بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم - بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای تکمیل دوره کارشناسی ارشد

تحت عنوان:

برآورد خطاهای مقادیر و بردارهای ویژه با روش گالرکین

استاد راهنما

دکتر محمود محسنی مقدم

مولف

مهدی قوتمند

تیر ۱۳۷۳

بسمه تعالی

این پایان نامه
به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد
به

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : مهدی قوتمند

استاد راهنما: دکتر محمود محسنی مقدم

داور ۱ : دکتر اسفندیار اسلامی

داور ۲ : دکتر علیرضا احمدی

دانشگاه شهید باهنر
کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به:

تکیه‌گاههای زندگیم

پدرم،

مادرم،

همسرم

و امیدهای آینده‌ام

بنام خدا

با سپاس به درگاه خداوندی که جهان هستی را به جهت قدرت بی‌پایانش آفرید و به انسان آموخت تا در جهت کسب علم و معرفت تلاش نماید. دریچه‌های شناخت را برای بشر مفتوح ساخت، شاید که سعادتمند شود.

امید آن دارم که با لطف و عنایت خویش رهروی صادق برای راهش و خادمی مخلص برای خلقش باشم.

برخود فرض می‌دانم که از پدرم و مادرم به عنوان اولین مشوقین من در جهت کسب علم صمیمانه تقدیر و سپاس به عمل آورم. دو نگین تابناک که چون خورشیدی در پیچ و خم تاریک این مسیر روشنگر و راهنما بوده‌اند.

همچنین لازم می‌دانم از همسر وفادار و صبورم بخاطر تحمل تمامی سختیها و مشقات این دوران که چون کوهی استوار، دلگرم‌کننده و امیدبخش بوده تشکر و تقدیر نمایم. بدون شک وجود فرزند خردسالم در این دوران نقطه امید بزرگی بود، چرا که همه تلاشها و کوششها برای آیندگان است.

در اینجا لازم می‌دانم که از تمامی اعضای محترم بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان که با ایجاد محیط علمی، امکان موفقیت تحصیلی را برای من فراهم آوردند تشکر نمایم. در بین اساتید محترم به استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمود محسنی مقدم که در دوران تحصیل حق استادی را به نحو احسن بجای آوردند و همواره خود را مدیون تلاش ایشان می‌دانم صمیمانه سپاس و درود می‌فرستم و آرزوی توفیق روزافزون و سلامت برای ایشان را از درگاه خداوند مسئلت می‌نمایم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر اسلامی و دکتر احمدی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را برخود هموار نمودند صمیمانه تشکر می‌کنم.

در ضمن این پژوهش با حمایت مرکز بین‌المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی و مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی انجام گردیده، که نهایت تشکر و امتنان را دارم.

مهدی قوتمند

تیرماه ۱۳۷۳

چکیده

در بسیاری از شاخه‌های علوم کاربردی (مهندسی) به مسائلی به فرم $Tu = \lambda u$ برخورد می‌کنیم که در آن λ و u به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه خواهند بود. بدست آوردن مقدار مناسب λ و u در مسئله فوق حائز اهمیت می‌باشد. از آنجایی که این مقدار همواره بطور دقیق محاسبه نمی‌شوند، بنابراین بدست آوردن یک تقریب مناسب برای λ و u و بررسی خطاهای آنها قابل اهمیت خواهند بود. در این رساله یک روش برای تقریب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مسائل خودالحاقی $(T^* = T, \lambda \in \mathbb{R})$ موسوم به روش گالرکین، ارائه و خطاهای آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف بدست آوردن برآورد مناسبی برای خطاهای موجود در تقریب مقدار ویژه و بردار ویژه اینگونه مسائل با روش مذکور می‌باشد. بخصوص حالت مقادیر ویژه مکرر مورد بحث خواهد بود.

فهرست مطالب

فصل ۱

برآورد خطاها در تقریب مقادیر ویژه و بردار ویژه

۱.۱ مقدمه

یکی از روش‌هایی که برای تقریب خطاها در مقدار ویژه و بردار ویژه مسائل خودالحاقی[1] بکار می‌رود، روش گالرکین[2] می‌باشد. هدف، بدست آوردن برآورد مناسبی برای خطاهای موجود، در تقریب مقدار ویژه این گونه مسائل با روش فوق می‌باشد. نتایج بدست آمده در مورد مقادیر ویژه مکرر، جدید می‌باشد. روند مبتنی بر نزدیک شدن مقدار ویژه‌ای مانند λ می‌باشد. برای محاسبه مقادیر ویژه ساده، روش مذکور نیز کارساز می‌باشد.

