بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

مجموعه‌های غیرزائد باز-باز در گراف

خانم دکتر نسرین سلطانخواه

سمیه اقبالیان آرانی

اسفند ۱۳۸۷

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ....

الزهراء

بسمه تعالی

بموجب نامه شماره .... مورخ ..../...... جلسه دفاع از پایان نامه خانم سمیه اقبالیان آرانی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم پایه شماره دانشجویی ۸۵۱۲۴۷۰۰۱ در روز دوشنبه مورخ ۸۷/۱۲/۵ تحت عنوان مجموعه‌های غیر زائد باز - باز در گراف
در اطاق سمینار گروه ریاضی برگزار گردید .
ابتدا خانم سمیه اقبالیان آرانی گزارشی از کار پژوهشی خود را ارائه کردند و سپس به سوالات اعضاء حاضر در جلسه پاسخ دادند . در پایان هیات داوران رساله دانشجو را با نمره ۱۹/۲۵ و امتیاز عالی مورد قبول قرار دادند / ~~قرار ندادند~~ .

هیات داوران :

۱. استاد راهنما خانم دکتر سلطانخواه
۲. استاد مشاور ——
۳. داور آقای دکتر حاج ابوالحسن
۴. داور خانم دکتر هادیان دهکردی

نام و نام خانوادگی مدیر گروه صدیقه بشیر امضاء

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده علوم پایه امضاء
یا نماینده دانشکده در شورای تحصیلات تکمیلی دانشگاه
دکتر رضا ثابت دارایانی
دارایانی
۸۷/۱۲/۱۲

ونک خیابان ونک
۱۹۹۳۸۹۱۱۷۶
۸۸۰۴۴۰۵۱
۸۸۰۳۵۱۸۷

به پاس همهٔ رنجها و زحماتی که

پدر و مادر مهربانم
و
همسر صبورم

در دوران تحصیلم کشیده‌اند، این پایان‌نامه را تقدیمشان می‌کنم.

قدردانی و تشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.
اکنون که به شکرانهٔ الهی و در سایهٔ ایزد منّان، این پروژه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند به ویژه، استاد محترم سرکار خانم دکتر سلطانخواه تشکر و قدردانی نمایم.
همچنین از سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و از خانوادهٔ عزیزم و به خصوص پدر و مادر گرامیم که یاور و مشوق من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلم بوده‌اند کمال امتنان را دارم.
در نهایت از همسر مهربانم که همراه و یار من بودند تقدیر و تشکر می‌کنم.

سمیه اقبالیان آرانی
اسفند ۱۳۸۷

چکیده

زیرمجموعهٔ X از رأس‌های یک گراف سادهٔ G را غیرزائد باز—باز گوییم هرگاه برای هر $v \in X$ داشته باشیم $N(v) - N(X - \{v\}) \neq \emptyset$. با به کار بردن همسایگی‌های بسته یا باز در این تفاضل، مجموعه‌های غیرزائد بسته—بسته، بسته—باز و باز—بسته به دست می‌آید. از میان این مجموعه‌ها، مجموعهٔ غیرزائد بسته—بستهٔ یک گراف به خاطر ارتباطش با مجموعهٔ احاطه‌گر، به طور مفصّل بررسی شده است.
فصل اوّل این رساله را به تعاریف مورد نیاز در این پایان نامه و همچنین نتایج به دست آمده در مورد مجموعه‌های غیرزائد بسته—بسته و بسته—باز اختصاص داده‌ایم. در فصل دوّم، ویژگی‌هایی از مجموعه‌های غیرزائد باز—بستهٔ ماکسیمال در هر گراف و کرانی برای اندازهٔ کوچکترین مجموعهٔ غیرزائد باز—بستهٔ ماکسیمال را بیان و اثبات می‌کنیم. در فصل سوّم، رابطهٔ بین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال و غیرزائد بسته—بستهٔ ماکسیمال، رابطهٔ بین مجموعه‌های مستقل ماکسیمال و احاطه‌گر و رابطهٔ بین مجموعه‌های احاطه‌گر تام مینیمال و غیرزائد باز—باز ماکسیمال را نشان می‌دهیم. در فصل چهارم، ویژگی‌هایی از مجموعه‌های غیرزائد باز—باز در هر گراف و همچنین کوچکترین اندازهٔ یک مجموعهٔ غیرزائد باز—باز ماکسیمال در مسیرها و دورها را به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که مجموعه‌های غیرزائد باز—باز از یک گراف دوبخشی با مجموعه‌های غیرزائد باز—بسته از هر بخش آن چه ارتباطی دارد.

