

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

١٤٢١



دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک اتمی و مولکولی

مطالعه پاشندگی امواج الکترومغناطیس در کانال یونی
با حضور پرتو نسبیتی الکترون

استاد راهنما

دکتر سعید میرزانژاد

استاد مشاور

دکتر فرشاد صحبت زاده

۱۳۸۷ / ۲ / ۱۳

نگارش

زینب مهدیان

بهمن ماه ۱۳۸۶

۱ ۵ ۲ ۸ ۸ ۹

کتابخانه تخصصی فیزیک
گروه فیزیک
دانشگاه مازندران

سپاس نامه:

حمد و سپاس او را سزاست آن یزدان بی همتا، یکتا پروردگار عالمیان که لطف بی دریغش ما را از نیستی عدم به هستی وجود رسانید تا دریابیم مفهوم زندگی و حقیقت بودن را. همو که از کرم در این وادی حیرت، تنها رهایمان نکرد و از درون و برون، هدایتمان نمود. عشق را ساریان کاروان جانمان قرار داد و عقل را نگهبان آن.

و سپاس فراوان از پدر و مادرم، نخست آموزگاران مهر و صبر زندگیم که هرچه دارم از محضرشان آموختم و اگر نیستم آنچنان که باید، کوتاهی و قصور از من است.

و سپاسی ویژه از جناب آقای دکتر سعید میرزائزاد، استاد فرهیخته و صبوری که در تمامی مراحل با راهنمایی های ارزنده و گرانقدر خود مرا هدایت و یاری نمودند، همچنین از دقت نظر و صبر ایشان در طول نگارش این پایان نامه بینهایت سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر فرشاد صحبت زاده مشاوره دلسوز و کاردان که با حوصله فراوان و ارائه پیشنهادات ارزنده بسیار یاریم نمودند کمال تشکر را دارم.

و سپاس بسیار دارم از خواهر، برادر و دوستانم که اگر نبود دست پر مهر یاریشان، گمشده ای بودم در ظلمات کبر و خودبینی جهل خویش.

عاقبت دل به دریا زد و رفت
پشت پا به رسم دنیا زد و رفت
زنده ها خیلی برایش کهنه بودند
خودشو تو مرده ها جا زد و رفت
دنبال کلید خوشبختی می گشت
خودشم قفلی رو قفلا زد و رفت

تقدیم به:

برادر سفر کرده ام، عباس،

پزشک سپید جامه ای که با دو بال علم و عشق

از زلال آبی بیکران به دور دست آسمان پر کشید.

چکیده

تابش القایی از پرتو نسبیتی الکترون نقش مهمی در لیزرهای الکترون آزاد و میزهای سیکلوترون الکترونی بازی می کند. لیکن مشاهدات عملی و نظری نشان می دهد که بسامد و بهره این سیستمها به علت محدودیت عملی در تولید میدانهای مغناطیسی محدود می شود. پیشنهاد استفاده از کانال یونی برای هدایت پرتو نسبیتی الکترون زمینه تولید تابشهای همدوس جدیدی را ایجاد کرده است. در کانال یونی پرتو نسبیتی با میدان بار فضای یونها متمرکز شده و عامل تابش الکترومغناطیس می شود. بهره چنین سیستمی به علت کوچک بودن سرعت القاء شده توسط کانال یونی محدود می شود. بر این اساس پیشنهاد استفاده از پرتوالکترونی دوار در کانال یونی نخستین بار در سال ۱۹۹۶ ارائه شد [۱]، این میزر پلاسمای جدید¹ ICECM نامیده شد.

در این پایان نامه، معادلات پاشندگی امواج الکترومغناطیس و امواج طولی متقارن ($\ell = 0$) و نامتقارن ($\ell = 1, 2, \dots$) در یک موجبر استوانه ای فلزی انباشته از کانال یونی و تحریک شده با پرتو نسبیتی الکترون به صورت عددی مورد مطالعه قرار می گیرد. حالت تعادل پرتو نسبیتی شامل یک دوران صلب یکنواخت بدون نوسانات بتاترونی است. با استفاده از معادلات سیال سرد، معادله دیفرانسیل حاکم بر مولفه های امواج و شرایط مرزی به صورت یک معادله ویژه مقدار بدست می آیند. این معادله ویژه مقدار با استفاده از روش تفاضلات محدود و الگوریتم پرتاب حل می شوند. نتایج ما در تطابق کامل با نتایج تحلیلی تحت شرایط حدی نظیر، موجبر فلزی انباشته از پلاسمای موجبر فلزی تو خالی و پلاسمای بینهایت است.

