دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تجزیه به زیرمدول های اول فازی

از

عبدالرضا حسنی کندسری

استاد راهنما

دکتر فرهاد درستکار

۱۳ مرداد ماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

تجزیه به زیرمدول های اول فازی

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم که همواره با دعای خیرشان پشتوانه محکم برایم بوده اند.

و

همسر و پسرم ایمان که با صبر خود فداکارانه مرا یاری نمودند.

و

همه کسانی که دوستشان دارم.

تقدیر و تشکر

از زحمات بسیار فراوان استاد محترم جناب آقای دکتر فرهاد درستکار کمال تشکر را دارم. و توفیق روز افزون ایشان را آرزومندم.

با تشکر از آقای دکتر عباسی رئیس دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان که از همکاری و حمایت ایشان بهره مند بودم.

با تشکر فراوان از همه اساتید محترم گروه ریاضی محض و همه عوامل اداری و اجرایی دانشکده های علوم ریاضی و علوم پایه دانشگاه گیلان.

و با تشکر از عوامل کتابخانه دانشکده علوم و کتابخانه مرکزی دانشگاه گیلان.

فهرست

عنوان صفحه

چکیده

فرض کنید که L یک شبکه کامل و R یک حلقه جابجایی با یکه و M یک R ـ مدول باشد. در این پایان نامه به مطالعه L ـ زیر مدول اول و برخی از خواص آن را خواهیم پرداخت. همچنین تجزیه اول فازی نرمال و برخی از نتایج مربوط به آن را مطالعه می کنیم.

کلید واژه ها: شبکه کامل، L ـ زیر مدول، L ـ زیر مدول اول، L ـ ایده آل، L ـ ایده آل اول، L ـ زیر مدول اولیه، زیر مدول فازی، زیر مدول اول فازی، ایده آل فازی، ایده آل اول فازی، تجزیه.

Abstract

Let L be a complete lattice, R be a commutative ring with identity and let M be an R-module. In this discretion, we study the prime L-submodule of M and we see some related results about it. Also we study normal fuzzy prime decomposition and some related results.

***Keywrds*:** Complete lattice, L-submodule, prime L-submodule, L-ideal, prime L- ideal, primary L-submodule, fuzzy submodule, fuzzy prime submodule, fuzzy ideal, fuzzy prime ideal, decomposition.

پیش گفتار

نظریه فازی اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط *Lotfi zadeh* در مقاله ای تحت عنوان «مجموعه های فازی» معرفی گردید. *Lotfi zadeh* در این نظریه، زیر مجموعه فازی μ از یک مجموعهٔ غیر تهی X را به عنوان یک تابع از X به بازه $[0,1]$ معرفی کرد. این مقاله بینش جدیدی در حوزه وسیعی از زمینه های علمی باز نمود[18]. در سال ۱۹۶۷ *J. A. Goguen* مفهوم زیر مجموعه فازی μ از X را به زیر مجموعه های L ـ فازی از X تعمیم داد. که در آن L یک شبکه کامل است[5]. در سال ۱۹۷۱ *Azriel Rosenfeld* با استفاده از نظریه زیر مجموعه فازی مقاله های بنیادی زیادی را در زمینه های مختلف ریاضیات از جمله روی ساختارهای جبری ارائه کرد. در واقع *Rosenfeld* را پدر جبر فازی می نامند [15] . در سال ۱۹۸۲و۱۹۸۳ *W. J. Liu* مفهوم ایده آل فازی از یک حلقه را معرفی و بررسی کرد[7,8]. و بعد از آن چندین محقق دیگر نتایج جالبی روی ایده آل های L ـ فازی از حلقه R و مدول L ـ فازی به دست آوردند. نظریه زیر مدول های فازی از یک R ـ مدول M نخستین بار توسط *Negoita* و *Ralescu* مطرح گردید[13]. *Sidky* نظریه رادیکال زیر مدول های فازی را تحت عنوان مقاله ای مطرح نمود و تعریفی از زیر مدول های اولیه فازی ارائه داد و بسیاری از خواص آن را بررسی کرد . اخیراً نظریه زیر مدول های اول فازی و توپولوژی زاریسکی روی مجموعهٔ زیر مدول های اول از یک R ـ مدول M توسط بعضی از مؤلفان و نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته است. در ایران نیز دکتر رضا عامری محقق و پژوهشگری است که در زمینه جبر فازی بسیار فعال می باشد.[3,9,10,16,17].