۱.۲ برآورد خطاها در تقریب مقدار ویژه و بردار ویژه

فرض کنید λ_k مقدار ویژه از مرتبه تکرار q، برای مسئله خودالحاقی باشد. همچنین $M(\lambda_k)$ فضای بردارهای ویژه متناظر با λ_k و S فضای تقریب با بعد متناهی برای روش گالرکین باشد. برای مسئله فوق نرمی به نام نرم انرژی تعریف می‌شود. اکنون λ_k با q تا از مقادیر ویژه تقریب گالرکین به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda_k \leq \lambda_{S,K} \leq \lambda_{S,K+1} \leq \cdots \leq \lambda_{S,K+q-1} \quad ،$$

$$\lambda_k \simeq \lambda_{S,K} \simeq \lambda_{S,K+1} \simeq \cdots \simeq \lambda_{S,K+q-1}$$

---

[1] selfadjoint

[2] Galerkin

برآورد اصلی برای خطاهای موجود در تقریب مقدار ویژه به صورت زیر می‌باشد.

$$\lambda_{S,K} - \lambda_k \leq C(\inf_{\substack{u\in M(\lambda_k) \\ \|u\|_{B.} = ۱}} \inf_{x\in S} \|u\|_{B.})^۲ := C\epsilon_{\lambda_k}(S)^۲ \qquad (۱.۱)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که، خطای بین λ_k و $\lambda_{S,k}$ نزدیک‌ترین مقدار ویژه تقریب برای λ_k، به یک ثابت زمانی در مربع مینیمال نرم انرژی فاصله بین S و بردارهای ویژه مانند $u \in M(\lambda_k)$ با $\|u\|_{B.} = ۱$ محدود می‌شود. برای محدود کردن $\lambda_k - \lambda_{S,k+q_۱}$، بعبارت دیگر خطای بین λ_k و $\lambda_{S,k+q-۱}$ دورترین مقدار ویژه تقریب به λ_k به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\lambda_{S,K+q-۱} - \lambda_k \leq C(\sup_{\substack{u\in M(\lambda_k) \\ \|u\|_{B.} = ۱}} \inf_{x\in S} \|u - x\|_{B.})^۲ := C\overline{\epsilon}_{\lambda_k}(S)^۲ \qquad (۱.۲)$$

برای بدست آوردن کران خطاهای λ_k - $\lambda_{S,k+i}$ که $i = ۱, \cdots, q - ۲$ به مقادیری بین $C\epsilon_{\lambda_k}(S)^۲$ و $C\overline{\epsilon}_{\lambda_k}(S)^۲$ محدود می‌شود.

این نتایج می‌تواند با آنچه که در مقالات می‌باشد مقایسه شود. در مقاله با بوسکا_عزیز[۳] [۱] و فیکس[۴] [۴] و کولاتا[۵] [۶] برآورد زیر محاسبه می‌شود.

$$\lambda_{S,K+i} - \lambda_k \leq C\overline{\epsilon}_{\lambda K}(S)^۲ \qquad i = ۰, ۱, \cdots, q - ۱ \qquad (۱.۳)$$

برآورد (۱.۳) برای $i = ۰, ۱, \cdots, q - ۲$ از برآوردهای بالا ضعیف‌تر است. ((۱.۱) برای $i = ۰$ و

[۳] Babuska and Aziz

[۴] Fix

[۵] kolata

(۱.۲) برای $i = 1, \cdots, q-2$ ذکر شده). برای $i = q-1$ برآورد (۱.۳) ، (۱.۲) یکسان است.

مقالات بیرخف[۶]، دی‌بور[۷]، سوارتز[۸] و وندروف[۹] [۲]، حاوی جدیدترین نتایج در ارتباط با حالت کلّی بحث می‌باشند. برآورد مقدار ویژه به مجموع مربعات نرم انرژی فاصله‌های بین S و بردارهای ویژه مربوط به λ_jهایی که از λ_k بزرگتر نمی‌باشند بستگی دارد. در خصیصه (۱.۱) که جدید می‌باشد، کران خطای $\epsilon_{\lambda k}(S)^2$ تنها به یک بردار ویژه مانند $u \in M(\lambda_k)$ بستگی دارد، که همان بهترین تقریب توسط S می‌باشد.