¹ Ion-Channel Electron Cyclotron Maser (ICECM).

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	فصل اول : مقدمه
۲	۱-۱: مقدمه
۳	۲-۱: مروری بر فیزیک برهمکنش پرتو- پلاسما
۴	۳-۱: تاریخچه برهمکنش پرتو- پلاسما و آزمایشات انجام شده
۶	۴-۱: پدیده های پرتو- پلاسما جدید
۷	۵-۱: مروری بر پایان نامه
	فصل دوم : پاشندگی امواج در موجبر
۹	۱-۲: مقدمه
۹	۲-۲: امواج در موجبر دایروی توخالی
۱۴	۱-۲-۲: بسامد قطع مدهای TM و TE در موجبر توخالی
۱۴	۳-۲: امواج در موجبر شامل پلاسما
۲۲	۱-۳-۲: بسامد قطع مدهای TM و TE در موجبر شامل پلاسما
۲۳	۴-۲: امواج الکترواستاتیک
	فصل سوم: پاشندگی امواج الکترومغناطیس در کانال یونی بدون محدودیت عرضی
۲۵	۱-۳: مقدمه
۲۵	۲-۳: معادله تعادلی نیروها
۲۵	۱-۲-۳: معرفی خود میدانها
۲۶	۲-۲-۳: معادله تعادلی نیروهای شعاعی
۲۹	۳-۳: رابطه پاشندگی خطی امواج
۳۹	۴-۳: حل عددی معادله پاشندگی
۴۰	۱-۴-۳: امواج با قطبش راستگرد، چپگرد و طولی
۴۲	۲-۴-۳: پاسخ کلی رابطه پاشندگی با قطبش ترکیبی دلخواه

فصل چهارم : پاشندگی امواج الکترومغناطیس در موجبر شامل کانال یونی

- ۴۵ ۱-۴: مشخصه های حالت تعادلی پرتو الکترونی دوار
- ۴۵ ۲-۴: رابطه پاشندگی امواج الکترومغناطیس در موجبر انباشته
- ۵۷ ۳-۴: نرمالیزاسیون معادله پاشندگی
- ۵۹ ۴-۴: ارضاء شرایط مرزی
- ۶۱ ۵-۴: نتیجه گیری و چشم اندازی به آینده
- ۶۲ مراجع

فصل اول

مقدمه

۱-۱) مقدمه

در سالهای اخیر توجه روز افزونی به تابش همدوس امواج الکترومغناطیس در ناحیه تراهرتز (THz) از پرتوهای نسبیتی الکترون^۱ REB شده است. علت اصلی این توجه، وجود مولکولها و جامدات زیادی است که مشخصه های طیفی آنها در ناحیه THz قابل شناسایی تر از نواحی فرکانس کمتر (ناحیه رادیویی و میکروویو) و یا بیشتر (مادون قرمز و مرئی) طیف الکترومغناطیس است. علت قدرت شناسایی طیفی بیشتر ناحیه THz جفت شدگی آن با ممان لختی مولکول یا نوسانات شبکه جامد است که می تواند نیروهای قیدی موجود را شناسایی نماید.