ما در این پایان نامه قصد داریم L ـ زیر مدول های اول از یک R ـ مدول M را مطرح و ارتباط آن را با L ـ ایده آل های اول از حلقه جا بجایی و با یکه R را بررسی کنیم. ودر این بررسی از نظریه L ـ زیر مدول های اول، L ـ ایده آل های اول و L ـ خارج قسمت های مانده ای استفاده خواهیم کرد. ثابت می کنیم که اگر μ یک L ـ زیر مدول اول از یک R- مدول M و ν یک L ـ زیر مدول از M باشد به طوری که $\mu:\nu \neq 1_R$ آنگاه $\mu:\nu$ یک L ـ ایده آل اول از R است. و نیز بررسی خواهیم کرد که اگر f اپیمورفیسمی از R- مدول M به R ـ مدول N و μ یک L ـ زیر مدول اول از M باشد به طوری که f ـ پایا باشد آنگاه $\mu: 1_{\mathrm{M}} = f(\mu): 1_{\mathrm{N}}$ و تمام مطالب ذکر شده را به صورت فازی نتیجه می گیریم و نشان می دهیم که اشتراک متناهی از زیر مدول های اول فازی از M، زیر مدول اول فازی از M است. و سرانجام تجزیه اول فازی، تجزیه اول فازی غیر زائد و تجزیه اول فازی نرمال برای زیر مدول های فازی را تعریف و قضایایی مربوط به آن ها را مطرح و اثبات خواهیم کرد . درتنظیم این پایان نامه از منابع [3]، [4]، [6] و [13] استفاده گردیده است.

فصل صفر

مقدمه

تعریف ۰-۱- فرض کنید A یک مجموعه ناتهی باشد، رابطه $\leq$ را یک **ترتیب جزیی** روی A نامیم اگر در سه شرط زیر صدق کند

الف- بازتابی باشد. یعنی به ازای هر $a \in A$، $a \leq a$.

ب- پاد تقارنی باشد. یعنی برای $a, b \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$.

ج- متعدی باشد. یعنی برای $a, b, c \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$.

اگر $\leq$ یک ترتیب جزیی روی A باشد گوییم $(A, \leq)$ یک **مجموعه مرتب جزیی** است.

تعریف ۰-۲- اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد، عضو های $a, b \in A$ را **مقایسه پذیر** گوییم هرگاه $a \leq b$ یا $b \leq a$.(دو عضو یک مجموعه مرتب جزیی لزوماً مقایسه پذیر نیستند.)

تعریف ۰-۳- اگر هر دو عضو یک مجموعه مرتب جزیی $(A, \leq)$ مقایسه پذیر باشند، آنگاه به A یک **مجموعه مرتب کلی** گوییم.

تعریف ۰-۴- مجموعه مرتب جزیی $(A, \leq)$ را یک **شبکه** گوییم هرگاه به ازای هر $a, b \in A$، مجموعه $\{a, b\}$ دارای بزرگ ترین کران پایین یا اینفیمموم(***inf***) و کوچک ترین کران بالا یا سوپریمم(***sup***) باشد.

تعریف ۰- ۵- شبکه $(A, \leq)$ را **کامل** گوییم اگر هر زیر مجموعهٔ ناتهی A، دارای inf و sup باشد.

قرارداد ۰-۶- ما در این پایان نامه از نماد $\wedge$ برای نمایش inf و از نماد $\vee$ برای نمایش sup استفاده می کنیم به طوری که

$$x \vee y = sup\{x, y\} \quad \text{و} \quad x \wedge y = inf\{x, y\}$$

تعریف ۰-۷- یک شبکه کامل L را یک شبکه کامل جبری **هیتینگ** گوییم هرگاه برای هر $A \subseteq L$ و برای هر $b \in L$ داشته باشیم

$$\vee\{a \wedge b | a \in A\} = (\vee\{a | a \in A\}) \wedge b \quad \text{و} \quad \wedge\{a \vee b | a \in A\} = (\wedge\{a | a \in A\}) \vee b$$

و در این پایان نامه همواره L نشان دهنده یک شبکه کامل جبری هیتینگ با حداقل دو عضو است مگر خلاف آن بیان شود.