۱.۳ برآورد خطاها در تقریب بردار ویژه

در ارتباط با خطاهای موجود در تقریب بردارهای ویژه نشان می‌دهیم، اگر $u_{S,k}$ بردار ویژه تقریب گالرکین متناظر با $\lambda_{S,k}$ باشد، در این صورت عنصری مانند $u_k = u_k(S) \in M(\lambda_k)$ با $\|u_k\|_{B.} = 1$ وجود دارد به طوری که در برآورد زیر صدق می‌کند.

$$\|u_{S,K} - u_K\|_{B.} \leq C\epsilon_{\lambda K}(S) \tag{۱.۴}$$

خطای $\|u_{S,k+q-1} - u_k\|_{B.}$ به $C\bar{\epsilon}_{\lambda_k}(S)$ محدود می‌شود. خطاهای $\|u_{S,k+i} - u_{k+i}\|_{B.}$ برای $i = 1, \cdots, q-2$ به مقادیری بین $C\epsilon_{\lambda_k}(S)$ و $C\bar{\epsilon}_{\lambda_k}(S)$ محدود می‌شوند. بهترین نتایج شناخته شده

---

[۶] Birkhoff

[۷] de Boor

[۸] Swarts

[۹] Wendroof

برآورد زیر می‌باشد.

$$\|u_{S,K+i} - u_{K+i}\|_{B.} \le C\overline{\epsilon}_{\lambda K}(S) \qquad i = ۰, \cdots, q-۱ \tag{۱.۵}$$

در فصل دوّم رده‌های گوناگونی از مسائل مقدار ویژه خودالحاق فرمول‌بندی شده‌ای معرفی می‌شود. سپس تقریبهای گالرکین برای این مسائل ارائه می‌شود. اصلی‌ترین نتایج تئوریک در فصل سوّم ارائه و اثبات می‌شود. روش عمل، مستقیم و خود دربر دارنده می‌باشد. درک آن نیاز به آشنائی با مقدمات آنالیز تابعی دارد. در فصل چهارم محاسبات عددی تقریب با عناصر متناهی مسئله زیر عنوان خواهد شد.

فرض کنید مسئله‌ای با مقادیر مضاعف باشد. بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه مضاعف دارای رفتارهای تقریبی متمایز می‌باشند. در نتیجه مقادیر زیر متفاوت می‌باشد.

$$\epsilon_{\lambda K}(S) = \inf_{\substack{u\in M(\lambda_k)\\ \|u\|_{B.}=۱}} \inf_{x\in S} \|u-x\|_{B.},$$

$$\overline{\epsilon}_{\lambda k}(S) = \sup_{\substack{u\in M(\lambda_k)\\ \|u\|_{B.}=۱}} \inf_{x\in S} \|u-x\|_{B.}$$

انتظار می‌رود که مقادیر $\lambda_{S,k} - \lambda_k$ و $\lambda_{S,k+۱} - \lambda_k$ متمایز باشد. این به وضوح در محاسبات نشان داده می‌شود. همچنین محاسبات نشان می‌دهد که $u_{S,k}$ (بردار ویژه تقریبی متناظر با $\lambda_{S,k}$، نزدیکترین مقدار ویژه تقریب به λ_k) به یک بردار ویژه با رفتارهای تقریبی نامناسب میل کند.

مقالات مربوط به مسائل مقادیر ویژه بسیار گسترده‌اند. در اینجا فقط به تعدادی از آنها ارجاع داده شده، که مستقیماً با کار مسئله مورد بحث در ارتباط می‌باشد. بعبارت دیگر فقط تعدادی از آنها ذکر شده، که

در ارتباط با تقریب گالرکین برای زوج ویژه‌های متناظر با مقادیر ویژه مکرر می‌باشد. برای آشنایی بیشتر با مسائل مقدار ویژه به ویژه نگاشت جامعی در این زمینه که توسط چاتلین [10] [۳] نوشته شده مراجعه نمائید.

---

[10] Chatelin

فصل ۲

فرمولبندی مسائل خودالحاقی و تقریبهای گالرکین