دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان :

قضیه نقطه ثابت روی فضای متریک فازی

استاد راهنما :

محمد رضا مولایی

مولف:

معصومه فدایی

مهر ماه 1388

تشکر و قدر دانی:

با تشکر و سپاس فراوان از استاد گرامی، جناب آقای دکتر محمد رضا مولایی به خاطر راهنمایی های ارزنده شان.

تقدیم به:

پدر و مادر مهربان و

همسر عزیزم

چکیده

قضیه نقطه ثابت، یکی از معرو فترین و قدیمی ترین قضیا در ریاضیات می باشد که کاربرد بسیار زیادی در علوم و مهندسی دارد. برای مثال نقطه ثابت نقش مهمی در سیستم های دینامیکی، معادلات دیفرانسیل و مفهوم آشوب ایفا می کند.

در این پایان نامه، در ابتدا به بیان مفاهیم و تعاریف در مورد سیستم های دینامیکی می پردازیم. سپس فضای متریک فازی، حاصلضرب فضای متریک فازی و فضای متریک شهودی را معرفی خواهیم کردو به قضیه وجود و یکتایی نقطه ثابت و همچنین نقطه تناوبی و تعاریف و مفاهیم مرتبط با این قضایاخواهیم پرداخت.

فهرست مطالب

مقدمه:

بعد از بیان مفهوم فازی توسط زاده [۲۶]، افراد زیادی به بیان این مفهوم به روش های دیگر و توسعه آن و بیان تعاریف قضایا در این باره پرداختند.

به طور مثال ، مفاهیمی که در [۴] در مورد فضاهای متریک احتمالی بیان شده، در [۸] به صورت فازی در آمده است.

همچنین در [۷] و [۸] نویسندگان، فضای متریک فازی را معرفی کرده اند و یک توپولوژی شمارای اول و هاسدورف رو ی این فضا بدست آورده اند.

در [۱۶] و [۲۵] مفهوم حاصلضرب فضاهای متریک احتمال، که در [۷] پایه گذاری شده است، در مفهوم فازی بیان می شود.

اخیرا هم [۱۹] می بینیم، به مطالعه حاصلضرب فضاهای متریک نرم دار پرداخته شده و نتایج جالبی هم بدست آمده است.

در این پایان نامه به بیان مفاهیم و قضایا یی با توجه به [۱] ، [۷] ،[۸] ، [۱۱] و [۲۱] خواهیم پرداخت.

۱

تعاریف و پیشنیازها

۱-۱: سیستم های دینامیکی

در مورد سیستم های دینامیکی می توان گفت ،یک سیستم دینامیکی تشریح راه حلی برای مسأله های فیزیکی یا مدل سازی ریاضی به صورت تابع می باشد.

در زیر به تعریف یک سیستم دینامیکی به زبان ریاضی می پردازیم.

دو تایی (X, f) که در آن X مجموعه ای غیر تهی و f نگاشتی به صورت $f: X \to X$ است به همراه مجموعه ی $\{ f^t \mid f^t: X \to X,\ t \in R\}$ را سیستم دینامیکی نامیم، اگر شرایط زیر را دارا باشد:

۱)به ازای $t = 0$ داشته باشیم: $f^0 = id$ ($id : X \to X$ همان تابع همانی روی X است.)

۲)برای هر $t, s \in R$ داشته باشیم: $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ ($\circ$ نشان دهنده ترکیب توابع می باشد.)

اگر سیستم دینامیکی با تعریف بالا داشته باشیم که $t \in R$، آن را سیستم دینامیکی زمان پیوسته و اگر $t \in Z$ آنگاه سیستم دینامیکی زمان گسسته خواهیم داشت.

همچنین اگر $t \in N$ باشد، آنگاه آنرا نیم سیستم دینامیکی گوییم.

در سیستم دینامیکی زمان گسسته، نماد $n \in N$, f^n و f^{-n} به ترتیب n بار ترکیب تابع f و f^{-1} می باشد.

