چکیده:

در این پایان نامه، به شبیه سازی معادلات انفجاری انتشار واکنش با جملات سراسری غیر خطی مکانی و زمانی توسط روش حرکت شبکه پرداخته می شود. روش حل به روش حرکت شبکه ایستا می باشد به این صورت که معادله فیزیکی تبدیل یافته و معادله حرکت شبکه متناوبا بوسیله روشهای تفاضل متناهی حل می شوند. معادله فیزیکی تبدیل یافته همان معادله فیزیکی است که توسط یک تبدیل وابسته به زمان به فرم لاگرانژی نسبت به متغیرهای محاسباتی نوشته می شود. هم چنین تحلیل بعدی معادله فیزیکی و معادله حرکت شبکه یک شرط کافی برای غلبه هم توزیعی نتیجه می دهد بطوری که از این شرط برای تعیین دقیق تر تابع نشانگر موجود در معادله حرکت شبکه استفاده شده است.

واژگان کلیدی :

معادلات انتشار واکنش سراسری، انفجار، روش حرکت شبکه، غلبه هم توزیعی.

Abstract

In this thesis, simulating the blowup in reaction diffusion equations with temporal and spacial nonlinear nonlocal terms is done by moving mesh method. The method of solution is static moving mesh method such that the transformed physical equation and moving mesh equation are solved alternately by finite difference methods. The transformed physical equation is the same physical equation that is wrote into lagrangian form with respect to the computational variables by a time-dipendent transformation. Also dimensional analysis on the physical equation and moving mesh equation concludes a sufficient condition for dominance of equidistribution such that, this condition is used to determine the monitor function in the moving mesh equation exactly.

Key words:

Nonlocal Reaction- Diffusion Equations, Blowup, Moving Mesh Method, Dominance of Equidistribution.

دانشگاه سیستان وبلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان:

شبیه سازی عددی معادلات انفجاری انتشار—واکنش سراسری توسط روش حرکت شبکه

اساتید راهنما:

دکتر علیرضاسهیلی
دکتر مریم عرب عامری

تحقیق و نگارش:

مریم دهقانی

شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه، به شبیه سازی معادلات انفجاری انتشار واکنش با جملات سراسری غیر خطی مکانی و زمانی توسط روش حرکت شبکه پرداخته می شود. روش حل به روش حرکت شبکهٔ ایستا می باشد به این صورت که معادله فیزیکی تبدیل یافته و معادله حرکت شبکه متناوباً بوسیله روشهای تفاضل متناهی حل می شوند. معادله فیزیکی تبدیل یافته همان معادله فیزیکی است که توسط یک تبدیل وابسته به زمان به فرم لاگرانژی نسبت به متغیرهای محاسباتی نوشته می شود. هم چنین تحلیل بعدی معادله فیزیکی و معادله حرکت شبکه یک شرط کافی برای غلبه هم توزیعی نتیجه می دهد بطوری که از این شرط برای تعیین دقیق تر تابع نشانگر موجود در معادله حرکت شبکه استفاده شده است.

واژه های کلیدی:

معادلات انتشار واکنش سراسری، انفجار، روش حرکت شبکه، غلبه هم توزیعی.

پیشگفتار

بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که از علوم و مهندسی ناشی می شوند، دارای این ویژگی هستند که جواب در بخش هایی از دامنه فیزیکی آنها تغییرات سریع و ناگهانی دارد، بنابراین استفاده از شبکه یکنواخت برای حل عددی این مسائل به خاطر رفتار جواب با شکست مواجه می شود. یکی از روشهایی که منجر به بهبود دقت در جواب می شود، استفاده از شبکه های متحرک است. استفاده از یک شبکه متحرک نسبت به یک شبکه ثابت کارایی بهتری دارد و باعث افزایش دقت می شود.

در این روش، تعداد کل گره ها ثابت است و گره ها هر زمان و هر کجا که لازم باشند دوباره توزیع می شوند.

در واقع به منظور بهبود دقت، نقاط بیشتری از شبکه در نواحی که جواب دارای تغییرات سریع است توزیع می گردد و در مقابل به منظور بهبود کارایی روش، تعداد نقاط کمتری از شبکه در نواحی هموارتر قرار می گیرد [٦].

کلید موفقیت روش های حرکت شبکه این است که این روش ها با ساختن یک تبدیل بین یک شبکهٔ ثابت یکنواخت روی یک دامنه کمکی (دامنه محاسباتی) و یک شبکه غیر یکنواخت (دامنه فیزیکی)، نقاط شبکهٔ اولیه را با استفاده از تابع نشانگر حرکت می دهند. برای تعریف این تبدیل روش های متفاوتی در نظر گرفته می شود.