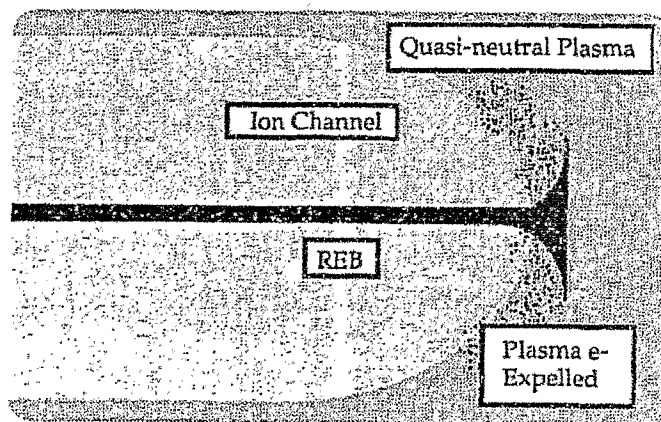
منابع تابش همدوس زیادی در ناحیه THz شناخته شده اند که اساس کار آنها بر پایه تابشهای سینکروترون و یا تابشهای گذار همدوس است [۶-۲] و اساس کار نوسانگر های میکروویو پلاسما بر پایه برهمکنش پرتو نسبیتی الکترون با ویژه مدهای الکترون موجبر شامل پلاسما است [۹-۷]. به طور مثال ناپایداری امواج الکترومغناطیس در بر همکنش پرتو- پلاسما در کانال یونی در بسامد رزنانس $\omega \sim 2\gamma^2 \omega_B$ رخ می دهد که γ فاکتور نسبیتی الکترون و ω_B بسامد بتاترونی است. همان طور که مشخص است بسامد عملیاتی با چگالی پلاسما افزایش می یابد که در چگالی های معمول پلاسما این بسامد در ناحیه میکروویو و THz قرار خواهد گرفت. بنابراین موجبر شامل پلاسما می تواند به عنوان منبعی برای تابش میکروویو و THz محسوب شود [۱۱-۱۰].

¹ Relativistic Electron Beam

۲-۱) مروری بر فیزیک برهمکنش پرتو- پلاسما

زمانی که پرتو نسبیتهی الکترون به درون پلاسمایی که چگالی آن کمتر از چگالی پرتو است تزریق شود، باعث خارج شدن الکترونهاي پلاسما و تولید کانال یونی غیر ختشی می شود و دلیل خارج شدن الکترونهاي پلاسما نیز وجود دافعه الکتریکی بار های منفی و سبک بودن آنها نسبت به یونها است از طرفی میدان الکتریکی شعاعی که به واسطه یونها تولید می شود پرتو الکترونی را متمرکز می کند که به این محدوده، ناحیه همگرایی یونی^۱ می گویند.

حال اگر چگالی پلاسما بیشتر از چگالی پرتو باشد پرتو نسبیتهی الکترون تنها توسط میدان مغناطیسی خودی (همگرایی خود مغناطیسی^۲) متمرکز می شود.



شکل ۱-۱: در آغاز که ابتدای پرتو به درون پلاسما عبور می کند، الکترونهاي پلاسما از الکترونهاي پرتو بیشتر هستند و پرتو به طور ضعیف توسط میدان مغناطیسی خود متمرکز می شود. همانطور که جریان پرتو پیوسته زیاد می شود، چگالی پرتو روی محور افزایش می یابد و میدان الکتریکی شعاعی پرتو الکترونهاي پلاسما را از حجم استوانه ای خارج می کند و کانالی از یونها شکل می گیرد که در این حالت بدنه اصلی پرتو به طور الکترواستاتیکی توسط یونها ساکن متمرکز می شوند.

^۱ Ion - Focussing Regime

^۲ Magnetic Self - Focussing

۳-۱) تاریخچه برهمکنش پرتو-پلازما و آزمایشات انجام شده

نخستین بررسی در مورد انتشار پرتو نسبیتی الکترون REB توسط Bennett در سال ۱۹۳۴ انجام شد [۱۲]. او ناحیه خود همگرایی مغناطیسی را مورد بررسی قرار داد. در ادامه در سال ۱۹۳۹، Alfven نشان داد که به واسطه خود میدانها، یک پرتو الکترونی نمی تواند در فضای آزاد با هر جریان بالای دلخواهی انتشار یابد جریان حدی یا جریان Alfven، $I_A = \gamma \beta_z I_0$ است که $I_0 = mc^3/e \sim 17 \text{ KA}$ ، γ ضریب نسبیتی و $\beta_z = v_z/c$ که v_z سرعت پرتو و c سرعت نور است [۱۳]. برای گذشتن از این حد بایستی چندین نیروی متمرکز کننده یا محصور کننده به کار برده شود که منشأ این نیروها میدانهای الکتریکی و یا مغناطیسی خارجی اند و یا با افزودن پلازما بوجود می آیند. در دهه ۱۹۵۰ مقالات زیادی در مورد خود همگرایی REB منتشر شد [۱۴-۱۶]. همچنین محققان در اواخر دهه ۱۹۶۰ و اوایل دهه ۱۹۷۰ بررسیهای گسترده ای در مورد تعادل بار و چگونگی انتشار پرتو نسبیتی الکترون انجام دادند [۱۷-۲۰].