مدار x (برای هر x دلخواه عضو X) را با $o(x)$ نشان داده و به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$o(x) = \{f^t(x) \mid t \in R\}$$

اگر سیستم دینامیکی زمان گسسته داشته باشیم که نگاشت f در آن معکوس پذیر باشد به صورت $\{......, f^{-n}, \ldots, f^{-1}, x, f, \ldots, f^n, ...\}$ می باشد و اگر f معکوس پذیرنباشدخواهیم داشت:

$$o(x) = \{x, f, f^2, \ldots, f^n, \ldots\}$$

نقطه $x \in X$ را نقطه ثابت سیستم بیان شده می نامیم، اگر داشته باشیم: $f(x) = x$

با در نظر گرفتن سیستم بالا، نقطه $x \in X$ را نقطه ای تناوبی برای سیستم فوق گوییم، اگر $k \in N$ وجود داشته باشد به طوری که: $f^k(x) = x$

همچنین کوچکترین k با این خصوصیت، دوره تناوب نقطه x می نامیم.

اگر p نقطه ای تناوبی برای سیستم باشد، آنگاه مدار p به صورت زیر می باشد:

$$O(p) = \{p, f(p), \ldots\ldots, f^{k-1}(p)\}$$

همچنین نگاشت $h: R^1 \to R^m$ را که $t \to h(t)$ ، را شبه متناوب گوییم اگر بتوان آنرا به صورت زیر نوشت :

$h(t) = H(\omega_1 t, \dots \dots \dots, \omega_n t)$

که در آن $H(x_1, \dots \dots ., x_n)$ نگاشتی با دوره تناوب 2π در نقاط $x_1, \dots \dots ., x_n$ می باشد.

اعداد $\omega_1, \dots \dots . . ., \omega_n$ بسامد های پایه نامیده می شوند.

۱-۲: مجموعه های حدی و جاذب ها

هر سیستم دینامیکی متناظر با یک معادله دیفرانسیل می باشد.

منظور از بیان جمله بالا این است:

دستگاه زیر را در نظر می گیریم:(X منیفلد باشد.)

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in X \quad , \quad f \in C^1 \qquad (۱)$$

دستگاه(۱)، یک سیستم دینامیکی مانند $(t \in R)\varphi_t(x)$ را روی X مشخص می کند.

دستگاهی مانند دستگاه (۱) که وابستگی به متغیر t (زمان)ندارد را یک دستگاه خودگردان(مستقل از زمان) می نامیم.

گوییم نگاشت f نگاشتی C^r می باشد، اگر دارای مشتق r ام پیوسته باشد.

۱-۲-۱ تعریف:

دستگاه (۱) را در نظر می گیریم. فرض می کنیم $\varphi(t, x)$ جوابی برای این معادله دیفرانسیل باشد.

این نوع مجموعه جواب ها برای این دستگاه را شار برای معادله دیفرانسیل می نامیم که دارای شرایط زیر می باشد:

۱)برای هر $x \in X$: $\quad \varphi(0, x) = x$

۲)برای هر $t, s \in R$: $\quad \varphi(t+s, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$

۳) برای هر $t \in R$ و $x \in X$: $\quad \varphi(-t, \varphi(t, x)) = \varphi(t, \varphi(-t, x)) = x$

۱-۲-۲ تعریف:

دستگاه (۱) را در نظر می گیریم. $\varphi_t(x)$را شار روی X و جوابی برای دستگاه (۱) قرار می دهیم.

زیر مجموعهS را پایا تحت شار φ_tگوییم اگربرای هر $t \in R$ و $s \in S$ داشته باشیم $\varphi_t(x) \in S$.

۱-۲-۳ تعریف:

$\varphi_t\ (x)$ را شاری روی X متناظر با دستگاه (۱) در نظر می گیریم. مجموعه $\omega - limit$ برای نقطه $p\epsilon\ X$ را که با $\omega(p)$ نمایش می دهیم، شامل نقاطی مانند $q\ \epsilon\ X$ است به طوری که دنباله ای از اعداد حقیقی مانند t_n موجود باشد و $t_n \rightarrow \infty$، داریم:

$$lim_{n\to\infty}\varphi_{t_n}(p) = \ q$$

همچنین مجموعه $\alpha - limit$ نقطه $p\ \epsilon\ X$ را با $\alpha(p)$ نمایش می دهیم و عبارت است از مجموعه نقاطی مانند q در X، به طوری که دنباله ای مانند t_n از اعدادحقیقی که $t_n \rightarrow -\infty$ موجود است و داریم:

$$lim_{n\to\infty}\varphi_{t_n}(p) = q$$

در زیر قضیه ای مربوط به مجموعه های حدی بیان می کنیم.

