وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان پایان نامه:

BL–جبرهای حالت

استاد راهنما:

دکتر مسعود هاوشکی

دانشجو:

راحله عسکری زاده کووئی

خرداد ماه ۹۲

چکیده

در این پایان نامه مفهوم BL-جبر حالت را توصیف می‌کنیم. نمایش انواع مختلفی از BL -جبرهای حالت مانند BL-جبرهای حالت قوی و BL-جبرهای مورفیسم حالت را خواهیم دید. همچنین تعدادی از کلاس های BL-جبرهای حالت را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: BL-جبر، MV-جبر، عملگر حالت، عملگر حالت قوی، عملگر مورفیسم حالت، فیلترحالت، فیلتر اول حالت، فیلتر ماکسیمال حالت، موضعی، ساده، نیم ساده.

فهرست مطالب

فهرست نماد ها

$\wedge$	و
$\vee$	یا
$*$	ضرب
$\rightarrow$	استلزام
$\mathrm{Ker}(f)$	هسته f
$\{\,\}$	مجموعه
$\langle\ \rangle$	فیلتر تولید شده
$[\,]$	کلاس هم ارزی
$\equiv_F$	همنهشتی به پیمانه F
$\mathcal{F}(A)$	گردایه همه فیلترهای A
$\cap$	اشتراک
$\cup$	اجتماع
$\mathcal{SSBL}$	کلاس همه‌ی BL –جبرهای حالت ساده
$\mathcal{SSSBL}$	کلاس همه‌ی BL –جبرهای حالت نیم ساده

مقدمه

منطق کلاسیک که یکی از مهم ترین اصول آن دو ارزشی بودن گزاره های منطقی است به هر گزاره ارزش درست یا ارزش نادرست نسبت می دهد. لیکن بسیاری از گزاره ها منطقی نیستند از اینرو متخصصین در پی یافتن سیستم تحلیگر مبتنی بر چند ارزش دیگر افزون بر ارزش های کلاسیک شدند.

لوکاسویچ در سال ۱۹۲۰ نخستین بار منطق سه ارزشی را با معرفی ارزش سوم امکان یا عدم قطعیت مطرح نمود و پس از آن نوع بسط یافته n ارزشی و بی نهایت ارزشی را نیز ارائه کرد. منطق های چند ارزشی با پیدایش منطق فازی توسط لطفعلی عسکرزاده در سال ۱۹۶۵ دچار تحول گشت. منطق فازی به دنبال مدل سازی استدلال های نادقیق است. ابداع منطق فازی ساختارهای گوناگونی از آن طراحی گردید که یکی از انواع شناخته شده آن منطق پایه است.

یکی از شیوه های مطالعه منطق بررسی آن از دیدگاه جبری می‌باشد، به عبارتی دیگر؛ میتوان فرمول های منطق را به جبر متناظر با آن ترجمه نمود و سپس با استفاده از روابط جبری به خواص منطق پایه دست یافت.

BL-جبرها اولین بار در دهه نود توسط هایک به عنوان معادلی برای منطق پایه فازی پایه در جبر مطرح شد. این جبرها مبنای تحقیقات بسیاری از محققین قرار *گرفت*.

پایانامه پیش رو متمرکز بر معرفی مفهوم BL-جبر حالت و بررسی خواص آن است.

در این پایان نامه ابتدا مفاهیم مقدماتی و تعاریف پیش نیاز لازم برای ورود به مبحث اصلی عنوان شده است که بیشتر مشتمل بر تعاریف جبری، مشبکه ها، خواص BL-جبرها و فیلترها است.

در ادامه تعاریف BL-جبر حالت و BL-جبر حالت قوی معرفی می شود و خواص آن ها مورد مطالعه قرار می گیرد سپس عملگر حالت بر روی MV-جبرها توصیف شده و بررسی می‌شود که تحت چه شرایطی یک MV-جبر حالت، یک BL-جبر حالت می باشد. همچنین در این فصل به مفهوم عملگر مورفیسم حالت پرداخته می شود.