تعریف ۰-۸- فرض کنید $(L,\leq)$ یک شبکه کامل باشد. در این صورت sup و inf مجموعه L را به ترتیب با نماد 1 و 0 نشان می دهیم.

مثال ۰- ۹- فرض کنید A یک مجموعه و $P(A)$ مجموعه توانی آن باشد. رابطه $\leq$ در $P(A)$ را چنین تعریف می کنیم

$$C \leq D \Leftrightarrow C \subseteq D$$

در این صورت واضح است که $(P(A),\leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی است و نیز برای هر $C,D \in P(A)$ داریم

$$inf\{C,D\} = C \wedge D = C \cap D \qquad \text{و} \qquad sup\{C,D\} = C \vee D = C \cup D$$

و همچنین

$$infP(A) = \bigcap_{C\subseteq A} C = \emptyset = 0 \qquad \text{و} \qquad supP(A) = \bigcup_{C\subseteq A} C = A = 1.$$

مثال ۰- ۱۰- در $([0,1],\leq)$، عدد صفر بازه برابر inf و عدد یک بازه برابر sup می باشد.

تعریف ۰- ۱۱- اگر L یک شبکه کامل باشد، $c \in L \setminus \{1\}$ را

الف- **عضو اول** از L گوییم هرگاه برای هر $a,b \in L$ اگر $a \wedge b \leq c$ آنگاه $a \leq c$ یا $b \leq c$.

ب- **عضو ماکسیمال** L گوییم هرگاه $a \in L \setminus \{1\}$ که $c < a < 1$ موجود نباشد.

تعریف ۰- ۱۲- یک **حلقه** مجموعه ای است ناتهی مانند R همراه با دو عمل دوتایی جمع$(+)$ و ضرب$(\cdot)$ که آن را با نماد $(R\ ,+\ ,\ .)$ نمایش می دهند، به طوری که

الف- $(R\ ,+)$ یک گروه آبلی باشد.

ب- نسبت به عمل ضرب شرکت پذیر باشد. یعنی به ازای هر $a,b,c \in R$، $(a\ .b).c = a\ .(b.c)$.

ج- عمل ضرب نسبت به عمل جمع از چپ و راست توزیع پذیر باشد. یعنی به ازای هر $a,b,c \in R$ داشته باشیم

$$(a+b).c = a.c + b.c \qquad \text{و} \qquad a\ .(b+c) = a\ .b + a\ .c$$

و نیز گوییم R یک حلقهٔ تعویض پذیر یا جابجایی است هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم

$$a \,.\, b = b.\, a$$

و همچنین گوییم R یک حلقهٔ با یکه یا یکدار است هرگاه R شامل عنصری مانند 1_R باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$،

$$1_R.\, a = a \,.\, 1_R = a$$

1_R را **یک حلقه** گوییم.

قرارداد ۰-۱۳- ضرب $a.\, b$ را با نماد ab نشان می دهیم.

تعریف ۰-۱۴- فرض کنید R یک حلقه و S زیر مجموعه ای ناتهی از R باشد که تحت اعمال جمع و ضرب در R بسته است. هرگاه S خود حلقه ای تحت این اعمال باشد، آنگاه S را یک **زیر حلقهٔ** R می نامیم. در این صورت

الف - زیر حلقهٔ I از حلقهٔ R را یک **ایده آل چپ** گوییم هرگاه به ازای هر $x \in I$ و $r \in R$، $rx \in I$.

ب - زیر حلقهٔ I از حلقهٔ R را یک **ایده آل راست** گوییم هرگاه به ازای هر $x \in I$ و $r \in R$، $xr \in I$.

ج - زیر حلقهٔ I از حلقهٔ R را یک **ایده آل** گوییم هرگاه هم ایدآل چپ و هم ایده آل راست باشد.

تعریف ۰-۱۵ - ایده آل P را یک **ایده آل اول** R گوییم هرگاه $P \neq R$ و به ازای هر دو ایده آل J و I در R اگر $IJ \subset P$ آنگاه $I \subset P$ یا $J \subset P$.

نکته ۰-۱۶- ایده آل سره P از حلقهٔ جابجایی R یک **ایده آل اول** است اگر و تنها اگر برای $a, b \in R$ از $ab \in P$ نتیجه شود که $a \in P$ یا $b \in P$.