۱-۲-۴ قضیه:

دستگاه (۱) را با شرط فشرده بودن X در نظر می گیریم.همچنین $\varphi_t(x)$ را شاری روی X متناظر با دستگاه (۱) قرار می دهیم. در این صورت برای هر $p\ \epsilon\ X$ داریم:

۱) $\omega(p)$ ($\alpha(p)$) غیر تهی است.

۲) $\omega(p)$ ($\alpha(p)$) بسته و فشرده است.

۲) $\omega(p)$ ($\alpha(p)$) تحت شار بیان شده پایداراست.

۳) $\omega(p)$ ($\alpha(p)$) همبند است.

اثبات این قضیه در مرجع[25] آمده است.

۱-۲-۵ تعریف:

نقطه ای مانند p در X را نقطه غیر سرگردان می نامیم اگر برای هر همسایگی مانند V از p، عدد حقیقی غیر صفر $\mathrm{k} > 1$ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

$$\varphi_k(V)\ \cap\ V\ \neq\ \emptyset$$

و اگر نقطه ای غیر سرگردان نباشد، نقطه ای سرگردان است.

نقاط ثابت و تمام نقاط روی مدارهای تناوبی به وضوح مثالی برای نقاط غیر سرگردان هستند.

۱-۲-۶ تعریف:

مجموعه پایا و بسته A زیر مجموعه X را یک مجموعه جاذب می نامیم اگر، همسایگی از A مانند V وجود داشته باشد به طو ری که برای هر $x\epsilon\ V$ و $t\ \geq 0$ داشته باشیم: $\varphi_t(x)\epsilon\ V$ و همچنین به ازای $\mathrm{t}\to\infty$، $\varphi_t(V)\to \mathrm{A}$.

دا منه جاذب A را با D_A نمایش می دهیم و عبارت است از:

$$D_A = \cup_{t<0}\ \varphi_t(V)$$

همچنین مجموعه جاذب A را که شامل یک مدار چگال می باشد را یک جاذب می نامیم.

۱-۲-۷ تعریف:

فرض می کنیم X یک فضای متریک فشرده و $f: X \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. نقطه $p \in X$ را یک نقطه جاذب می نامیم اگر همسایگی Y از p موجود باشد به طوری که $\bar{Y}$ فشرده وداشته باشیم: $\bigcap_{n\geq 0} f^n(p) = \{p\}$

همچنین $f(\bar{Y})$ زیر مجموعه ای از Y باشد.

با این فرضیات p را نقطه ی دافع گویند اگر همسایگی A از p موجود باشد به طوری که $\bar{A}$ فشرده، همچنین A زیر مجموعه ای از $f(\bar{A})$ باشد و داشته باشیم:

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(p) = \{p\}$$

۱-۲-۸ تعریف:

نقطه ثابت p را نقطه ای تکین نامیم اگر همسایگی از p مانند U موجود باشد به طوری که غیر از خود p شامل هیچ نقطه ثابت دیگری نباشد.

۱-۲-۹ تعریف:

تابع f را روی مجموعه A (زیر مجموعه ای از X و X را فضای متریک با متر d قرار می دهیم.) ثابت دافع گو یند، اگر $\lambda > 1$ موجود با شد که برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \geq \lambda d(x, y)$$

۱-۲-۱۰ تعریف:

فرض می کنیم (X, d) فضای متریک تام و $\{X, \varphi_t\}$ یک سیستم دینامیکی باشد. s_0 را زیر مجموعه ای از X قرار می دهیم. اگر s_0 بسته و پایا باشد، s_0 را لیا پانف پایدار می نامیم اگر برای هر همسایگی U از s_0، همسایگی مانند V از s_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in V$ داشته باشیم: $\varphi_t(x) \in V$.

این شرط را شرط لیاپونف می گوییم.

مفروضات تعریف بالا را در نظر می گیریم. s_0 را مجانبا پایدار نامیم، اگر همسایگی u از s_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in u$ داشته باشیم: $\varphi_t(x) \to s_0$

و این شرط را شرط پایداری مجانبی می نامیم.

3-1: حساسیت نسبت به شرایط اولیه و آشوب

به طور معمول آشوب در سیستم های دینامیکی، به موقعیتی گفته می شود که در آن مدارهابه یک مدار متناوب یا شبه متناوب همگرا نمی شوندو یا اینکه حرکت دورانی مدارها غیر قابل پیش بینی و حساس به شرایط اولیه باشد.

