنگاه داریم:

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

۱-۵ کمیت های فازی محدب

تعریف ۱-۵-۱: کمیت فازی $\widetilde{A} \in F(R)$ را محدب گوییم، هرگاه همه α-برش های $\widetilde{A}$ محدب باشند، یا به عبارتی همه α -برش های آن بازه باشند. در غیر این صورت آن را غیر محدب گوییم.

قضیه ۱-۵-۲: کمیت فازی $\widetilde{A} \in F(R)$ محدب است اگر و تنها اگر برای هر $y \in [x, z]$ داشته باشیم:

$$\widetilde{A}(y) \geq \min\left(\widetilde{A}(x), \widetilde{A}(z)\right)$$

قضیه ۱-۵-۳: اگر $\widetilde{A} \in F(R)$ و $\widetilde{B}$ کمیت های فازی محدب باشند، آنگاه $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$ و $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$ و $-\widetilde{A}$ نیز کمیت های محدب خواهند بود.

اثبات: از آنجایی که $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ کمیت های فازی محدبی هستند، بنابراین طبق تعریف۱-۵-۱ همه α -برش های آن بازه می باشند. در این صورت جمع وضرب وقرینه بازه ها، بازه خواهد بود. بنابراین اثبات بدیهی است. ■