از جملهٔ این روش ها، روش هایی هستند که بر اساس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت شبکه ساخته می شوند [١١]، که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان طراحی شده اند. در این روش، معادلات دیفرانسیل حرکت شبکه بر اساس اصل هم توزیعی سبب می شوند که شبکه، یک تابع نشانگر را در زمان واحد به طور مساوی توزیع کند، در واقع، در این روش نقاط شبکه به طور پیوسته به وسیله یک معادله حرکت شبکه حرکت داده می شوند.

ایده روش حرکت شبکه از اصل هم توزیعی ناشی می شود [٨]. شکل پیوسته اصل هم توزیعی در [١١] بکار گرفته شده است که معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت شبکه از این اصل نتیجه شده اند و مورد استفاده قرار گرفتند.

روش های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت شبکه، بطور گسترده ای در حل مسائل انفجاری بکار گرفته شده اند و موفق بوده اند [۷, ۱۰, ۱۴, ۱۷].

باد [1] و همکارانش در [۷] نشان دادند که کلید موفقیت روش این است که باید معادلات دیفرانسیل حرکت شبکه پایایی مقیاس معادله فیزیکی حاکم را حفظ کنند. این ایده با موفقیت در بیشتر محاسبات جوابهای انفجاری که از روش معادلات دیفرانسیل حرکت شبکه برای تعیین تابع نشانگر استفاده می کنند بکار برده شده است. در حالی که این روش برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که بصورت معادلات سراسری هستند کاربردی و قابل اجرا نمی باشد.

هانگ و همکارانش در [۱۰] به حل عددی معادلات انتشار واکنش که جوابهای بی کران (یا انفجاری) در یک زمان متناهی دارند می پردازند. هم چنین بیان می‌کنند که حفظ مقیاس پایا برای عملکرد رضایتبخش روش های معادلات دیفرانسیل حرکت شبکه نه لازم و نه کافی می باشد. بلکه از مفهوم جدیدی به نام «غلبه هم توزیعی» استفاده می شود: این جملات نشان می دهند که اصل هم توزیعی برای تعدیل شبکه بر دیگر جملات در معادله دیفرانسیل حرکت شبکه غلبه می کند. در نتیجه، بکارگیری غلبه هم توزیعی برای رضایت بخش کار کردن یک معادله دیفرانسیل حرکت شبکه کافی است. غلبه هم توزیعی می تواند اغلب با استفاده از تحلیل بعدی تحقیق و بررسی شود.

جیانگ [2] و همکارانش در [۱۳] روش حرکت شبکهٔ ایستا را برای مسائل با جملات واکنش سراسری خطی از نوع معادله دیفرانسیل انتگرالی تحلیل می کنند و همگرایی مرتبه دوم در مکان و همگرایی مرتبه اول در زمان را اثبات می کنند.

---

[1] Budd

[2] Jiang

این پایان نامه به اجرای روش معادلات دیفرانسیل حرکت شبکه برای شبیه سازی عددی معادلات انفجاری انتشار واکنش سراسری می پردازد، برای این منظور در فصل اول ابتدا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعریف می شود، سپس به بیان برخی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز برای فصل های بعد پرداخته می شود و در انتها، معادلات انفجاری انتشار واکنش سراسری و نظریه انفجار آنها معرفی می شود، روشهای حرکت شبکه در فصل دوم توضیح داده می شود ، فصل سوم تحلیل بعدی معادلات معرفی شده در فصل اول را بیان می کند و چگونگی پیاده سازی و اجرای روش حرکت شبکه و الگوریتم حل را شرح می دهد و در نهایت فصل چهارم به بیان نتایج عددی حاصل از تحلیل بعدی و الگوریتم فصل سوم می پردازد.

فهرست مندرجات

فهرست نمودارها و جداول

نمودارها

جداول

فصل ۱

آشنایی با معادلات انفجاری انتشار- واکنش سراسری

سراسری

۱–۱ مقدمه

در این فصل، ابتدا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی معرفی می شود، سپس تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای این فصل و فصل های بعد بیان می شود و در آخر به معرفی معادلات انفجاری انتشار واکنش سراسری مورد بحث در این پایان نامه پرداخته و نظریه انفجار معادلات معرفی شده بیان می شود.

۱–۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

بیشتر مسائل و پدیده های فیزیکی، مکانیک سیالات، الکترومغناطیس و غیره بوسیله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE[۱]) یا به صورت مجموعه ای از چنین معادلاتی توصیف می شوند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یکی از مباحث گسترده در ریاضیات می باشد، که به روش تحلیلی و روش عددی مورد بررسی قرار گرفته و می گیرد.