X را یک فضای متریک فشرده با متر d قرار می دهیم. سیستم دینامیکی (X, f) را حساس نسبت به شرایط اولیه گوییم اگر $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \epsilon X$ و همسا یگی N از x، $y \epsilon N$ و $n > 0$ موجود باشد به طوری که $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$

در این بخش کافیست یک سیستم دینامیکی مانند (X, f) را در نظر بگیریم که $f: X \to X$ نگاشتی پیوسته و X فضای متریک فشرده باشد. که اگر در تعریف زیر فشردگی را نداشته باشیم می توانیم خود را محدود به نقاطی کنیم که قسمت مثبت مدار آن ها (جایی که $t > 0$) دارای بستار فشرده و در نتیجه کراندار می باشد. در این صورت گوییم مدار مثبت x حساس یا آشوبناک است.

۱-۳-۱ تعریف:

با فرضِات بالا مدار $x \epsilon X$ را یک مدار آشوبناک یا حساس گوییم اگر عدد ثابتی مانند $0 < C$ موجود باشد، به طوری که برای هر $q \epsilon \omega(x)$ و هر $\varepsilon > 0$ اعداد صحیحی مانند n_1، n_2 و n موجود باشد به طوری که $d(f^{n1}(x), q) < \varepsilon$، $d(f^{n2}(x), q) < \varepsilon$ اما $d(f^{n1+n}(x), f^{n2+n}(x)) > C$.

بدین ترتیب، می توان گفت این گو نه مدارها غیر قابل پیش بینی هستند. به این معنی که اگر در مدار مثبت x ، y ای وجود دارد که بسیار نزدیک به $q \epsilon \omega(x)$ می باشد، نمی توان چنین نتیجه ای را برای نقاطی در فاصله C از این نقطه گرفت.

با بیان این تعریف می توان مفهوم دیگری را بیان کرد.

در تعریف بعدی این مفهوم را بیان می کنیم.

مجموعه فشرده A را که زیر مجموعه ای از فضای متریک X است را جاذب عجیب می نامیم، اگر مجموعه بازی مانند U و N به عنوان زیر مجموعه ای از X که دارای اندازه لبگ صفر می باشد، وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in U - N$ داشته باشیم: $\omega(x) = A$ و مدار x، مداری آشوبناک باشد.

بعد از این تعریف، می خواهیم به معرفی یک سیستم دینامیکی آشفته بپردازیم. برای این کار احتیاج به مفهوم انتقال توپولوژیک داریم که در زیر به بیان این تعریف می پردازیم.

۱-۳-۲تعریف:

فضای متریک (X,d) ررا در نظر می گیریم. نگاشت $f: X \to X$ را یک انتقال توپولوژیک گوییم، اگر برای هر زوج مجموعه باز U و V (زیر مجموعه هایی از X) عدد $k > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

۱-۳-۳تعریف:

فضای متریک (X,d) را در نظر می گیریم. $f: X \to X$ را نگاشتی یک به یک قرار می دهیم. سیستم دینامیکی آشفته و نگاشت آشفتگی می نامیم، اگر دارای شرایط زیر باشد:

۱) f انتقالی توپولوژیک باشد.

۲) f حساسیت شدید نسبت به شرایط اولیه داشته باشد.

۳) نقاط متناوب f در X چگال باشد.

۱-۴: نگاشت های مزدوج

در مطالعه سیستم های دینامیکی، نمی توان اهمیت انتقال مختصات را نادیده گرفت. به طور مثال در دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب ثابت، با انتقال مختصات می توان دستگاه را جداسازی کرد و به مجموعه ای از معادلات خطی مرتبه اول جدا از هم تبدیل کرد که حل آن به مراتب ساده تر از دستگاه اولیه خواهد بود.

فرض می کنیم X و Y فضایی توپولوژیک باشد. $f: X \to Y$را دیفیو مورفیسم از کلاس $\mathrm{C^k}$ می نامیم اگر f معکوس پذیر و از مرتبه $\mathrm{C^k}$ باشد و معکوس آن نیز از مرتبه $\mathrm{C^k}$ باشد.