در فصل چهارم تعریف فیلتر حالت بیان می‌شود و مفاهیم $Rad_\sigma(A)$، $Rad(\sigma(A))$ و چگونگی ارتباط آن ها توصیف می‌شود. پس از آن تعاریف فیلتر اول حالت و ایده آل حالت بیان می‌شود. درفصل آخر، دسته بندی های حالت بر اساس تعاریف ساده، موضعی و نیم ساده نسبت به مجموعه فیلتر های آن مورد مطالعه قرار گرفته و ارتباط این تعاریف با فیلترهای ساده ، نیم ساده و موضعی بررسی می‌شود.

فصل **اول**

مقدمات و پیش نیازها

۱-۱ جبرها

تعریف۱-۱.۱[۱] برای مجموعه ناتهی A و عدد صحیح نامنفی n، تعریف می‌کنیم: $A^0 := \emptyset$ و برای هر $n > 0$، حاصل ضرب دکارتی A، n بار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}}$$

تعریف۱-۲.۱ [۱] یک عملگر n تایی روی مجموعه ناتهی A، تابعی مانند f است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{f: A^n = A \times \dots \times A \to A}$$

$$\mathrm{(a_1, \dots, a_n) \mapsto f\,(a_1, \dots, a_n)}$$

تعریف۱-۳.۱ [۱] یک جبر $\mathcal{A}$ زوج مرتب $\mathcal{A} = (A, \{F_n\}_{n\geq 0})$ است که در آن $A \neq \emptyset$ و F_n ها عملگرهایی روی A هستند.

مثال ۱-۴.۱حلقه $(A, ., *)$ یک جبر با دو عملگر دوتایی است.

تعریف ۱-۵.۱ [۱] مجموعه ناتهی A با عملگر دوتایی * و عملگر صفرتایی ۱ را یک تکگون می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\mathrm{x * (y * z) = (x * y) * z}$، (خاصیت شرکت پذیری)

(۲) $x * 1 = 1 * x = x$، (خاصیت عنصر همانی)

و آن را یک تکگون جابجایی می‌نامیم هرگاه

(۳) $x * y = y * x$. (خاصیت جابجایی)

مثال۱-۶.۱ مجموعه اعداد طبیعی با ضرب معمولی و عنصر همانی ۱، یک تکگون جابجایی است.

تعریف ۱-۷.۱ [۱] رابطه R روی مجموعه A را یک رابطه هم ارزی می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $(x,x) \in R$، (خاصیت بازتابی)

(۲) اگر $(x,y) \in R$ آنگاه $(y,x) \in R$، (خاصیت تقارنی)

(۲) اگر $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ ، انگاه $(x,z) \in R$. (خاصیت تعدی)

تعریف ۱-۸.۱ [۱] رابطه هم ارزی R روی مجموعه A را، یک رابطه همنهشتی می‌نامیم، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

برای هر عملگر n تایی f روی A اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $(x_i, y_i) \in r$ آن‌گاه $(f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n)) \in r$.

مثال ۱-۹.۱ جمع و ضرب اعدادحقیقی یک همنهشتی با رابطه‌ی $a_n \equiv b_n$ اگر وفقط اگر $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) \to 0$.

۱-۲ مشبکه ها

تعریف ۱-۱.۲ [۱] مجموعه ناتهی L با دو عملگر دوتایی $\vee$ و $\wedge$ را یک مشبکه می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $x \vee y = y \vee x$ و $x \wedge y = y \wedge x$، (خاصیت جابجایی)

(۲) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ و $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

(خاصیت شرکت پذیری)

(۳) $x \vee x = x$ و $x \wedge x = x$ ، (خاصیت خودتوانی)

(۴) $x \vee (x \wedge y) = x$ و $x \wedge (x \vee y) = x$. (خاصیت جذب)

مثال ۱-۲.۲[۱] فرض کنید L مجموعه اعداد طبیعی، ∨ کوچکترین مضرب مشترک دو عدد و ∧ بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد باشد، آن گاه $(L,\vee,\wedge)$ یک مشبکه است.