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله ای شامل متغیرهای وابسته و مستقل و مشتقات جزئی متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل می باشد.

بالاترین مرتبه مشتق جزئی یک معادله، مرتبه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می شود.

حالت خاصی از معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم دوبعدی بصورت زیر می تواند بیان شود

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = g, \qquad (۱–۱)$$

که در آن g, f, e, d, c, b, a مقادیر ثابت یا توابع معلومی از y, x باشند.

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی گویند، هر گاه نسبت به متغیر وابسته و مشتقات آن خطی باشد و ضرائب آن فقط به متغیرهای مستقل وابسته باشد. به عنوان مثال معادلهٔ زیر یک معادله خطی است.

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t$$

[۱] $Partial\ Differential\ Equation$

در معادلهٔ (۱–۱) اگر $g=0$، معادله همگن و در غیر این صورت غیرهمگن نامیده می شود.
اگر ضرایب g, f, e, d, c, b, a در معادلهٔ (۱–۱) ثابت باشد گفته می شود معادلهٔ (۱–۱) دارای ضرایب ثابت است، در غیر این صورت ضرایب متغیر دارد.
یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه m نیمه خطی نامیده می شود هر گاه نسبت به مشتقات جزئی مرتبه mام متغیر وابسته با ضرایبی که تنها تابع $u, ...y, x$ و مشتقات مرتبه m هستند، خطی باشد. برای مثال معادلات $u_x u_{xx} + xuu_y = \sin y$ و $uu_{xx} + u_t = 0$ یک PDE نیمه خطی مرتبه دوم می باشند.
معادله ای که خطی یا نیمه خطی نباشد معادله غیر خطی نامیده می شود. به عنوان مثال معادلهٔ $xu_x + yu_y + u^2 = 0$ غیر خطی است.
معادلات دیفرانسیل جزئی (۱–۱) را می توان بصورت زیر نیز دسته بندی کرد:
الف) معادلات سهموی که معمولاً فرآیند شارش گرما و پخش گرما را توصیف می کنند و دارای خاصیت $b^2 - 4ac = 0$ می باشند. برای مثال معادلهٔ گرما $u_t = u_{xx}$ و معادلهٔ $yu_{xx} = u_{yy}$ $(b^2 - 4ac = -4y)$ اگر $y = 0$ باشد، معادلات سهموی می باشند.
ب) معادلات هذلولوی که به کمک این نوع معادلات می توان دستگاههای مرتعش و حرکت موج را توصیف نمود که در خاصیت $b^2 - 4ac > 0$ صدق می کنند. به عنوان مثال معادلهٔ موج $u_{tt} = u_{xx}$ $(b^2 - 4ac = 4)$ و معادلهٔ $yu_{xx} = u_{yy}$ $(b^2 - 4ac = -4y)$ برای $y < 0$ معادلات هذلولوی می باشند.
ج) معادلات بیضوی پدیده های حالت پایدار مانند انتقال سیالات را توصیف می کنند و در رابطه $b^2 - 4ac < 0$ صدق می نمایند. معادلهٔ لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $(b^2 - 4ac = -4)$ و معادلهٔ $yu_{xx} = u_{yy}$ $(b^2 - 4ac = -4y)$ برای $y > 0$، مثالهایی برای معادلات بیضوی می باشند. [۱۶]

۱–۳ مفاهیم وتعاریف مورد نیاز

در این بخش به اختصار به ارائه تعاریف و مفاهیمی پرداخته می شود که در فصل های بعد از آنها استفاده خواهد شد. در سراسر این پایان نامه، $\overline{\Omega}$، بستار Ω و $|\Omega|$، اندازه Ω و $\partial\Omega$، مرز Ω است و $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ و $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ که $T > 0$.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $\mathbb{Z}_+^n$، نمایش مجموعه‌ی تمام n- تایی های مرتب از اعداد صحیح غیرمنفی باشد، یک عضو$\mathbb{Z}_+^n$ را معمولاً با نماد α یا β نمایش می دهیم، به عنوان مثال :

$$\alpha = (\alpha_1, , \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

که هر مؤلفه α_i، نماد یک عدد صحیح غیر منفی است. $|\alpha|$، (اندازه α) به صورت زیر تعریف می شود

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

تعریف ۲.۱. مشتق جزئی مرتبه m- ام تابع $u : \Omega \to \mathbb{R}$، با نماد $D^\alpha u$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می گردد

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

که $|\alpha| = m$. همچنین در برخی موارد، از نماد $D^{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} u$ برای نمایش مشتق جزئی مرتبه‌ی m- ام استفاده می شود که به شکل زیر تعریف می گردد،

$$D^{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} u = \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}},$$

$(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ برداری m مؤلفه‌ای ازاعداد صحیح است که مؤلفه هایش در رابطه‌ی $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n$ صدق می کنند.