تعریف ۰- ۱۷- فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی و I یک ایده آل از آن باشد. اگر $V(I)$ مجموعهٔ تمام ایده آل های اول R و شامل I باشد، **رادیکال** I را با نماد $\sqrt{I}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$$

قضیه [۱] **۰- ۱۸** - اگر R یک حلقهٔ جابجایی و I یک ایده آل از R باشد آنگاه

$$\sqrt{I} = \{r \in R | \exists n \in \mathbb{N};\ r^n \in I\}$$

تعریف ۰- ۱۹- ایده آل $\underline{m}$ در حلقهٔ R را **ماکسیمال** گوییم اگر $\underline{m} \neq R$ و به ازای هر ایده آل I که $\underline{m} \subset I \subset R$، داشته باشیم

$$I = R \quad \text{یا} \quad I = \underline{m}$$

قضیه ۰- ۲۰- فرض کنید R یگ حلقهٔ جابجایی و با یکه باشد. اگر P یک ایده آل از R باشد که در مجموعه تمام ایده آل های R که با تولید متناهی نیستند ماکسیمال باشد آنگاه P یک ایده آل اول است[۲].

تعریف ۰- ۲۱- یک ایده آل سره Q از حلقهٔ جابجایی R را **اولیه** گوییم هرگاه به ازای هر $a, b \in R$، $ab \in Q$ ایجاب کند که $a \in Q$ یا به ازای یک $n \in \mathbb{N}$، $b^n \in Q$.

یا به طور معادل یک ایده آل سره Q از حلقهٔ جابجایی R را **اولیه** گوییم هرگاه

$$\forall a, b \in R:\ ab \in Q \Longrightarrow a \in Q \ \text{یا}\ b \in \sqrt{Q}\ .$$

قضیه و تعریف ۰- ۲۲- اگر Q یک ایده آل اولیه از حلقهٔ جابجایی R را باشد آنگاه $P = \sqrt{Q}$ یک ایده آل اول است. در این صورت Q را یک ایده آل P _ اولیه گوییم[۱].

قضیه ۰- ۲۳- فرض کنید Q یک ایده آل از حلقهٔ جابجایی و با یکه R باشد. اگر $\sqrt{Q}$ یک ایده آل ماکسیمال از R باشد آنگاه Q یک ایده آل اولیه است[۱].

تعریف ۰-۲۴- فرض کنید I یک ایده آل سره از حلقهٔ جابجایی R باشد. گوییم ایده آل I دارای یک **تجزیه اولیه** است اگر ایده آل های اولیه Q_1 و Q_2 و ... و Q_n چنان موجود باشند که

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n\ .$$

تعریف ۰-۲۵- تجزیه اولیه $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ را یک **تجزیه اولیه مینیمال** برای ایده آل I گوییم اگر

الف- برای هر $1 \leq i \leq n$، $Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \dots \cap Q_n \nsubseteq Q_i$

ب- $P_i = \sqrt{Q_i}$ ها ایده آل های اول متمایز R باشند.

تعریف ۰- ۲۶- فرض کنید I یک ایده آل سره از حلقهٔ جابجایی R باشد. ایده آل I را **تحویل ناپذیر** گوییم اگر I برابر

اشتراک دو ایده آل اکیداً بزرگتر از خودش نباشد. یعنی اگر J و K دو ایده آل R باشند که $I = J \cap K$ آنگاه

$$I = J \qquad \text{یا} \qquad I = K$$

تعریف ۰- ۲۷- فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی و با یکه باشد. مجموعهٔ غیر تهی M را یک **R _ مدول یکانی** گوییم هرگاه M یک گروه آبلی و جمعی بوده و مجهز به نگاشتی چون $R \times M \longrightarrow M$ چنان باشد که به ازای هر $r, r' \in R$ و $m, m' \in M$ داشته باشیم

الف- $r.(m + m') = r.m + r.m'$

ب- $(r + r').m = r.m + r'm$

ج- $(rr').m = r.(r'.m)$

د- $1_R.m = m$

تعریف ۰-۲۸- فرض کنید M مدولی روی حلقه جابجایی R و N زیر مجموعه ای از M باشد. گوییم N **زیر مدول** M است اگر خود با عمل های M یک R _ مدول باشد.