تعریف ۱-۳.۲[۱] رابطه $\leq$ روی مجموعه A را، یک رابطه ترتیب جزئی می‌نامیم، هر گاه برای هر $x,y,z \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $x \leq x$، (خاصیت بازتابی)

(۲) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آن گاه $x = y$، (خاصیت پادتقارنی)

(۳) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$، آن گاه $x \leq z$. (خاصیت تعدی)

در این صورت، مجموعه A با رابطه ترتیب جزئی $\leq$ روی آن را، یک مجموعه جزئا مرتب می‌نامیم.

مثال ۱-۴.۲ فرض کنید X مجموعه ای ناتهی باشد، آن گاه $P(X)$ (مجموعه توانی X) با رابطه شمول $\subseteq$، یک مجموعه جزئا مرتب است.

تعریف ۱-۵.۲ [۱] رابطه $\leq$ روی مجموعه A را، یک رابطه ترتیب کلی می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) رابطه $\leq$ یک رابطه جزئی A باشد،

(۲) برای هر $x,y \in A$، $x \leq y$ یا $y \leq x$.

در این صورت، مجموعه A با رابطه ترتیب کلی $\leq$ روی آن را، یک مجموعه کلا مرتب یا زنجیر می‌نامیم.

مثال ۱-۶.۲مجموعه اعداد حقیقی با رابطه معمولی $\leq$، یک مجموعه جزئا مرتب است.

تعریف ۱-۷.۲ [۱] فرض کنید A زیرمجموعه ای از مجموعه جزئا مرتب P باشد.

(۱)عنصر $u \in P$، کران بالای A است اگر و فقط اگر برای هر $a \in A$، $a \leq u$،

(۲)عنصر u_0، کوچکترین کران بالای A است اگر و فقط اگر u_0 کران بالای A باشد و برای هر کران بالای A مانند u، $u_0 \leq u$؛ در این صورت می‌نویسیم $Sup\ A = u_0$.

تعریف ۱-۸.۲ [۱] فرض کنید A زیرمجموعه ای از مجموعه جزئا مرتب P باشد.

(۱)عنصر $v \in P$، کران پایین A است اگر و فقط اگر برای هر $a \in A$، $v \leq a$؛

(۲) عنصر v_0، بزرگترین کران پایین A است، اگر و تنها اگر کران پایین A باشد و برای هر کران پایین A مانند v، $v \leq v_0$؛ در این صورت می‌نویسیم $Inf\ A = v_0$.

مثال ۱-۹.۲ فرض کنید $\mathcal{A}$، زیر مجموعه ای از مجموعه جزئا مرتب $P(X)$ در مثال ۱-۴,۲ باشد، آن‌گاه $\cup \mathcal{A}$، کوچکترین کران بالای و$\cap \mathcal{A}$ بزرگترین کران پایین است.

تعریف ۱-۱۰.۲ [۱] مجموعه جزئا مرتب L، یک مشبکه است اگر و فقط اگر برای هر دو عنصر از L، عناصر کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین در L وجود داشته باشد.

قضیه ۱-۱۱.۲ [۱] تعریف ۱-۱,۲ و تعریف ۱-۱۰,۲، با یکدگر معادل اند.

تعریف ۱-۱۲.۲ [۱] مشبکه $(L,\vee,\wedge)$ را، یک مشبکه توزیع پذیر می‌نامیم، هرگاه برای هر $x,y,z \in L$ در شرایط زیر برقرار باشد:

(۱)$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$،

(۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

قضیه ۱-۱۳.۲ [۱] شرایط (۱) و (۲) در تعریف قبل با یکدیگر معادل اند.