کلمات کلیدی: مجموعهٔ احاطه‌گر تام، مجموعهٔ غیرزائد باز، مجموعهٔ غیرزائد باز—باز، همسایگی خصوصی.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

مقدمه

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده باشد. مجموعهٔ $S\subseteq V$ را احاطه‌گر گوییم هرگاه هر رأس از $V-S$ حداقل یک همسایه در S داشته باشد و S را احاطه‌گر تام گوییم هرگاه هر رأس از V حداقل یک همسایه در S داشته باشد. تاکنون بیش از ۱۵۰۰ مقاله در مورد مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف‌ها نوشته شده است و در کتاب [۱۴] جزئیات این مقاله‌ها به دقّت بررسی شده است.

بعضی از پژوهشگران دریافتند که درکی عمیق از مفهوم احاطه‌گری در گراف، مستلزم مطالعهٔ مفهوم بسیار کلّی‌تر غیرزائد بودن در گراف است. زیرمجموعهٔ X از رأس‌های یک گراف سادهٔ G را غیرزائد (غیرزائد بسته—بسته) گوییم هرگاه برای هر $v\in X$ داشته باشیم $N[v]-N[X-\{v\}]\neq\emptyset$. با به کار بردن همسایگی‌های بسته یا باز در این تفاضل، مجموعه‌های غیرزائد باز—باز، بسته—باز و باز—بسته به دست می‌آید.

این عقیده، نخستین بار در سال ۱۹۷۸ توسط کوکین[1] و چند تن از پژوهشگران [۸] مطرح شد که یک مجموعه، احاطه‌گر مینیمال است اگر و تنها اگر غیرزائد و احاطه‌گر باشد. سپس کوکین و بلوباش[2] [۲] ثابت کردند که کلاس مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال یک گراف، در کلاس گسترده‌تر مجموعه‌های غیرزائد ماکسیمال آن گراف مشمول شده است. در [۱۲]، فینبو[3] ثابت کرد که اگر یک مجموعه، احاطه‌گر تام مینیمال باشد آنگاه غیرزائد باز—باز ماکسیمال است که در فصل سوّم، جزئیات اثبات آن را ارائه می‌دهیم. مجموعه‌های غیرزائد و غیرزائد بسته—باز به طور مفصل در [۱۳، ۱۰، ٦] بررسی شده‌اند و کران‌های پایین وابسته به مرتبه و ماکسیمم درجهٔ گراف برای اندازهٔ کوچکترین مجموعهٔ غیرزائد ماکسیمال و اندازهٔ کوچکترین مجموعهٔ غیرزائد بسته—باز ماکسیمال به دست آمده‌اند.

Cockayne[1]

Bollobas[2]

Finbow[3]

در این پایان نامه، به معرّفی، بررسی ویژگی‌ها و نتایج به دست آمده برای مجموعه‌های غیرزائد باز—بسته و غیرزائد باز—باز می‌پردازیم که طی سالیان اخیر مطالعه روی آن‌ها آغاز شده است.

فصل اوّل این رساله را به تعاریف مورد نیاز در این پایان نامه و همچنین نتایج به دست آمده در مورد مجموعه‌های غیرزائد بسته—بسته و بسته—باز اختصاص داده‌ایم.

در فصل دوّم، ویژگی‌هایی از مجموعه‌های غیرزائد باز—بستهٔ ماکسیمال در هر گراف و کرانی برای اندازهٔ کوچکترین مجموعهٔ غیرزائد باز ماکسیمال را بیان و اثبات می‌کنیم.