در سال ۱۹۷۶ فرمولبندی Fokker-Planck از تعادل پرتو-پلازما و کاربرد نظریه هامیلتونی در این سیستم توسط Lee نوشته شد [۲۱]. در اواسط دهه ۱۹۷۰ بررسی ها در مورد برهمکنش پرتو-پلازما رشد نسبتاً زیادی داشت به طوری که دستیابی به این نوع مقالات در سراسر جهان امکان پذیر بود [۲۲-۲۳]. یکی از کامل ترین بررسی ها در مورد فیزیک پلاسمای REB را می توان در مقالات Jagher و همکارانش یافت [۲۴].

همچنین مطالعات وسیعی در مورد آزمایش های REB در پلاسما وجود دارد. اولین کار آزمایشگاهی روی همگرایی پرتو توسط خود میدان مغناطیسی در سال ۱۹۶۶ توسط Graybill و Nablo منتشر شد [۲۵]. اولین مشاهده شتاب یونها نیز توسط Graybill و Uglum در سال ۱۹۷۰ گزارش شد [۲۶]. بحث نظری و نتایج انتشار REB به عنوان سیستم پمپاژ لیزر N_2 توسط Yu V. Tkach و همکارانش ارائه شد [۲۷]. برخی از نتایج اولیه آزمایشات مربوط به گرم کردن پلاسما توسط REB را نیز می توانید در مراجع [۲۸-۲۹] بیابید. مقالات ذکر شده اولین مجموعه مقالات کاربردی در زمینه REB هستند که در سالهای ۱۹۸۰-۱۹۶۰ به چاپ رسیدند.

در دهه ۱۹۸۰، همگرایی توسط کانال یونی مرتباً و به طور موفقیت آمیزی در انتقال پرتو هایی با جریان بالا در سیستم های نظیر شتاب دهنده ها و تحقیقات در زمینه تابش REB به کار گرفته شد [۳۰-۳۳].

محققان در آزمایش پیشرفته شتاب دهنده ATA^۱ در آزمایشگاه ملی LLNL^۲، آزمایشهای تجربی گسترده ای در مورد انتشار پرتو نسبیتی الکترون در ناحیه همگرایی توسط کانال یونی انجام دادند [۳۴]. یکی از کاربرد های ویژه REB استفاده از آن در لیزر الکترون آزاد مادون قرمز است [۳۵] که به پرتو نسبیتی الکترون با کیفیت بالا نیازمند است [۳۶]. در این آزمایشات نشان داده شد که واگرایی^۳ REB به طور قابل ملاحظه ای در کانال یونی کم می شود و این نتایج مطلوب تر از پیش بینی های مورد انتظار بود.

^۱ Advance Test Accelerator

^۲ Lawrence Livermore National Laboratory

^۳ Emittance

۴-۱) پدیده های پرتو- پلاسما جدید

بررسی ها در مورد REB- پلاسما در طی دوران ۱۹۳۰ تا ۱۹۸۰ را می توان تحت عنوان مطالعه و کاربرد تعادل و ناپایداری پرتوها در معرض نیروهای متمرکز کننده گوناگون خلاصه کرد. بیشتر این کارها در زمینه پالس با طول های بلند در محدوده ۱۰ نانو ثانیه تا ۱ میکرو ثانیه برای شتاب یونهای سبک، حرارت دادن پلاسما، تولید میکرو موج، پمپاژ لیزرهای گازی و غیره بوده اند. تعدد این کاربرد ها نشان دهنده تنوع نواحی عملیاتی در چنین پلاسماهای سه مؤلفه ای است.