مثال ۱-۱۴.۲ [۱] فرض کنید $L = \{0,a,b,c,1\}$ یک مشبکه باشد که عملگرهای $\vee$ و $\wedge$ روی آن به صورت زیر تعریف شده اند:

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	b	*1*	1
b	b	b	b	*1*	1
c	c	1	1	c	1
1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a
b	0	a	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1

آن گاه L یک مشبکه توزیع پذیر نیست زیرا

$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$ و از طرفی $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge 1 = b$ لذا
$a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

تعریف ۱-۱۵.۲ [۱] جبر $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ از نوع $(2,2,0,0)$ را مشبکه کران دار می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $(L, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد،

(۲) برای هر $x \in L$، $x \vee 1 = 1$ و $x \wedge 0 = 0$.

تعریف ۱-۱۶.۲ [۱] فرض کنید L مشبکه مثال ۱-۱۴,۲ باشد آن گاه یک مشبکه کران دار است زیرا صفر و یک به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عناصر در L باشد.

۱-۳ BL-جبرها

تعریف ۱-۱.۳ [۱] جبر $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ از نوع (2، 2، 2، 2، 0، 0) را یک BL-جبر می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b, c \in A$ در شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ یک مشبکه کراندار باشد،

(۲) $(A, *, 1)$ یک تکگون جابجایی باشد،

(۳) $a \le c \to b$ اگر و فقط اگر $a * c \le b$،

(۴) $a \wedge b = a * (a \to b)$،

(۵) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.

مثال۱-۲.۳ [۱] بازه حقیقی واحد $I = [0,1]$ را در نظر بگیرید.

در ساختار گودل، عملگرهای $\to$ و $*$ را روی I به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x \to y = \begin{cases} 1 & x \le y \\ y & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad \text{و} \qquad x * y = min\{x, y\}$$

آن گاه $(I, min, ,*, \to, 0, 1)$ یک BL-جبر است.

در ساختار لوکاسویچ، عملگرهای $*$و$\to$ را روی I به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x * y = max\{0, x + y - 1\}$$
$$x \to y = \begin{cases} 1 & x \le y \\ 1 - x + y & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آن گاه $(I, min, ,*, \to ,0,1)$ یک BL-جبر است.

در ساختار ضربی عملگر ضرب را ضرب معمولی اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم وعملگر $\to$ را روی I به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x \to y = \begin{cases} 1 & x \le y \\ \dfrac{y}{x} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آن گاه $(I, min, ,*, \to ,0,1)$ یک BL-جبر است.

لم۱-۳.۳ [۱] اگر A یک BL- جبر باشد، آن گاه برای هر $x, w, y, z \in A$ روابط زیر برقرار است.

(۱) $1 \to x = x$،

(۲) $x \to x = 1$.

(۳) $x \to 1 = 1$.

(۴) $0 \to x = 1$.

(۵) $x \vee y = y \vee x\ , x \wedge y = y \wedge x$.

(۶) $x * y \leq x, y$ و $x * y \leq x \wedge y$ ،

(۷) $x * (x \to y) \leq y$.

(۸) $y \leq x \to y$.

(۹) $y \leq (y \to x) \to x$.

(۱۰) $x \to (y \to z) = (x * y) \to z = y \to (x \to y)$ ،

(۱۱) $x \to y = 1$ اگر وتنها اگر $x \leq y$.

(۱۲) اگر $x \leq y$، آنگاه $y \to z \leq x \to z$ و $z \to x \leq z \to y$.

(۱۳) اگر $x \leq y$ و $z \leq w$ آنگاه $x * z \leq y * w$.

(۱۴) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ ،

(۱۵) $(x \to y) * (y \to z) \leq x \to z$.

(۱۶) $x \to x \wedge y = x \to y$.

(۱۷) $x \to y \leq x * z \to y * z$.

(۱۸) $x * (y \wedge z) = (x * y) \wedge (x * z)$ ،

(۱۹) $x \vee y = (x \to y) \to y \wedge (y \to x) \to x$.

(۲۰) $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$.

(۲۱) $(x \vee y) \to y = x \to y$،

(۲۲)$x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$ ،

(۲۳) $x \vee (y * z) \geq (x \vee y) * (x \vee z)$ ،

(۲۴) $x^m \vee y^n \geq (x \vee y)^{mn}$.