در فصل سوّم، رابطهٔ بین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال و غیرزائد بسته—بستهٔ ماکسیمال، رابطهٔ بین مجموعه‌های مستقل ماکسیمال و احاطه‌گر و رابطهٔ بین مجموعه‌های احاطه‌گر تام مینیمال و غیرزائد باز—باز ماکسیمال را نشان می‌دهیم.

در فصل چهارم، ویژگی‌هایی از مجموعه‌های غیرزائد باز—باز در هر گراف و همچنین کوچکترین اندازهٔ یک مجموعهٔ غیرزائد باز—باز ماکسیمال در مسیرها و دورها را به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که مجموعه‌های غیرزائد باز—باز از یک گراف دوبخشی با مجموعه‌های غیرزائد باز—بسته از هر بخش آن چه ارتباطی دارد.

فصل ۱

تعاریف و نتایج مقدّماتی

در این فصل تعاریف و نتایج مقدّماتی که در فصل‌های بعدی این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

۱.۱ تعاریف مقدّماتی

فرض کنید $G=(V,E)$، یک گراف ساده (بدون حلقه و یال چندگانه) باشد که در آن، V مجموعهٔ رأس‌ها و E مجموعهٔ یال‌های G است.

تعریف ۱.۱ برای هر $v \in V$، همسایگی باز v که با $N(v)$ نمایش می‌دهیم مجموعهٔ رأس‌هایی از V است که با v در G مجاور هستند یعنی $N(v)=\{u \in V|\ \ uv \in E\}$.

تعریف ۲.۱ برای هر مجموعهٔ $S \subseteq V$، همسایگی باز S، اجتماع تمام همسایگی‌های باز رأس‌های S است یعنی $N(S)=\bigcup_{v\in S} N(v)$.

تعریف ۳.۱ برای هر $S \subseteq V$، همسایگی بستهٔ مجموعهٔ S، به صورت $N[S]=N(S)\cup S$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۴ زیرمجموعهٔ D از رأس‌های G را یک **مجموعهٔ احاطه‌گر** گوییم هرگاه هر رأس $x \in V - D$ با حداقل یک رأس از D همسایه باشد.

نتیجه ۱.۵ مجموعهٔ $D \subseteq V$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است هرگاه $N[D] = V$.

تعریف ۱.۶ اندازهٔ کوچکترین مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G را **عدد احاطه‌گر** G می‌نامند و آن را با نماد $\gamma(G)$ نمایش می‌دهند.

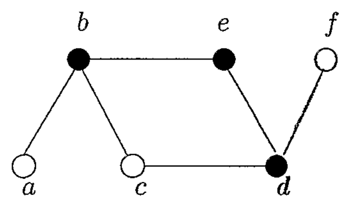
تعریف ۱.۷ یک **مجموعهٔ احاطه‌گر تام** D، زیرمجموعه‌ای از V است به طوری که هر رأس $x \in V$ با حداقل یک رأس از D همسایه باشد.

نتیجه ۱.۸ زیرمجموعهٔ D از V، یک مجموعهٔ احاطه‌گر **تام** است هرگاه $N(D) = V$.

تعریف ۱.۹ اندازهٔ کوچکترین مجموعهٔ احاطه‌گر تام گراف G را **عدد احاطه‌گر تام** G می‌نامند و آن را با نماد $\gamma_t(G)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱.۱ در گراف شکل ۱.۱، مجموعهٔ $D = \{b, d, e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر تام برای G است و از آنجا که هیچ دو رأس مجاور، همهٔ رأس‌های G را احاطه نمی‌کنند لذا $\gamma_t(G) = 3$ است.

تعریف ۱.۱۰ مجموعهٔ $S \subseteq V$، یک مجموعهٔ **مستقل** است هرگاه هر $v \in S$ در $G[S]$ زیرگراف القا شده توسط S، منفرد باشد.