۱-۴-۱ تعریف:

X و Y را دو فضای توپولوژیک در نظر می گیریم. $f: X \to X$ و $g: Y \to Y$ را نگاشت هایی دیفیو مورفیسم از کلاس $\mathrm{C^k}$ قرار می دهیم. f و g را $\mathrm{C^k}$- مزدوج گوییم اگردیفیو مور فیسمی مانند $h: X \to Y$ از کلاس $\mathrm{C^k}$ باشد وداشته باشیم: $hof = goh$.و یا

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

نمودار بالا جا به جایی باشد.

جا به جایی بودن دیاگرام بدین معنی است که رابطه بیان شده در ابتدای تعریف برقرار باشد.

یا به زبانی دیگر اگر از گوشه سمت چپ و بالای نمودارنقطه ای را به عنوان نقطه شروع انتخاب کنیم ،از هر جهت که شروع به حرکت کنیم، به نقطه ای مشابه در گوشه سمت راست و پایین نمودار خواهیم رسید.

در حالت $k = 0$ می گوییم f و g معادل توپولوژیکی هستند.

همچنین اگر h روی تمام دامنه و بردش دیفیو مورفیسم نباشد وفقط تحدید آن به زیر مجموعه ای از X مانند U به $h(u)$ یک دیفیو مورفیسم باشد، آنگاه گوییم f و g به طور موضعی مزدوج هستند.

۱-۴-۲ قضیه:

فرض می کنیم شرایط تعریف بالا برقرار باشد و f و g $\mathrm{C^k}$- مزدوج باشند. آنگاه مدارهای f تحت h به مدارهای g نگاشته می شود.

همچنین نقاط ثابت f به نقاط ثابت g تحت h نگاشته می شود.

اثبات این قضیه را می توان در مرجع[۲۵] دید.

۱-۴-۳ قضیه:

اگر f و g معادل توپولوژیک باشند، آنگاه اگر A در X چگال باشد آنگاه $h(A)$ در Y چگال می باشد.

برهان:

Aدر X چگال می باشد، بنابراین با توجه به این که دیفیو مورفیسم h پوشا است، خواهیم داشت:

$$Y = h(X) = h(\bar{A})$$

از طرفی می دانیم $h(\bar{A})$ زیر مجموعه ای از $\overline{h(A)}$ می باشد، همچنین بستار $h(A)$ نیز زیر مجموعه ای از Y است. با توجه به نتایج بدست آمده در بالا خواهیم داشت:

$$\overline{h(A)} = Y$$

و درآخرنتیجه خواسته شده در بالا بدست آمد.

۲

فضای متریک فازی

۲-۱: مقدمه ای بر فضای متریک فازی

در این بخش به معرفی فضای متریک فازی با توجه به آنچه در مراجع [۲۲]،[۷] و[۸] گفته شده است، می پردازیم.

۲-۱-۱ تعریف:

یک عمل دو تایی $*: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ یک $t\text{-}norm$ پیوسته است اگر شرایط زیررا دارا باشد:

۱) * شرکت پذیر و جابجایی باشد.

۲) * پیوسته باشد.

۳)برای هر $a \in [0,1]$ داشته باشیم: $a * 1 = a$.

٤) هرگاه $a \le c$ و $b \le d$ آنگاه داشته باشیم: $a * b \le c * d$.

دومثال از $t\text{-}norm$ پیوسته را در زیر می آوریم:

$$a * b = ab \qquad , \qquad a * b = \min(a,b)$$

۲-۱-۲ تعریف:

فضای متریک فازی یک سه تایی $(X, M, *)$ می باشد که در آن X یک مجموعه غیر تهی ، * یک $t\text{-}norm$ پیوسته و $M: X \times X \times [0,\infty) \to [0,1]$ یک نگاشت (که آن را نگاشت فازی می نامند) می باشد که دارای شرایط زیر است:

برای هر $x, y, z \in X$ و $t, s > 0$

(FM1 $M(x,y,t) > 0$.

(FM2 $M(x,y,t) = 1$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(FM3 $M(y,x,t) = M(x,y,t)$.

(FM4 $M(x,z,t+s) \ge M(x,y,t) + M(y,z,s)$.

(FM5 $M(x,y,.) : [0,\infty) \to [0,1]$ پیوسته است.

۲-۱-۳ لم :

$M(x, y,.)$غیر کاهشی می باشد.[۱۰]

برای اثبات این لم کافیست در شرط $(FM٤)$ ، قرار دهیم : $y = z$.

۲-۱-٤ نکته:

در فضای فازی$(X, M,*)$، برای هر $r \in (٠,١)$ یک $s \in (٠,١)$ وجود دارد به طوری که :

$s * s \geq r$.