لم[۱] **۰-۲۹**- فرض کنید M مدولی روی حلقه جابجایی R و N زیر مجموعه غیر تهی از M باشد. گوییم N زیرمدول M است اگر و تنها اگر به ازای هر $n, n' \in N$ و $r, r' \in R$، $rn + r'n' \in N$.

تعریف ۰- ۳۰- فرض کنید M مدولی روی حلقه جابجایی R و N زیر مدولی از M باشد و $K \subseteq M$ و $K \neq \emptyset$. ایده آل

$$\{r \in R | \mathrm{r}K \subseteq N\}$$

از R را با نماد $N:_R K$ نمایش می دهیم.

تعریف ۰- ۳۱- فرض کنید M مدولی روی حلقه جابجایی و با یکه R و N زیر مدولی از M باشد در این صورت

الف- N را یک **زیر مدول اول** از M گوییم هرگاه به ازای $r \in R$ و $x \in M$ از $rx \in N$ نتیجه شود که

$$rM \subseteq N \quad \text{یا} \quad x \in N \ .$$

ب- N را یک **زیر مدول اولیه** از M گوییم هرگاه به ازای $r \in R$ و $x \in M$ از $rx \in N$ نتیجه شود که $x \in N$ یا $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $r^n M \subseteq N$.

به عبارتی زیر مدول N از M را **اول** گوییم هرگاه به ازای هر $r \in R$ و $x \in M$ که $rx \in N$ نتیجه شود

$$x \in N \quad \text{یا} \quad r \in N:M.$$

و N را **اولیه** گوییم هرگاه به ازای هر $r \in R$ و $x \in M$ که $rx \in N$ نتیجه شود

$$x \in N \quad \text{یا} \quad r \in \sqrt{N:M}.$$

نتیجه ۰- ۳۲- هر زیر مدول اول، یک زیر مدول اولیه است.

قضیه ۰-۳۳- اگر M مدولی روی حلقه جابجایی و با یکه R و N زیر مدول اول از M باشد آنگاه $N:M$ ایده آل اول از R است [12].

قضیه و تعریف ۰-۳۴- فرض کنید M مدولی روی حلقه جابجایی و با یکه R و N زیر مدول اولیه از M باشد در این صورت $N:M$ یک ایده آل اولیه و $P = \sqrt{N:M}$ یک ایده آل اول از R است. در این صورت N را یک P ـ زیر مدول اولیه از M گوییم[۲].

تجزیه اولیه و تجزیه اولیه مینیمال زیر مدول۰-۳۵- فرض کنید M مدولی روی حلقه جابجایی و با یکه R و N زیر مدول سره از M باشد در این صورت تجزیه اولیه N در M عبارت است از اشتراک تعدادی متناهی از زیر مدول های اولیهٔ M که برابر N باشد. یعنی $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ که Q_1 و Q_2 و ... و Q_n در M، P_i ـ زیر مدول اولیه هستند. همچنین تجزیه اولیه $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ را مینیمال گوییم هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم

الف- $Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \dots \cap Q_n \nsubseteq Q_i$

ب- $P_i = \sqrt{Q_i}$ ها زیر مدول های اول متمایز R باشند.

فصل ۱

L _ زیر مجموعه

❋ در این پایان نامه همواره R یک حلقه جابجایی با یکه و M یک R_مدول یکانی است.

تعریف ۱-۱- اگر L یک شبکه کامل و X یک مجموعهٔ غیر تهی باشد، آنگاه هر تابع $\mu : X \longrightarrow L$ را یک **L _ زیر مجموعه** از X گوییم. اگر $L = [0\,, 1]$ باشد، آنگاه μ را یک **زیر مجموعه فازی** از X می نامیم. مجموعهٔ تمام L _ زیر مجموعه های X را با نماد L^X نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۲- فرض کنید $A \subseteq X$ و $y \in L$، در این صورت $y_A \in L^X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$y_A(x) = \begin{cases} y & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

در حالت خاص اگر $A = \{a\}$ باشد، y_A را با نماد a_y نمایش داده و آن را یک **L _ نقطه** از X گوییم. بنابراین

$$a_y(x) = \begin{cases} y & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

تعریف ۱-۳- فرض کنید $\nu \in L^X$ و μ. در این صورت گوییم μ **مشمول** در ν است و می نویسیم $\mu \subseteq \nu$ اگر برای هر $x \in X$،

$$\mu(x) \leq \nu(x)$$

تبصره ۱-۴- اگر $\mu : X \longrightarrow L$ یک L _ زیر مجموعه از X باشد به طوری که $a \in X$، $y \in L$ و $\mu(a) = y$ آنگاه $a_y \subseteq \mu$ و می نویسیم $a_y \in \mu$.