تعریف۱-۴.۳ [۱] اگر A یک BL -جبر باشد، آنگاه متمم عنصر $x \in A$ را با x^- نمایش می دهیم و به صورت $x^- = x \to 0$ تعریف می‌نماییم و $(x^-)^-$ را، به صورت x^{--} نمایش می‌دهیم.

تعریف۱-۵,۳ فرض کنید A یک BL-جبر باشد، آنگاه برای هر $n \geq 1$ صحیح قرار می‌دهیم $x^0 := 1$ و $x^n := x^{n-1} * x$ و عملگرهای$\ominus, \oplus$ را به صورت زیر بر روی A تعریف می‌کنیم:

برای هر $x, y \in A$، $d(x,y) = (x \to y) * (y \to x)$،

$x \ominus y := x * y^-$ ، $x \oplus y := (x^- * y^-)^-$.

لم۱-۶,۳[۱] برای هر BL–جبر شرایط زیر برقرار است.

(۱)$x * x^- = 0$،

(۲)$1^- = 0, 0^- = 1$،

(۳)$x \leq x^{--}$،

(۴)$x \to y^- = (x * y)^-$،

(۵)$x^- = x^{---}$،

(۶)$x^- \leq x \to y$،

(۷) $x \to x * y = x^- \vee y$،

(۸) $(x\wedge y)^- = x^- \vee y^-$، $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$.

گزاره۱-۷٫۳[۱] فرض کنید $A \times B$ یک BL-جبر باشد، در این صورت رابطه $\le$ را روی $A \times B$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(a,b) \le (c,d)$ اگر وتنها اگر $a \le c$ و $b \le d$

آن گاه $A \times B$ یک مجموعه جزئا مرتب است.

قضیه۱-۸٫۳[۱] فرض کنید A و B یک BL- جبر باشند. عملگرهای $\rightarrow$ و $*$ و $\wedge$ و $\vee$ روی $A \times B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a,b) \vee (c,d) = (a \vee c\ , b \vee d)$$
$$(a,b) \wedge (c,d) = (a \wedge c\ , b \wedge d)$$
$$(a,b) * (c,d) = (a * c\ , b * d)$$
$$(a,b) \rightarrow (c,d) = (a \rightarrow c\ , b \rightarrow d).$$

آنگاه $A \times B$ یک BL-جبر است.

قضیه۱-۹٫۳[۱] اگر A یک BL-جبر باشد آن گاه $(A, \wedge, \vee)$ یک مشبکه توزیع پذیر است.

تعریف۱-۱۰٫۳[۱] فرض کنید A یک BL- جبر باشد، مرتبه عنصر $x \in A$ که با $ord(x)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از کوچکترین عدد $n \in \mathbb{N}$ به گونه ای که $x^n = 0$، اگر چنین عدد طبیعی موجود نباشد، گوییم x یک عنصر از مرتبه نامتناهی است و آن را به صورت $ord(x) = \infty$ نمایش می‌دهیم.

مثال۱-۱۱٫۳ ساختار لوکاسویچ در مثال ۱-۲٫۳ را در نظر بگیرید.

می‌بینیم $ord(0.6) = 3$ زیرا

$$(0.6)^2 = 0.6 * 0.6 = max\{0,0.6 + 0.6 - 1\} = max\{0,0.2\} = 0.2$$
$$(0.6)^3 = (0.6)^2 * 0.6 = 0.2 * 0.6 = max\{0,0.2 + 0.6 - 1\} = 0$$

بنابراین $ord(0.6) = 3$.

۱-۴ MV –جبر ها

تعریف۱-۱,۴[۱] فرض کنید A یک BL –جبر باشد، در این صورت، A را یک MV–جبر می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $x^{--} = x$.

مثال ۱-۲,۴[۱] فرض کنید $B = \{0, a, b\ 1\}$ یک BL- جبر باشد، که عملگرهای $\rightarrow$ و $*$روی B به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	a	b	1	1
1	0	a	b	1

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
b	0	0	a	b
1	0	a	b	1

آنگاه M یک MV–جبر است زیرا $0^{--} = 0$, $a^{--} = a$, $b^{--} = b$ و $1^{--} = 1$.

قضیه ۱-۳,۴[۱] اگر A یک BL – جبر باشد، آن‌گاه برای هر$x, y, z \in A$ شرایط زیر معادل‌اند.

(۱)$x^{--} = x$،

(۲)$(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$،

(۳)$x \vee y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$.

نتیجه۱-۴,۴[۱] فرض کنید A یکBL –جبر باشد، در این صورت A یک MV–جبر است اگر و تنها اگر یکی از شرایط قضیه‌ی قبل برقرار باشد.

لم۱-۵,۴ فرض کنید A یک MV –جبر باشد، آن‌گاه برای هر$x, y \in A$ موارد زیر برقرار است.

(۱)$x * y = (x^{-} \oplus y^{-})^{-}$،

(۲) $x \to y = x^- \oplus y$،

(۳) $x \ominus y = (x^- \oplus y)^-$،

(۴) $x^- * (x \oplus y) = y * (x * y)^-$.

برهان:

(۱) بنا به MV –جبر بودن A $\quad x * y = (x * y)^{--}$

بنا به MV –جبر بودن A $\quad = ((x^{--} * y^{--})^-)^-$

بنا به تعریف ۱-۵,۳ $\quad = (x^- \oplus y^-)^-$

(۲) MV –جبر بودن A $\quad x \to y = x \to y^{--}$

بنا به لم ۱-۶,۳(۴) $\quad = (x * y^-)^-$

بنا به MV –جبر بودن A $\quad = (x^{--} * y^-)^-$

بنا به تعریف ۱-۵,۳ $\quad = x^- \oplus y$

اثبات(۳) بنا به تعریف ۱-۵,۳ $\quad x \ominus y = x * y^-$

بنا به MV –جبر بودن A $\quad = (x * y^-)^{--}$

بنا به MV –جبر بودن A $\quad = ((x^{--} * y^-)^-)^-$

بنا به تعریف ۱-۵,۳ $\quad = (x^- \oplus y)^-$

(۴) بنا به MV –جبر بودن A $\quad x^- * (x \oplus y) = x^- * (x^{--} \oplus y)$

بنا به قسمت (۲) همین لم $\quad = x^- * (x^- \to y)$

بنا به تعریف ۱-۱,۳(۴) $\quad = x^- \wedge y$

بنا به لم ۱- ۳,۳ (۵) $\quad = y \wedge x^-$

$= y * (y \to x^-)$ بنا به تعریف ۱-۱,۳(۴)

$= y * (x^- \oplus y^-)$ بنا به قسمت (۲) همین لم

$= y * (x * y)^-$ بنا به قسمت (۱) همین لم

۱-۵ فیلترها

تعریف ۱-۱,۵[۱] فرض کنید A یک BL–جبر باشد. دراین صورت زیر مجموعه ناتهی F از A را یک فیلتر می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in A$ شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) برای هر $x * y \in F,\ x, y \in F$،

(۲) اگر $x \in F$ و $x \leq y$، آن گاه $y \in F$.

مثال۱-۲,۵ فرض کنید A یک BL –جبر باشد، آن گاه $\{1\}$ و A فیلترهای بدیهی A هستند.

مثال۱-۳,۵ فرض کنید $B = \{0, a, b, 1\}$ یک BL –جبر باشد، که عملگرهای $\to$ و $*$ روی B به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	b	1	1	1
1	0	a	b	1

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	b	a
b	0	b	0	b
1	0	a	b	1

آنگاه $F = \{a, 1\}$ یک فیلتر از B است.

قضیه۱-۴,۵[۱] فرض کنید برای هر $i \in I$، A_i یک BL–جبر و F_i یک فیلتر از A_i باشد، آن گاه $\Pi_{i\in I} F_i$ یک فیلتر از $\Pi_{i\in I} A_i$ است.