در[۷] ثابت می شود که هرمتریک فازی روی X یک توپولوژی τ_M تولید می کند که پایه آن خانواده ای از مجموعه ها به صورت زیر می باشد:

$\{ B_x(r,t): x \in X, r \in (٠,١), t > ٠\}$

که $B_x(r,t) = \{ y \in X: M(x,y,t) > ١ - r\}$ یک همسایگی از $x \in X$ می باشد، برای هر $t > ٠$ و $r \in [٠,١]$.

به علاوه (X, τ_M)، یک فضای هاسدورف و همچنین شمارای اول است. همچنین اگر (X, d)یک فضای متریک باشد، آنگاه توپولوژی تولید شده توسط d متقارن با توپولوژی τ_M تولید شده توسط M_d می باشد.

۲-۱-۵ قضیه:

فرض می کنیم $(X, M,*)$ یک فضای متریک فازی و τ_M توپولوژی بوجود آمده توسط متریک فازی M باشد. آنگاه دنباله $\{x_n\}$ در X به x همگرا می باشد $(x_n \to x)$

اگر و فقط اگربرای $n \to \infty$ داشته باشیم:

$M(x_n, x, t) \to ١$

۲-۱-٦ قضیه:

اگر x_n دنباله ای همگرا در فضای متریک فازی $(X, M,*)$ باشد، آنگاه دارای حد منحصر بفرد است.

برهان:

فرض می کنیم x_n دارای دو حد x و y باشد. ثابت می کنیم $x = y$.

بنابر شرط $(FM٤)$ خواهیم داشت:

$$M(x,y,t) \geq M(x_n, x, t/٢) + M(x_n, y, t/٢)$$

حال با حد گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$M(x,y,t) \geq lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t/٢) + lim_{n\to\infty} M(x_n, y, t/٢)$$

و همچنین

$$M(x, y, t) \geq ۱ * ۱ = ۱$$

خواهیم داشت:

$$M(x, y, t) = ۱$$

و بنابراین $x = y$.

۲ – ۱-۷ تعریف:

دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک فازی $(X , M ,*)$ یک دنباله کشی می نامند اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ و $t > ۰$، $n_۰ \in N$ ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n, m \in N$ داشته باشیم:

$$M(x_n, x_m, t) > ۱ - \varepsilon$$

یعنی برای هر $t > ۰$ داریم :

$$lim_{n,m\to\infty} M(x_n, x_m, t) = ۱$$

یک فضای متریک فازی که درآن هر دنباله کشی، همگرا باشد را یک فضای متریک فازی کامل گویند.

۲-۱-۸ تعریف:

فضای فازی $(X, M,*)$ را فضای فازی فشرده می نامیم، اگر هر دنباله $\{x_n\}$ در X دارای زیر دنباله ای مثل $\{x_{nk}\}$ باشد به طوری که $x_{nk} \to x \in X$.

۲-۱-۹ تعریف:

$(X, M,*)$ را یک فضای متریک فازی در نظر می گیریم.فرض می کنیم A یک زیر مجموعه غیر تهی X باشد، بستار فازی A به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\bar{A} = \{ y\in X \mid \ni x\in A , M(x, y, t) > 1- r , t > 0, r\in [0, 1] \}$$

با توجه به تعریف بالا هر عضوی از A عضوی از $\bar{A}$ نیز می باشد. بنابراین A زیر مجموعه ای از $\bar{A}$ است.

از طرفی تعریف بالا به این معنی است که، هر گوی بازی که حول $y\in \bar{A}$ در نظر بگیریم شامل عضوی از A می باشد.

A^c را نمادی برای نشان دادن مجموعه ی $X- A$ (با توجه به این که A زیر مجموعه ای از X است) قرار می دهیم.

با توجه به این نماد گذاری تعریف زیر را خواهیم داشت:

نقاط حدی فازی A با نماد A' نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$A' = \{y\epsilon X \mid \exists x\epsilon A, z\epsilon A^c \ s.t \ M(x,y,t) > ۱-r, M(z,y,t) > ۱-r \ r\epsilon (۰,۱)\}$$

که البته $x, z \neq y$..

به این معنی که، هر گوی بازی که حول $y\epsilon A^c$ در نظر بگیریم، شامل عضوی از A و A^c به غیر از خود y می باشد، و یا به عبارتی دیگر اشتراک این گوی باز با هر دوی A و A^c به غیر از خود y غیر تهی است.