شکل ۱.۱: گراف G با $\gamma_t(G) = 3$

تعریف ۱۱.۱ **حاصلضرب دکارتی** دو گراف G و H، گرافی است که با نماد $G \square H$ نمایش داده می‌شود و در آن $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ است و $((u,u'),(v,v')) \in E(G \square H)$ اگر و تنها اگر $u = v$ و $(u',v') \in E(H)$ یا $u' = v'$ و $(u,v) \in E(G)$.

اکنون چهار نوع از زیرمجموعه رأس‌های گراف G را معرّفی می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱ مجموعهٔ $X \subseteq V$،

۱) **غیرزائد بسته—بسته** (به طور اختصار غیرزائد) است هرگاه برای هر $v \in X$، $N[v] - N[X - \{v\}] \neq \emptyset$.

۲) **غیرزائد باز—بسته** (به طور اختصار غیرزائد باز) است هرگاه برای هر $v \in X$، $N(v) - N[X - \{v\}] \neq \emptyset$.

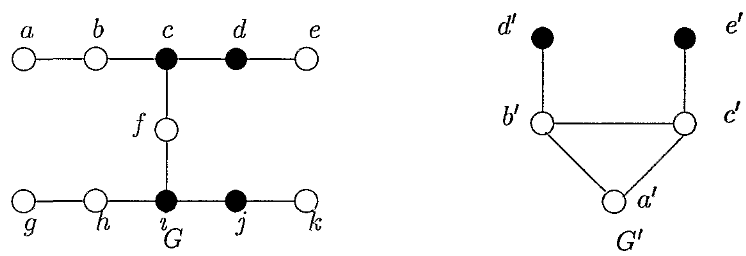
۳) **غیرزائد بسته—باز** است هرگاه برای هر $v \in X$، $N[v] - N(X - \{v\}) \neq \emptyset$.

۴) **غیرزائد باز—باز** است هرگاه برای هر $v \in X$، $N(v) - N(X - \{v\}) \neq \emptyset$.

مثال ۲.۱ در شکل ۲.۱، مجموعهٔ $D = \{c, d, i, j\}$ یک مجموعهٔ غیر زائد باز—باز برای گراف G و مجموعهٔ $D' = \{d', e'\}$ یک مجموعهٔ غیرزائد بسته—بسته برای گراف G' است.

تذکر ۱ پسوند بسته—باز که در انتهای نام مجموعهٔ غیرزائد بسته—باز استفاده شده است، برای این است که اولین همسایگی به کار رفته در تعریف، بسته و دومین همسایگی، باز است.

تعریف ۱۳.۱ برای $v \in X$، رأس t،



شکل ۲.۱: یک مجموعه غیرزائد باز—باز برای G و یک مجموعه غیرزائد برای G'

۱) یک X—**همسایهٔ خصوصی خارجی** از v است هر گاه $t \in V - X$ و $N(t) \cap X = \{v\}$ باشد.

۲) یک X—**همسایهٔ خصوصی داخلی** از v است هر گاه $t \in X$ و $N(t) \cap X = \{v\}$ باشد.

۳) یک X—**همسایهٔ خصوصی شخصی** از v است هر گاه $t = v$ و v در $G[X]$ منفرد باشد.

انواع مجموعه‌های غیرزائد را می‌توان بر حسب وجود همسایه‌های خصوصی، معین کرد.

لم ۱۴.۱

۱) مجموعهٔ $X \subseteq V$، غیرزائد بسته—بسته است اگر و تنها اگر هر $v \in X$، یک X—همسایهٔ خصوصی خارجی یا یک X—همسایهٔ خصوصی شخصی داشته باشد.

۲) مجموعهٔ $X \subseteq V$، غیرزائد باز—بسته است اگر و تنها اگر هر $v \in X$، یک X—همسایهٔ خصوصی خارجی داشته باشد.

۳) مجموعهٔ $X \subseteq V$، غیرزائد بسته—باز است اگر و تنها اگر هر $v \in X$، یک X—همسایهٔ خصوصی خارجی یا یک X—همسایهٔ خصوصی داخلی یا یک X—همسایهٔ خصوصی شخصی داشته باشد.

۴) مجموعهٔ $X \subseteq V$، غیرزائد باز—باز است اگر و تنها اگر هر $v \in X$، یک X—همسایهٔ خصوصی خارجی یا یک X—همسایهٔ خصوصی داخلی داشته باشد.

اثبات: قسمت (۴) را ثابت می‌کنیم، بقیّهٔ قسمت‌ها به طور مشابه به دست می‌آیند. فرض کنیم X، یک مجموعهٔ غیرزائد باز—باز باشد. در این صورت طبق تعریف، برای هر $v \in X$ داریم $N(v) - N(X - \{v\}) \neq \emptyset$، یعنی یک $t \in V$ وجود دارد به طوری که $t \in N(v)$ و $t \notin N(X - \{v\})$، یعنی t فقط با v در X همسایه است و این به این معنی است

که $N(t) \cap X = \{v\}$. اگر $t \in X$ باشد در این صورت، t یک X—همسایهٔ خصوصی داخلی از v است و اگر $t \in V - X$ باشد t یک X—همسایهٔ خصوصی خارجی از v است.
حال فرض کنیم هر $v \in X$، یک X—همسایهٔ خصوصی خارجی یا یک X—همسایهٔ خصوصی داخلی داشته باشد. پس رأس $t \in V$ موجود است که $N(t) \cap X = \{v\}$، یعنی t فقط با v از X همسایه است. در نتیجه $t \in N(v)$ و $t \notin N(X - \{v\})$، پس $t \in N(v) - N(X - \{v\})$ و این نتیجه می‌دهد که X، غیرزائد باز—باز است. □

تعریف ۱.۱۵

۱) کوچکترین اندازهٔ یک مجموعهٔ غیرزائد بسته—بستهٔ ماکسیمال را با $ccir(G)$ نشان می‌دهیم.

۲) کوچکترین اندازهٔ یک مجموعهٔ غیرزائد باز—بستهٔ ماکسیمال را با $ocir(G)$ نشان می‌دهیم.

۳) کوچکترین اندازهٔ یک مجموعهٔ غیرزائد بسته—باز ماکسیمال را با $coir(G)$ نشان می‌دهیم.

۴) کوچکترین اندازهٔ یک مجموعهٔ غیرزائد باز—باز ماکسیمال را با $ooir(G)$ نشان می‌دهیم.

۲.۱ مجموعه‌های غیرزائد و غیرزائد بسته—باز

کوکین، هدتنیمی[1] و میلر[2][۸] مجموعه‌های غیرزائد را بسط داده و قسمت (الف) گزارهٔ زیر را اثبات کرده‌اند و بلوباش و کوکین[۲] قسمت (ب) را ثابت نموده اند.

گزاره ۱.۱۶ الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر D، احاطه‌گر مینیمال است اگر و تنها اگر غیرزائد بسته—بسته و احاطه‌گر باشد.
ب) اگر D، احاطه‌گر مینیمال باشد آنگاه غیرزائد بسته—بستهٔ ماکسیمال است.

همچنین هر مجموعهٔ مستقل ماکسیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است[۱]. بنابراین سه مفهوم احاطه‌گر، مستقل و غیرزائد رابطهٔ بسیار نزدیکی با هم دارند و در هر گراف G، رابطهٔ زیر

Hedetniemi[1]
Miller[2]

برقرار است [۱۴]:

$$ccir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G) \leq CCIR(G).$$

که در این رابطه، $i(G)$ اندازهٔ کوچکترین مجموعهٔ مستقل ماکسیمال، $\alpha(G)$ اندازهٔ بزرگترین مجموعهٔ مستقل، $\Gamma(G)$ اندازهٔ بزرگترین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و $CCIR(G)$ اندازهٔ بزرگترین مجموعهٔ غیرزائد ماکسیمال گراف G است.
کران‌هایی برای $ccir(G)$ و $CCIR$ هم‌بدست آمده‌اند.