اخیراً علاقه مندی زیادی به پرتوهای الکترونی در محدوده پالس های کوتاه، واگرایی کم، جریان بالا، انرژی بالا که درون پلاسماهای غیر مغناطیسه انتشار می یابند، ایجاد شده است. مفاهیم جدید پیشنهادی شامل کانونی کردن پلاسما [۳۷-۳۸]، شتاب دهنده میدان عقبه در پلاسما [۳۹-۴۱]، شتاب دهنده موج زنش [۴۲]، شتاب دهنده الکترون [۴۳] و ... است.

همه این مفاهیم ضرورتاً با هدایت و انتشار پرتو الکترونی سروکار دارند.

مشکلات عمده در انتقال پرتو الکترونی شامل متمرکز کردن، میرایی پرتو و شتاب آن است. برای مثال امروزه مهمترین هدف برای فیزیک شتاب دهنده ها طراحی برخورد پوزیترون- الکترون با انرژی TeV و درخشندگی بالا در طول قابل قبول است [۴۴]. برای دستیابی به این هدف، پلاسماها برای شتاب پرتو ها تا انرژی TeV در چند صد متر، برای کانونی کردن آنها [۴۵] و برای خنثی کردن تأثیر خود میدانها در محل بر همکنش [۴۶] پیشنهاد شده اند.

بنابراین می توان بر محدودیت های خاصی که به واسطه اثرات جمعی^۱ در برخورد های دو پرتو باردار بوجود می آیند غلبه کرد [۴۷-۴۹].

۵-۱) مروری بر پایان نامه

به علت اینکه هدف ما بررسی مشخصه های امواج الکترومغناطیس در دو حالت کانال یونی و موجبر انباشته از کانال یونی است لذا در فصل اول مقدمه ای از نحوه ایجاد کانال یونی و تاریخچه استفاده از آن بیان شده است. در فصل دوم قبل از بررسی پاشندگی امواج در موجبر انباشته از کانال یونی به بررسی آن در موجبر های توخالی و شامل پلاسما می پردازیم و در فصل سوم نیز ضمن ارائه معادله پاشندگی خطی امواج در کانال یونی با حضور باریکه نسبیته الکترون به حل عددی آن خواهیم پرداخت و نتایج بدست آمده را ذکر می کنیم و در فصل چهارم مسئله را برای موجبر شامل کانال یونی حل می کنیم و شرایط مرزی مربوطه را بیان می کنیم. در مورد امواج TM و TE نیز بحث می کنیم. همچنین معادلات دیفرانسیل جفت شده بدست آمده را در شرایط حدی (موجبر های توخالی و شامل پلاسما) به صورت تحلیلی بررسی می کنیم که با نتایج فصل دوم توافق کاملی داشت [۵۰]. به حل عددی آن در حالت کلی نمی پردازیم زیرا به منظور دستیابی به نتایج دقیق نیاز به زمان بیشتری داریم.

¹ Collective Effects

فصل دوم

پاشندگی امواج در موجبر

۱-۲ مقدمه

امواج الکترومغناطیس می توانند در درون موجبرها انتشار یابند. در این فصل ابتدا مروری بر رفتار امواج الکترومغناطیس در موجبرهای استوانه ای توخالی (لوله های فلزی با سطح مقطع دایره) خواهیم داشت، سپس رفتار این امواج و امواج بار فضا^۱ (الکتروستاتیک) را در موجبرهای شامل پلاسما بررسی می کنیم و در هر حالت درباره امواج الکتریکی عرضی (TE) و امواج مغناطیسی عرضی (TM) بحث می کنیم و پاشندگی امواج را نیز در شرایط حدی محیط نامحدود (شعاع بینهایت برای موجبر) بررسی می کنیم.