۲-۱-۱۰ قضیه:

با توجه به دو تعریف بالا خواهیم داشت: $\bar{A} = A \cup A^c$.

برهان:

با توجه به آنچه در قبل گفته شد، A زیر مجموعه ی $\bar{A}$ می باشد.حال فرض می کنیم $x\epsilon A$.

بنابراین هر گوی باز حول x ، باتوجه به تعریف، عضوی از A وجود دارد. با توجه به تعریف $\bar{A}$ داریم: $x\epsilon \bar{A}$. بنابراین $A \ U \ A'$ زیر مجموعه ای از $\bar{A}$است.

حال فرض می کنیم $x\epsilon \bar{A}$. بنابراین اشتراک هر همسایگی از x با A غیر تهی است. اگر خود x عضوی از این اشتراک باشد، که $x \epsilon A$ و اگر در این اشتراک نباشد، $x\epsilon A^c$. بنابراین U اشتراکش با A و A^c غیر تهی است. بنابراین $x\epsilon A^c$.

وبا توجه به بالا داریم: $x\epsilon A \cup A^c$. و بنابراین خواهیم داشت: $\bar{A} = A \cup A^c$.

۲-۱-۱۱تعریف:

$(X, M,*)$ را یک فضای متریک فازی در نظر می گیریم. مجموعه A را زیر مجموعه ای از X قرار می دهیم. در این صورت A را مجموعه ای بسته گوییم اگر $A = \bar{A}$ (با توجه به تعریف بستار فازی). همچنین آن را باز گوییم اگر برای هر x در Aگوی بازی حول x مانند$B_r(x, t)$(با توجه به تعریف گوی باز در فضای متریک فازی) داشته باشیم به طوری که$B_r(x, t)$ زیر مجموعه ای از A باشد.

بنابر قضیه بالاو همچنین تعریف اخیر، برای نشان دادن بسته بودن یک مجموعه کافیست تنها ثابت کنیم که نقاط حدی این مجموعه زیر مجموعه ای برای خود مجموعه می باشد.

۲-۱-۱۲ تعریف:

فرض می کنیم $(X, M_۱,*)$ و $(Y, M_۲,*)$ دو فضای متریک فازی باشند. نگاشت $f: X \to Y$ را به طور یکنواخت پیوسته گوییم، اگر و فقط اگر برای هر $r_۱ \epsilon (۰,۱)$ و $t_۱ > ۰$ ، $r_۲ \epsilon (۰,۱)$ و $t_۲ > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $M_۱(x, y, t_۱) \geq ۱ - r_۱$ برقرار باشد، داشته باشیم:

$M_۲(f(x), f(y), t_۲) \geq ۱ - r_۲$

همچنین نگاشت $f: X \to Y$ را $t-$پیوسته یکنواخت گوییم، اگر برای هر $۱ > \varepsilon > ۰$، $۱ > r > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \epsilon X$ و $t > ۰$ اگر $M(x, y, t) > ۱ - \varepsilon$ داشته باشیم:

$$M(f(x), f(y), t) > ۱ - r$$

۲-۱-۱۳ تعریف:

تابع M را در فضای متریک فازی $(X, M,*)$ پیوسته گوییم، اگر و فقط اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ که $x_n \to x$ و $y_n \to y$ داشته باشیم:

$$lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) = M(x, y, t) \qquad for\ all\ t > ۰$$

۲-۱-۱٤ تعریف:

[۸]سه تایی $(X, N,*)$ را فضای نرم دار فازی گوییم اگر X یک فضای برداری، $*$ $t-norm$ ای پیوسته و N نیز روی $X \times (۰,\infty)$ طوری تعریف شده باشد به طوری که شرایط زیر را ایجاب کند:

(۱) $N(x, t) > ۰$

(۲) $N(x, t) = ۱$ اگر و فقط اگر $x = ۰$

(۳) $N(\alpha x, t) = N(x, t/|\alpha|)$

(٤) $N(x, t) * N(y, s) \leq N(x + y, t + s)$

(٥) $N(x): (۰,\infty) \to [۰,۱]$ پیوسته است.

اگر در شرط، (۳)، α یک اسکالر باشد، آنگاه N نرم فازی نامیده می شود.

۲-۱-۱٥ لم: