بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم **رضوان غفاری** رشته **ریاضی‌کاربردی** به شماره دانشجویی ۹۰۵۲۰۴۱۰۱۵ تحت عنوان: «**تجزیه و تحلیل روش‌های تفاضلات متناهی و اسپلاین برای معادلات زیر انتشار کسری**» را در تاریخ ۱۳۹۲/۱۰/۱۸ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر مهدیه طهماسبی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر محمدرضا اصلاحچی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مصطفی شمسی	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدرضا اصلاحچی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی کاربردی** است که در سال **۱۳۹۲** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای **دکتر سید محمد حسینی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **رضوان غفاری** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **رضوان غفاری**

تاریخ و امضا: **۹۲/۱۰/۲۲**

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **رضوان غفاری** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** ورودی سال تحصیلی **۱۳۹۰** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۲/۱۰/۲۲

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
گروه ریاضی کاربردی

تجزیه و تحلیل روش‌های تفاضلات متناهی و اسپلاین برای معادلات زیر انتشار کسری

نگارنده:

رضوان غفاری

استاد راهنما:

دکترسید محمد حسینی

دی ماه ۱۳۹۲

تقدیم به مهربان فرشتگانی که

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست

پدر و مادر بزرگوارم

و برادران عزیزم.

تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستیمان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.
صمیمانه‌ترین سپاس‌ها را تقدیم می‌کنم به وجود پدر و مادر مهربانم که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار برایم بوده‌اند.
از استاد فرزانه و بزرگوارم جناب آقای دکتر سید محمد حسینی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و یاری‌ها و راهنمایی‌های ایشان همواره بسیاری از سختی‌ها را برای من هموار نمود، سپاس‌گزارم.
همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر شمسی، جناب آقای دکتر اصلاحچی و سرکار خانم دکتر طهماسبی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه حل عددی یک کلاس از معادلات زیر انتشار کسری در دامنه‌ی نامتناهی در یک بعد و دو بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای به دست آوردن جواب عددی این معادلات در دامنه‌ی نامتناهی از روش مرز مصنوعی استفاده می‌کنیم. در این روش ابتدا شرایط مرزی مصنوعی دقیق و تقریبی را برای معادلات زیر انتشار کسری در دامنه‌ی نامتناهی در یک بعد و دو بعد به کمک تبدیلات لاپلاس به دست می‌آوریم، سپس با تبدیل مسئله‌ی اصلی به یک مسئله‌ی مقدار مرزی-اولیه در دامنه‌ی متناهی با استفاده از شرایط مرزی مصنوعی به دست آمده، آن را با یکی از روش‌های عددی حل می‌کنیم. برای به دست آوردن جواب عددی مسئله‌ی مقدار مرزی-اولیه در دامنه‌ی متناهی در یک بعد، از روش‌های تفاضلات متناهی و اسپلاین چند جمله‌ای و غیر چند جمله‌ای، و در دو بعد از روش کرانک-نیکلسون کلاسیک برای تقریب متغیرهای مکانی و از تقریب L1 برای تقریب مشتق کسری کاپتو نسبت به زمان استفاده می‌کنیم. نتایج عددی متناسب، برای نمایش کارایی روش‌های ارائه شده نیز آورده شده است.

کلمات کلیدی: معادلات زیر انتشار کسری، دامنه‌ی نامتناهی، مشتق کسری کاپتو، مرز مصنوعی، تبدیل لاپلاس، تفاضل متناهی، اسپلاین چندجمله‌ای و غیر چندجمله‌ای.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی کسری و حسابان کسری در زمینه‌های متفاوتی از جمله سیستم‌های فیزیکی مثل پدیده‌ی انتشار غیرعادی ذرات، زمین شناسی، علوم محیط زیست، مهندسی برق و مکانیک کاربرد دارند. یکی از کارآمدترین روش‌ها برای توصیف پدیده‌ی انتشار غیر عادی ذرات، حسابان کسری و معادلات مربوط به معادلات انتشار کسری می‌باشد. اگر جمله‌ی مشتق مرتبه ی اول نسبت به زمان در معادله‌ی انتشار کلاسیک را با مشتق کسری مرتبه‌ی $\alpha(0 < \alpha < 2)$ جایگزین کنیم، معادله‌ی انتشار غیر عادی کسری به دست می‌آید. اگر در این معادله $0 < \alpha < 1$ باشد، معادله‌ی زیر انتشار کسری و اگر $1 < \alpha < 2$ باشد، معادله‌ی بالا انتشار کسری نامیده می‌شود.
معادلات زیر انتشار کسری در دامنه‌ی متناهی در یک بعد و دو بعد، از جنبه‌های متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته است. روش‌های عددی بسیاری، برای حل این گونه معادلات، در دامنه‌ی متناهی به کار رفته است. برای مثال، روش‌های تفاضلات متناهی صریح و ضمنی [1] [۲، ۱۰، ۱۱، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۵۶، ۶۶، ۶۷، ۷۱، ۷۶، ۷۷، ۸۰، ۸۱، ۸۲]، روش توابع پایه‌ای شعاعی ضمنی [2] [۴۵]، روش تفاضلات متناهی فشرده [3] [۱۳، ۱۴، ۱۸، ۲۵]، روش جهت متناوب ضمنی [4] (ADI)[۷۰، ۷۹] و غیره.
پژوهش در مورد معادلات مرتبه‌ی کسری در دامنه‌ی نامتناهی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سختی به دست آوردن جواب عددی برای چنین معادلاتی روی دامنه‌های نامتناهی، در نامتناهی بودن دامنه‌ی فیزیکی آن‌ها قرار دارد. مقالات زیادی در زمینه‌ی جواب تحلیلی مسائل کسری در دامنه‌ی نامتناهی با استفاده از روش‌های گوناگون از جمله تبدیلات لاپلاس و فوریه بحث کرده‌اند، که جواب این گونه مسائل اغلب بر اساس توابع Fox H، M-Wright، Mittag-Leffler و غیره بیان می‌شود که این توابع به فرم سری هستند و محاسبه آن‌ها کار راحتی نیست. به دلیل کاربردی بودن مسائل کسری در

[1] Explicit and implicit finite difference

[2] Radial basis functions

[3] Compact finite difference

[4] Alternative direction implicit

دامنه‌ی نامتناهی، ما نیاز داریم که جواب عددی آن‌ها را به دست آوریم که در مورد جواب عددی این گونه مسائل خیلی بحث نشده است. روش‌های زیادی برای به دست آوردن جواب عددی مسائل کسری در دامنه‌ی نامتناهی وجود دارد که روش مرز مصنوعی [۵] (ABM) یکی از مهمترین و کارآمدترین روش‌هاست که برای به دست آوردن جواب عددی معادلات دیفرانسیل جزئی در دامنه‌ی نامتناهی به کار می‌رود و اخیرا مورد توجه قرار گرفته است. به طور مثال برای مسائل مرتبه‌ی صحیح مانند معادلات موج [۶] [۲۱، ۳۳، ۶۰] ، معادلات سهموی [۷][۳۰، ۳۱، ۷۳] و انواع معادلات دیگر [۳۴] ، برای مسائل مرتبه‌ی کسری مانند معادلات زیر انتشار کسری یک بعدی و دو بعدی [۲۳، ۲۴، ۲۶، ۲۷] .

در روش مرز مصنوعی، ابتدا یک مرز مصنوعی معرفی می‌کنیم، سپس دامنه‌ی اصلی نامتناهی را روی مرز مصنوعی به دو زیر دامنه‌ی متناهی و نامتناهی تقسیم می‌کنیم، آنگاه با تجزیه و تحلیل مسئله در زیر دامنه‌ی نامتناهی، شرایط مرزی مصنوعی دقیق و تقریبی را به دست می‌آوریم، سپس با استفاده از شرایط مرزی مصنوعی به دست آمده، مسئله‌ی اصلی در دامنه‌ی نامتناهی را به یک مسئله‌ی مقدار مرزی-اولیه در زیر دامنه‌ی متناهی تبدیل می‌کنیم. حال می‌توان جواب‌های عددی مسئله‌ی مقدار مرزی-اولیه در زیر دامنه‌ی متناهی را با یکی از روش‌های عددی، به دست آورد.

در این پایان‌نامه، در فصل اول به بیان مقدماتی در مورد حسابان کسری می‌پردازیم. در فصل دوم، شرط مرزی مصنوعی دقیق برای یک کلاس از معادلات زیر انتشار کسری در دامنه‌ی نامتناهی در یک بعد به دست آمده است، سپس جواب‌های عددی مسئله‌ی مقدار مرزی-اولیه در زیر دامنه‌ی متناهی، با استفاده از روش تفاضلات متناهی به دست می‌آید. سپس همگرایی و پایداری روش مورد بحث قرار می‌گیرد. در فصل سوم با استفاده از همان شرط مرزی مصنوعی به دست آمده در فصل دوم، جواب‌های عددی مسئله‌ی مقدار مرزی-اولیه در زیر دامنه‌ی متناهی را با استفاده از روش‌های اسپلاین مربعی [۸]، مکعبی [۹] و غیر چندجمله ای [۱۰]، به دست می‌آوریم. سپس سازگاری و پایداری روش‌های ارائه شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل چهارم، شرایط مرزی مصنوعی دقیق و تقریبی برای معادلات زیر انتشار کسری در دامنه‌ی نامتناهی در دو بعد را برای اولین بار، به کمک تبدیلات لاپلاس [۱۱] و یک

[۵] Artificial boundary method

[۶] Wave equations

[۷] Parabolic equations

[۸] Quadratic spline method

[۹] Cubic

[۱۰] Nonpolynomial

[۱۱] Laplace transforms

سری از ویژگی‌های جالب توابع بسل اصلاح شده‌ی نوع دوم [۱۲] ، به دست می‌آوریم، سپس برای نشان دادن کارایی شرایط مرزی مصنوعی به دست آمده، مسئله‌ی مقدار مرزی-اولیه در زیر دامنه‌ی متناهی در دو بعد را با روش کرانک- نیکلسون کلاسیک [۱۳] حل می‌کنیم. جواب عددی معادلات زیر انتشار کسری در دامنه‌ی نامتناهی در دو بعد با استفاده از روش مرز مصنوعی، کار جدیدی می‌باشد که برای اولین بار در این جا به دست آمده است. مرجع اصلی در این پایان‌نامه [۲۳] می‌باشد. نوآوری‌های این پایان‌نامه، در مقالات [۲۶، ۲۷] ارائه شده است.