تعریف ۳.۱. فضای لبگ $L^p(\Omega)(1 \le p \le \infty)$، به عنوان فضای برداری از توابعی مانند $u : \Omega \to \mathbb{R}$ تعریف می شود که $|u|^p$ روی Ω انتگرال پذیر لبگ است یعنی $\int_\Omega |u(\vec{x})|^p d\vec{x} < \infty$، نرم فضای مذکور به شکل زیر است،

$$||u||_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(\vec{x})|^p d\vec{x})^{\frac{1}{p}},$$

همچنین فضای $L^\infty(\Omega_T)$، فضایی از توابع u می باشد که روی Ω تعریف می شوند. نرم در این فضا به شکل زیر تعریف می شود:

$$|u|_{L^\infty(\Omega_T)} = \sup_{x \in \bar{\Omega}_T} |u(x,t)|.$$

تعریف ۴.۱. فضای $C^m(\Omega)$، فضای برداری از توابعی مانند $u : \Omega \to \mathbb{R}$ است به طوری که u و تمام مشتقات جزئی آن تا مرتبه m پیوسته باشند.

به طور مشابه فضای $C^\infty(\Omega)$، مجموعه‌ای از توابعی مانند $u : \Omega \to \mathbb{R}$ می باشد که مشتقات جزئی u از هر مرتبه ای پیوسته باشند.

به عنوان مثال نرم فضای $C^1(\overline{\Omega})$ به صورت زیر تعریف می شود

$$|u|_{C^1(\bar{\Omega})} = |u|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} |\partial_{x_i} u|_{L^\infty(\Omega)}.$$

فضای $C^{0,1}(\overline{\Omega_T})$، فضای توابع u روی $\overline{\Omega_T}$ می باشد، به طوری که مشتق جزئی $\partial_{x_i} u$، $i = 1,..,N$، متعلق به $C(\overline{\Omega_T})$ باشد که نرم آن به صورت زیر می باشد

$$|u|_{C^{0,1}(\bar{\Omega}_T)} = |u|_{L^\infty(\Omega_T)} + \sum_{i=1}^{N} |\partial_{x_i} u|_{L^\infty(\Omega_T)}.$$

به همین صورت فضای $C^{1,2}(\Omega_T)$، فضای توابع u روی Ω_T می باشد، به طوری که u و مشتقات جزئی $\partial_t u$، $\partial_{x_i} u$ و $\partial^2_{x_i x_j} u$، $i,j = 1,..,N$، در Ω_T پیوسته باشند.

تعریف ۵.۱. دسته مشتق پذیری یک دسته بندی توابع بر طبق ویژگی های مشتقات آنها است. توابعی که دارای تمام مرتبه های مشتق پیوسته باشند هموار نامیده می شوند.
یک مجموعه باز روی مجموعه حقیقی و یک تابع f که روی این مجموعه با مقادیر حقیقی تعریف شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی باشد. تابع f از کلاس C^k است اگر مشتقات f'، f''، ... و $f^{(k)}$ موجود و پیوسته باشند (پیوستگی برای تمام مشتقات بجز $f^{(k)}$ الزامی می باشد). تابع f از کلاس C^∞ است یا هموار است، اگر تمام مرتبه های مشتق را دارا باشد. کلاس C° شامل تمام توابع پیوسته می باشد. کلاس $C^۱$ شامل تمام توابع مشتق پذیر می باشد که مشتقشان پیوسته است، چنین توابعی مشتق پذیر پیوسته نامیده می شوند. بنابراین، یک تابع $C^۱$ دقیقاً تابعی است که مشتقش وجود دارد و از کلاس C° است.

تعریف ٦.۱. تکیه گاه تابع u تعریف شده روی Ω که با نماد $supp\ u$ [۱] نمایش داده می شود عبارت است از بستار مجموعه $u^{-۱}(\mathbb{R}-\{\circ\})$، یعنی

$$supp\ u = \overline{\{\vec{x} \in \Omega : u(\vec{x}) \neq \circ\}}.$$

تعریف ۷.۱. فضای $C_\circ(\Omega)$ زیر فضایی از همه‌ی توابع کراندار u متعلق به $C(\Omega)$ است که دارای تکیه گاه فشرده می باشد.

تعریف ۸.۱. فضای $C_\circ^\infty(\Omega)$، فضای برداری از توابع بینهایت مشتق پذیر با تکیه گاه فشرده در Ω است. این فضا با نماد $\mathcal{D}(\Omega)$ نیز نشان داده می شود.

---

[۱] $support$

تعریف ۹.۱. برای یک چند تایی $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ و تابع $u\in L^1(\Omega)$، اگر تابع $v\in L^1(\Omega)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ در شرط زیر صدق کند

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi d\vec{x}=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi d\vec{x},$$

آنگاه v مشتق توزیعی(یا تعمیم یافته) مرتبه $|\alpha|$ از u گفته می‌شود و با نماد $v=D^\alpha u$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. فضاهای سوبولوف[۱]، که به وسیله $W^{s,2}$ یا H^s نشان داده می شوند، فضاهای هیلبرت [۲] هستند.

برای عدد صحیح نامنفی s و $\Omega\subset\mathbb{R}^n$، فضاهای سوبولوف $H^s(\Omega)$ شامل توابع L^2 می باشند که مشتقات توزیعی آنها تا مرتبه s متعلق به L^2 هستند.

ضرب داخلی در $H^s(\Omega)$ به صورت زیر می باشد

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega f\left(x\right)\bar{g}\left(x\right)dx+\int_\Omega Df\left(x\right).D\bar{g}\left(x\right)dx+...+\int_\Omega D^sf\left(x\right).D^s\bar{g}\left(x\right)dx.$$

که . بیانگر ضرب نقطه ای هر مرتبه از مشتقات جزئی در فضای اقلیدسی است.

فضاهای سوبولوف هم چنین می توانند زمانی که s عدد صحیح نباشد نیز تعریف شوند.

فرض کنید v تابعی باشد تعریف شده روی Ω بطوری که

$$\int_\Omega v\left(x\right)^2dx<\infty,\quad\int_\Omega v'\left(x\right)^2dx<\infty.$$

فضای همه توابع مانند v با خاصیت فوق را با $H^1\left(\Omega\right)$ نشان می دهند و آن را فضای سوبولوف مرتبه ۱ می نامند.

فضای هیلبرت $H_0^1\left(\Omega\right)$ زیر فضایی از $H^1\left(\Omega\right)$ می باشد که شامل توابعی است که روی مرز Ω صفر می شوند.

---

[۱] *Sobolev spaces*

[۲] *Hilbert spaces*

تعریف ۱.۱۱. تابع منظم تابعی است که تحلیلی بوده (از کلاس C^∞ باشد) و در ناحیه داده شده تک مقدار باشد.

تعریف ۱.۱۲. پیوسته لیپ شیتز: فرض کنید فضاهای متریک (X, d_X) و (Y, d_Y) که d_X بیانگر متریک مجموعه X و d_Y متریک مجموعه Y است داده شده باشند(برای مثال، Y ممکن است مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با متریک $d_Y(x,y) = |x-y|$ و X زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}$ باشد)، تابع $f : X \to Y$ پیوسته لیپ شیتز [1] نامیده می شود اگر ثابت حقیقی $K \geq ۰$-ای وجود داشته باشد بطوری که برای هر $x_۱$ و $x_۲$ در X، رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$d_Y(f(x_۱), f(x_۲)) \leq K d_X(x_۱, x_۲).$$

K ثابت لیپ شیتز برای تابع f می باشد.
اگر $x_۱ = x_۲$، نامساوی زیر (بطور بدیهی) برقرار است. در غیر این صورت، بصورت معادل یک تابع، پیوسته لیپ شیتز می باشد اگر و فقط اگر ثابت $K \geq ۰$-ای وجود داشته باشد بطوری که برای هر $x_۱ \neq x_۲$، رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\frac{dY(f(x_۱), f(x_۲))}{dX(x_۱, x_۲)} \leq k.$$

هر تابع مشتق پذیر $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته لیپ شیتز است (باثابت لیپ شیتز $(K = sup|g'(x)|$) اگر و فقط اگر این تابع مشتق اولش کراندار باشد، این مطلب از قضیه مقدار میانگین نتیجه می شود. در حالت خاص، هر تابع $C^۱$ لیپ شیتز محلی است.

مثال:

• تابع سینوس پیوسته لیپ شیتز است زیرا مشتق آن، تابع کسینوس، بوسیله قدر مطلق ۱ از بالا کراندار است .

• تابع $f(x) = |x|$ که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده پیوسته لیپ شیتز است با ثابت لیپ شیتز ۱، توسط نامساوی مثلثی معکوس. این تابع پیوسته لیپ شیتز است ولی مشتق پذیر نیست.

---

[1] *Lipschitz Continious*