تعریف ۱-۵- برای $\mu\,, \nu \in L^X$ **اجتماع** $\mu \cup \nu \in L^X$ و **اشتراک** $\mu \cap \nu \in L^X$ را برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\big(\mu \cup \nu\big)(x) = \mu\,(x) \vee \nu(x)$$

و

$$\big(\mu \cap \nu\big)(x) = \mu\,(x) \wedge \nu(x)$$

تعریف اجتماع و اشتراک L _ زیر مجموعه ها را می توان به صورت زیر تعمیم داد

$$\bigcap_{i\in I} \mu_i\,(x) = \bigwedge_{i\in I} \mu_i(x) \quad \text{و} \quad \bigcup_{i\in I} \mu_i\,(x) = \bigvee_{i\in I} \mu_i\,(x)$$

که در آن I مجموعه اندیس گذار است.

به خصوص اگر $I = \{1, \dots, n\}$ آنگاه

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mu_i\,(x) = \bigvee_{i=1}^{n} \mu_i(x) = \mu_1(x) \vee \mu_2(x) \vee \dots \vee \mu_n(x)$$

و

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_i(x) = \mu_1(x) \wedge \mu_2(x) \wedge \dots \wedge \mu_n(x)$$

تعریف ۱-۶- برای $\mu \in L^X$ و $a \in \mathrm{L}$، μ_a تعریف شده با $\mu_a = \{x \in X | \mu\,(x) \geq a\}$ را یک **برش** a تحت μ یا یک زیر مجموعه **a ـ برش** یا **a ـ تراز** از μ گوییم.

قضیه ۱-۷- فرض کنید $\mu\,, \nu \in L^X$. در این صورت

الف- اگر $\mu \subseteq \nu$ آنگاه به ازای هر $a \in \mathrm{L}$، $\mu_a \subseteq \nu_a$

ب- اگر $a, b \in \mathrm{L}$ و $a \leq b$ آنگاه $\mu_b \subseteq \mu_a$

ج- $\mu = \nu$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in \mathrm{L}$، $\mu_a = \nu_a$.

اثبات: الف- فرض کنید $x \in \mu_a$ دلخواه باشد لذا $\mu\,(x) \geq a$ و چون $\mu \subseteq \nu$ پس $\mu(x) \leq \nu(x)$ و $\nu\,(x) \geq a$. در نتیجه $x \in \nu_a$ و این نشان می دهد که $\mu_a \subseteq \nu_a$.

ب- فرض کنید $x \in \mu_b$ دلخواه باشد، لذا $\mu\,(x) \geq b$. چون $a \leq b$ پس $\mu\,(x) \geq a$. در نتیجه $x \in \mu_a$. از این رو $\mu_b \subseteq \mu_a$.

ج- فرض کنید $\mu = \nu$، لذا با توجه به قسمت (الف)، به ازای هر $a \in \mathrm{L}$، $\mu_a \subseteq \nu_a$ و $\nu_a \subseteq \mu_a$. و این نشان می دهد $\mu_a = \nu_a$.

بالعکس، فرض کنید به ازای هر $a \in \mathrm{L}$، $\mu_a = \nu_a$ و فرض کنید $t \in X$ دلخواه باشد و $\mu(t) = b$ در این صورت $t \in \mu_b = \{x \in X | \mu\,(x) \geq b\}$ و چون $\mu_b = \nu_b$ در نتیجه $t \in \nu_b$ یعنی $t \in \nu_b = \{x \in X | \nu\,(x) \geq b\}$ بنابراین $\nu\,(t) \geq b = \mu(t)$. و به طریق مشابه ثابت می شود که $\mu\,(t) \geq \nu(t)$. در نتیجه به ازای هر $t \in X$، $\mu\,(t) = \nu(t)$. و این نشان می دهد که $\mu = \nu$ ■

قضیه ۱-۸- فرض کنید $\{\mu_i | i \in I\} \subseteq \mathrm{L}^X$ خانواده ای از L ـ زیر مجموعه های X باشد. در این صورت به ازای هر $a \in \mathrm{L}$ داریم

الف- $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$

ب- $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a = (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$

ج- وقتی L یک زنجیر متناهی باشد تساوی در (الف) برقرار است.

اثبات: الف- فرض کنید $x \in \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a$ دلخواه باشد، بنابراین به ازای یک $i \in I$، $x \in (\mu_i)_a$. لذا $\mu_i(x) \geq a$ و با توجه به تعریف اجتماع L _ زیر مجموعه ها نتیجه می شودکه $\bigcup_{i\in I}\mu_i(x) \geq a$ و این نشان می دهدکه $x \in (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$ از این رو $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$.

ب- اگر $x \in \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a$ دلخواه باشد آنگاه به ازای هر $i \in I$، $x \in (\mu_i)_a$ در نتیجه $\mu_i(x) \geq a$ و با توجه به تعریف اشتراک L _ زیر مجموعه ها $\bigcap_{i\in I}\mu_i(x) \geq a$ و این نشان می دهد که $x \in (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$

حال فرض کنید $x \in (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$ دلخواه باشد، پس $\bigcap_{i\in I}\mu_i(x) \geq a$. بنابراین به ازای هر $i \in I$، $\mu_i(x) \geq a$. به عبارتی به ازای هر $i \in I$، $x \in (\mu_i)_a$ و با توجه به تعریف اشتراک L _ زیر مجموعه ها $x \in \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a$. و این نشان می دهد که $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a = (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$.

ج- فرض کنید به ازای $n \in \mathbb{N}$، $L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ باشد، بنابراین می توان a_i ها را به صورت $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ در نظر گرفت. فرض کنید $x \in (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_{a_j}$ که $1 \leq j \leq n$. بنابراین به ازای هر $1 \leq j \leq n$، $\bigcup_{i\in I}\mu_i(x) \geq a_j$. لذا یک $i \in I$ چنان موجود است که $\mu_i(x) \geq a_j$. یعنی $x \in (\mu_i)_{a_j}$ و در نتیجه $x \in \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_{a_j}$ از این رو $(\bigcup_{i\in I}\mu_i)_{a_j} \subseteq \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_{a_j}$. و با توجه به قسمت (الف) داریم $(\bigcup_{i\in I}\mu_i)_{a_j} = \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_{a_j}$. ■

تعریف ۱-۹- فرض کنید f یک نگاشت از X به Y باشد. اگر $\mu \in L^X$ و $\nu \in L^Y$. $f(\mu)$ و $f^{-1}(\nu)$ به صورت زیر تعریف می شوند

الف- برای هر $y \in Y$،

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee\{\mu(x) \mid x \in f^{-1}(y)\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

و داریم $f(\mu) \in L^Y$.

ب- برای هر $x \in X$،

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$$

و داریم $f^{-1}(\nu) \in L^X$.

تعریف ۱-۱۰- فرض کنید $\mu,\nu \in L^R$ ، در این صورت به ازای هر $x \in R$،

$$(\mu\,.\,\nu)(x) = \vee\left\{\mu(y) \wedge \nu(z)\middle| y,z \in R \text{ و } x = yz\right\}$$

قرارداد ۱- ۱۱- از این به بعد به جای نماد $\mu\,.\,\nu$، از نماد $\mu\nu$ استفاده می کنیم.

قضیه (ر.ک.[13, 3.1.4]) **۱-۱۲-** فرض کنید $\mu,\nu,\xi \in L^R$. در این صورت

الف-اگر $\nu \subseteq \xi$، آنگاه $\nu\mu \subseteq \xi\mu$

ب- $(\nu\mu)\xi = \mu(\nu\xi)$

ج- $\mu \subseteq \nu\mu$

د- $1_R.\,\mu \subseteq \mu$.

تعریف ۱-۱۳- فرض کنید $\xi \in L^R$ و $\mu \in L^M$. در این صورت $\xi\,\mu \in L^M$ را برای هر $x \in M$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(\xi\,\mu)(x) = \vee\{\xi(r) \wedge \mu(y) | r \in R\,, y \in M\,, x = ry\}$$

تعریف ۱-۱۴- فرض کنید $\mu \in L^R$. رادیکال μ را با نماد $\mathcal{R}(\mu)$ نمایش داده و برای هر $x \in R$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathcal{R}(\mu)(x) = \vee_{n\in\mathbb{N}}\,\mu(x^n)$$

با توجه به تعریف فوق واضح است که $\mu \subseteq \mathcal{R}(\mu)$.

تعریف ۱-۱۵- برای $\mu,\nu \in L^M$ و $\xi \in L^R$. $\mu{:}\,\nu \in L^R$ و $\mu{:}\,\xi \in L^M$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mu{:}\,\nu = \cup\{\eta \in L^R | \eta.\,\nu \subseteq \mu\}$$

$$\mu{:}\,\xi = \cup\{\nu \in L^M | \xi.\,\nu \subseteq \mu\}$$

قضیه ۱-۱۶- فرض کنید $\mu,\nu \in L^M$ و $\xi \in L^R$. آنگاه

الف- $(\mu{:}\,\nu)\nu \subseteq \mu$

ب- $\xi(\mu{:}\,\xi) \subseteq \mu$

ج- $\xi\nu \subseteq \mu \Leftrightarrow \xi \subseteq \mu{:}\,\nu \Leftrightarrow \nu \subseteq \mu{:}\,\xi$.

اثبات: الف- به ازای هر $x \in M$ داریم

$$\left((\mu{:}\,\nu)\nu\right)(x) = \vee\left\{(\mu{:}\,\nu)(r) \wedge \nu(y) \middle| r \in R, y \in M, x = ry\right\}$$

$$= \vee\left\{\left(\vee\left\{\eta(r) \middle| \eta \in L^R, \eta\nu \subseteq \mu\right\}\right) \wedge \nu(y) \middle| r \in R, y \in M, x = ry\right\}$$

$$= \vee\left\{\eta(r) \wedge \nu(y) \middle| \eta \in L^R, r \in R, y \in M, x = ry, \eta\nu \subseteq \mu\right\}$$

$$\leq \vee\left\{(\eta\nu)(ry) \middle| \eta \in L^R, r \in R, y \in M, x = ry, \eta\nu \subseteq \mu\right\}$$

$$\leq \vee\left\{\mu(x) \middle| \eta \in L^R, r \in R, y \in M, x = ry, \eta\nu \subseteq \mu\right\}$$

$$= \mu(x)$$

ب- به ازای هر $x \in M$ داریم

$$(\xi(\mu{:}\,\xi))(x) = \vee\left\{\xi(r) \wedge (\mu{:}\,\xi)(y) \middle| r \in R, y \in M, x = ry\right\}$$

$$= \vee\left\{\xi(r) \wedge \left(\vee\left\{\nu(y) \middle| \nu \in L^M, \xi\nu \subseteq \mu\right\}\right) \middle| r \in R, y \in M, x = ry\right\}$$

$$= \vee\left\{\xi(r) \wedge \nu(y) \middle| \nu \in L^M, r \in R, y \in M, x = ry, \xi\nu \subseteq \mu\right\}$$

$$\leq \vee\left\{(\xi\nu)(ry) \middle| \nu \in L^M, r \in R, y \in M, x = ry, \xi\nu \subseteq \mu\right\}$$

$$\leq \vee\left\{\mu(x) \middle| \nu \in L^M, r \in R, y \in M, x = ry, \xi\nu \subseteq \mu\right\}$$

$$= \mu(x)$$

ج- باتوجه به تعریف (۱- ۱۵) واضح است.■

قضیه ۱-۱۷- فرض کنید $\xi \in L^R$، $\nu \in L^M$ و $\{\mu_i \mid i \in I\}$ یک خانواده از عضوهای L^M باشد. در این صورت

الف- $(\bigcap_{i\in I}\mu_i){:}\,\nu = \bigcap_{i\in I}(\mu_i{:}\,\nu)$

ب- $(\bigcap_{i\in I}\mu_i){:}\,\xi = \bigcap_{i\in I}(\mu_i{:}\,\xi)$.

اثبات: الف-

$$(\bigcap_{i\in I}\mu_i){:}\,\nu = \cup\left\{\eta \in L^R \middle| \eta.\nu \subseteq (\bigcap_{i\in I}\mu_i)\right\}$$