۲-۲ امواج در موجبر دایروی توخالی

همان طور که می دانیم امواج الکترومغناطیس از معادلات ماکسول تبعیت می کنند که در خلاء به صورت زیر بسط داده می شوند.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1-2)$$

$$\frac{i\ell}{r} E_z - ikE_\theta = \frac{i\omega}{c} B_r, \quad (2-2)$$

$$ikE_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z = \frac{i\omega}{c} B_\theta, \quad (3-2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) - \frac{i\ell}{r} E_r = \frac{i\omega}{c} B_z, \quad (4-2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5-2)$$

$$\frac{i\ell}{r} B_z - ikB_\theta = -\frac{i\omega}{c} E_r, \quad (6-2)$$

¹ Space Charge Waves

$$ikB_r - \frac{\partial}{\partial r} B_z = -\frac{i\omega}{c} E_\theta \quad (7-2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) - \frac{i\ell}{r} B_r = -\frac{i\omega}{c} E_z \quad (8-2)$$

وابستگی زمانی و مکانی مؤلفه های میدان به صورت زیر فرض شده است.

$$\vec{E} = \vec{E}(r) e^{i(kz - \omega t + \ell\theta)} \quad (9-2)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(r) e^{i(kz - \omega t + \ell\theta)} \quad (10-2)$$

این معادلات را می توان با هم ترکیب کرد و مؤلفه های عرضی میدان را بر حسب مؤلفه های طولی E_z و B_z بدست آورد.

از معادلات (2-2) و (7-2) مؤلفه های E_θ و B_r و از معادلات (3-2) و (6-2) مؤلفه های E_r و B_θ به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$E_\theta = \frac{\ell k}{A^2 r} E_z + \frac{i\omega}{A^2 c} \frac{\partial}{\partial r} B_z \quad (11-2)$$

$$B_r = -\frac{\ell \omega}{A^2 r c} E_z - \frac{ik}{A^2} \frac{\partial}{\partial r} B_z \quad (12-2)$$

$$E_r = \frac{\ell \omega}{A^2 r c} B_z - \frac{ik}{A^2} \frac{\partial}{\partial r} E_z \quad (13-2)$$

$$B_\theta = \frac{k\ell}{A^2 r} B_z - \frac{i\omega}{A^2 c} \frac{\partial}{\partial r} E_z \quad (14-2)$$

که $A^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ است.

سپس با جایگزینی روابط فوق در معادلات (4-2) و (8-2) به معادلات موجی خواهیم رسید که معادله دیفرانسیل بسل هستند.

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left[T^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right] E_z = 0, \quad (15-2)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \left[T^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right] B_z = 0. \quad (16-2)$$

که در آن $T^2 = -A^2$ است. پس می توان گفت:

$$E_z(r) = \tilde{E}_z J_\ell(Tr) \quad \text{و} \quad B_z(r) = \tilde{B}_z J_\ell(Tr) \quad (17-2)$$

بنابراین با استفاده از رابطه فوق مؤلفه های عرضی میدان به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$E_r = -\frac{1}{T^2} \left[\frac{\ell \omega}{rc} \tilde{B}_z J_\ell(Tr) - ikT \tilde{E}_z J'_\ell(Tr) \right] e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)}, \quad (18-2)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{T^2} \left[\frac{\ell k}{r} \tilde{E}_z J_\ell(Tr) + \frac{i\omega T}{c} \tilde{B}_z J'_\ell(Tr) \right] e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)}, \quad (19-2)$$

$$B_r = -\frac{1}{T^2} \left[-\frac{\ell \omega}{rc} \tilde{E}_z J_\ell(Tr) - ikT \tilde{B}_z J'_\ell(Tr) \right] e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)}, \quad (20-2)$$

$$B_\theta = -\frac{1}{T^2} \left[\frac{k\ell}{r} \tilde{B}_z J_\ell(Tr) - \frac{i\omega T}{c} \tilde{E}_z J'_\ell(Tr) \right] e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)}. \quad (21-2)$$

برای امواج TM مؤلفه B_z صفر است. ($\tilde{B}_z = 0$) بنابراین رابطه های فوق به صورت زیر نوشته می شوند.

$$E_r = \frac{ik}{T} \tilde{E}_z J'_\ell(Tr) e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)}$$

$$E_\theta = -\frac{\ell k}{T^2 r} \tilde{E}_z J_\ell(Tr) e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)} \quad (22-2)$$

$$B_r = \frac{\ell \omega}{T^2 rc} \tilde{E}_z J_\ell(Tr) e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)}$$

$$B_\theta = \frac{i\omega}{Tc} \tilde{E}_z J'_\ell(Tr) e^{i(kz - \omega t + \ell \theta)}$$