[۱۲] Modified Bessel functions of second kind

[۱۳] Classical Crank-Nicolson

فصل ۱

مقدمه‌ای بر حسابان کسری

در این فصل به معرفی چند تابع خاص از جمله تابع گاما[۱]، بتا[۲]، میتاگ لفلر[۳]و رایت[۴] که در حسابان کسری نقش مهمی را ایفا می‌کنند می‌پردازیم. سپس عملگرهای مشتق کسری [۵] ، تبدیلات لاپلاس کسری [۶] ، معادلات دیفرانسیل جزئی [۷] با مشتقات کسری و کاربردهایش را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱ تابع گاما

یکی از توابع اساسی در حسابان کسری تابع گامای اویلر می‌باشد که تعمیمی از تابع فاکتوریل، یعنی $n!$ می باشد و باعث می‌شود که n مقادیر ناصحیح نیز بگیرد.

تعریف ۱.۱. تابع گاما را با نماد $\Gamma(z)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت انتگرالی زیر

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{z-۱} \, \mathrm{d}t,$$

تعریف می‌شود، که در نیم صفحه راست مختلط همگراست و نمایش حدی آن به صورت زیر است:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+۱)\ldots(z+n)},$$

---

[۱] Gamma function

[۲] Beta function

[۳] Mittag-Leffler

[۴] Wright

[۵] Fractional derivative operators

[۶] Fractional Laplace transforms

[۷] Partial differential equations

که فرض می‌کنیم $Re(z) > ۰$ است.

در زیر بعضی از ویژگی‌های این تابع را بیان می‌کنیم.

- تابع گاما در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند

$$\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z)$$

که با استفاده از انتگرال جز به جز به راحتی اثبات می‌شود.

- تابع گاما دارای قطب ساده در $z = -n(n = ۰, ۱, ۲, ...)$ می‌باشد.

- تابع گاما هیچ گاه صفر نیست.

- از تابع گاما برای به دست آوردن ضرایب دو جمله‌ای می‌توان استفاده نمود

$$\binom{z}{w} = \frac{z!}{w!(z-w)!} = \frac{\Gamma(z+۱)}{\Gamma(w+۱)\Gamma(z-w+۱)}.$$

- فرمول استرلینگ برای تابع گاما به صورت

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-\frac{۱}{۲}} (۲\pi)^{\frac{۱}{۲}} \left[۱ + \frac{۱}{۱۲z} + \frac{۱}{۲۸۸z^۲} - \frac{۱۳۹}{۵۱۸۴۰z^۳} - \frac{۵۷۱}{۲۴۸۸۳۲۰z^۴} + ...\right],$$

$$(z \to \infty \quad in \quad |\arg z| < \pi \quad)$$

است.

- تابع گاما در صفحه‌ی مختلط به صورت زیر است:

$$\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)},$$

$$\arg\Gamma(z+۱) = \arg\Gamma(z) + \arctan\frac{y}{x}.$$

- فرمول مجانبی آن به صورت

$$\Gamma(az+b) \sim \sqrt{۲\pi} e^{-az} (az)^{az+b-\frac{۱}{۲}}, \qquad (|\arg z| < \pi, a > ۰),$$

است.

برای مطالعه بیشتر در مورد ویژگی‌های بیشتر این تابع به مراجع [۱۷، ۵۸، ۵۹] مراجعه شود.

۲.۱ تابع بتا

در بیشتر موارد بهتر است که به جای استفاده از ترکیب معینی از مقادیر تابع گاما، از تابع بتا استفاده کنیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید z و w دو متغیر مختلط با قسمت‌های حقیقی مثبت باشند. در این صورت تابع بتا به‌صورت

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt=\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2z-1}(\cos t)^{2w-1}dt,$$

تعریف می‌شود.

همچنین بین تابع گاما و تابع بتا رابطه‌ی

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

برقرار است. که با توجه به این رابطه داریم

$$B(z,w)=B(w,z).$$

۳.۱ تابع میتاگ-لفلر

تعریف ۳.۱. برای هر $\alpha>0$ تابع میتاگ-لفلر تک پارامتری به صورت

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \tag{1.1}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۱. برای هر $\alpha>0$ و $\beta>0$ تابع میتاگ-لفلر دو پارامتری به صورت

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \tag{2.1}$$

تعریف می‌شود.

روابط زیر برای تابع میتاگ-لفلر برقرارند:

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z,$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)}=\frac{e^z-1}{z},$$