گزاره۱.۱۷ [۱۰] فرض کنید G گرافی n رأسی با ماکسیمم درجهٔ Δ باشد. در این صورت داریم:

$$ccir(G) \geq \frac{2n}{3\Delta}.$$

گزاره۱.۱۸ [۱۱] برای هر شبکهٔ مسطح، چنبره‌ای و یا استوانه‌ای G_{mn} داریم:

$$ccir(G_{mn}) \geq \lceil \frac{mn}{5} \rceil.$$

گزاره۱.۱۹ [۳] فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ n با مینیمم درجهٔ δ و ماکسیمم درجهٔ $\Delta > 0$ باشد. در این صورت داریم:

$$CCIR(G) \leq \frac{n}{1+\frac{\delta}{\Delta}}.$$

گزاره۱.۲۰ [۳] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبهٔ n با عدد رنگی χ و ماکسیمم درجهٔ $\Delta \leq 2$ باشد. در این صورت داریم:

$$CCIR(G) - \beta(G) \leq \frac{\Delta - 2}{2\Delta} n.$$

گزاره۱.۲۱ [۳] هر گراف G از مرتبهٔ $n \geq 2$ با عدد رنگی $\chi \geq 2$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$CCIR(G) \leq \frac{\chi - 2}{2\chi} n.$$

بنا به تعاریف قبل، اگر S یک مجموعهٔ غیر زائد باشد آنگاه یک مجموعهٔ غیر زائد بسته—باز است و در نتیجه داریم:

$$coir(G) \leq ccir(G) \leq CCIR(G) \leq COIR(G)$$

که $COIR(G)$، اندازهٔ بزرگترین مجموعهٔ غیرزائد بسته—باز G است.

گزاره۱.۲۲ [۹] برای هر گراف G از مرتبهٔ n داریم:

الف) $COIR(G) + COIR(\overline{G}) \leq n - 2$

ب) $COIR(G)COIR(\overline{G}) \leq \lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \rfloor$.

گزاره۱.۲۳ [۱۳] برای هر گراف G از مرتبهٔ n و ماکسیمم درجهٔ Δ داریم:

$$coir(G) \geq \begin{cases} \frac{n}{2} & \Delta = 2 \\ \frac{4n}{13} & \Delta = 3 \\ \frac{2n}{3\Delta - 3} & \Delta \geq 4 \end{cases}.$$

این مجموعه‌ها به طور مفصل در [۶، ۱۰، ۱۳] بررسی شده‌اند.

طبق لم ۱.۱۴، هر مجموعهٔ غیرزائد باز یک مجموعهٔ غیرزائد باز—باز است. لذا در این پایان‌نامه، ابتدا خصوصیات و نتایج بدست آمده در مورد مجموعه‌های غیرزائد باز را بررسی می‌کنیم و پس از آن به مطالعهٔ مجموعه‌های غیرزائد باز—باز می‌پردازیم.

فصل ۲

مجموعه‌های غیرزائد باز

۱.۲ ویژگی‌هایی از مجموعه‌های غیرزائد باز ماکسیمال

در این فصل، ویژگی‌هایی از مجموعه‌های غیرزائد باز ماکسیمال در هر گراف را بیان می‌کنیم و در انتهای فصل، کرانی برای کوچکترین اندازهٔ این مجموعه‌ها ارائه می‌دهیم[۵].
قبل از ارائهٔ یک شرط لازم و کافی برای ماکسیمال بودن یک مجموعهٔ غیرزائد باز، یک تعریف و یک لم بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ برای هر $u \in X$ فرض می‌کنیم:

$$epn(u, X) = N(u) - N[X - \{u\}].$$

بنابراین طبق تعریف ۱۲.۱، مجموعهٔ $X \subseteq V$ غیرزائد باز است اگر و تنها اگر برای هر $u \in X$، $epn(u, X) \neq \emptyset$ باشد.

لم ۲.۲ فرض کنیم $X \subseteq V$، $u \in X$ و $v \in V - X$ باشد. در این صورت
الف) $epn(v, X \cup \{v\}) = N(v) - N[X]$
ب) $epn(u, X \cup \{v\}) = epn(u, X) - N[v]$.

اثبات: الف)

$$epn(v, X \cup \{v\}) = N(v) - N[X \cup \{v\} - \{v\}]$$

$$= N(v) - N[X].$$