مؤلفه های عرضی میدان امواج TE که مؤلفه E_z آن صفر است ($\tilde{E}_z = 0$) به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$E_r = -\frac{\ell\omega}{T^2rc} \tilde{B}_z J_\ell(Tr) e^{i(kz-\omega t+\ell\theta)} \quad \text{و} \quad B_r = \frac{ik}{T} \tilde{B}_z J'_\ell(Tr) e^{i(kz-\omega t+\ell\theta)}$$

$$E_\theta = -\frac{i\omega}{Tc} \tilde{B}_z J'_\ell(Tr) e^{i(kz-\omega t+\ell\theta)} \quad \text{و} \quad B_\theta = -\frac{k\ell}{T^2r} \tilde{B}_z J_\ell(Tr) e^{i(kz-\omega t+\ell\theta)} \quad (23-2)$$

از طرفی شرط مرزی لازم برای امواج TM آن است که E_z در سطح موجبر صفر باشد یعنی:

$$E_z(r=a) = J_\ell(Ta) = J_\ell(x_{\ell n}) = 0 \quad \text{مدهای TM} \quad (24-2)$$

که a شعاع سطح مقطع دایروی موجبر است.

تعداد بی نهایت مد TM، متناظر با تعداد بی نهایت ریشه های تابع بسل $(x_{\ell n})$ می تواند وجود داشته باشد که در جدول (۱) مقادیر تعدادی از صفر های تابع بسل درج شده است که زیرنویس اول به مقدار ℓ یعنی مرتبه تابع بسل و زیرنویس دوم n نشان دهنده شماره ریشه تابع بسل است.

$\ell \backslash n$	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۲.۴۰۵	۳.۸۳۲	۵.۱۳۶	۶.۳۸۰	۷.۵۸۸
۲	۵.۵۲۰	۷.۰۱۶	۸.۴۱۷	۹.۷۶۱	۱۱.۰۶۵
۳	۸.۶۵۴	۱۰.۱۷۳	۱۱.۶۲۰	۱۳.۰۱۵	۱۴.۳۷۲

جدول (۱) صفر های تابع بسل $J_\ell(x_{\ell n})$ ، $x_{\ell n}$

بدین ترتیب می توان رابطه پاشندگی امواج TM (۲-۲۶) را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\frac{(Ta)^2}{a^2} = \frac{x_{\ell n}^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \quad (2-25)$$

$$\omega = c \sqrt{\frac{x_{\ell n}^2}{a^2} + k^2}. \quad (2-26)$$

اما شرط مرزی لازم برای امواج TE آن است که E_θ در سطح موجبر صفر باشد یعنی:

$$E_\theta(r=a) \propto J'_\ell(Ta) = J'_\ell(y_{\ell n}) = 0 \quad (2-27)$$

که در آن $y_{\ell n}$ صفرهای مشتق تابع بسل هستند.

بنابراین رابطه پاشندگی امواج TE به صورت زیر است.

$$\omega = c \sqrt{\frac{y_{\ell n}^2}{a^2} + k^2} \quad (2-28)$$

که در جدول (۲) مقادیر تعدادی از صفرهای مشتق تابع بسل درج شده است.

$\ell \backslash n$	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۳.۸۳۲	۱.۸۴۱	۳.۰۵۴	۴.۲۰۱	۵.۳۱۷
۲	۷.۰۱۶	۵.۳۳۱	۶.۷۰۶	۸.۰۱۵	۹.۲۸۲
۳	۱۰.۱۷۳	۸.۵۳۶	۹.۹۶۹	۱۱.۳۴۶	۱۲.۶۸۲

جدول (۲) صفرهای مشتق تابع بسل $J'_\ell(y_{\ell n})$ ، $y_{\ell n}$

در شرایط حدی زمانی که شعاع موجبر بی نهایت باشد ($a \rightarrow \infty$) روابط (۲-۲۶) و (۲-۲۸) به

رابطه پاشندگی امواج عرضی در خلاء ($\omega = ck$) تبدیل می شوند.