بسم اللّه الرحمن الرحيم

٤٧٩٩٩

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تقدیم مدارک
۱۳۸۲ /۷/ ۱۰۶

دانشگاه تبریز

دانشکده فیزیک

گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه دکتری تخصصی در رشته فیزیک نظری

عنوان:

مطالعه همبستگی کوانتومی سیستمهای بس ذره‌ای pure و mixed

استاد راهنما:

دکتر محمد علی جعفری زاده

اساتید مشاور:

دکتر منوچهر کلافی و دکتر رضا صفری

پژوهشگر:

سید جواد اختر‌شناس

۴۷۶۹۹

تیر ماه ۱۳۸۲

شماره: ۸

نام خانوادگی دانشجو: اخترشناس	نام: سید جواد
عنوان پایان نامه: مطالعه همبستگی کوانتومی سیستمهای بس ذره‌ای pure و mixed	
استاد راهنما: دکتر محمد علی جعفری زاده	
اساتید مشاور: دکتر منوچهر کلافی و دکتر رضا صفری	
مقطع تحصیلی: دکتری	رشته: فیزیک گرایش: نظری دانشگاه: تبریز
دانشکده: فیزیک	تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۸۲/۴/۱۴ تعداد صفحه: ۱۱۷
کلید واژه ها: درهم تنیدگی کوانتومی، تجزیه Lewenstein-Sanpera، قدرت درهم تنیدگی، تبدیلات LOCC، فضای هم مجموعه $SO(4,c)/SO(4,r)$	

چکیده:

هدف از این پایان‌نامه مطالعه همبستگی کوانتومی سیستمهای مرکب در حالتهای pure و mixed است. در این راستا نشان داده شده است که برای سیستمهای $2\otimes 2$ و $3\otimes 2$ معیار جداپذیری CCN ضعیف تر از معیار PPT است. همچنین تجزیه L-S را برای حالات BD سیستم $2\otimes 2$، حالتهای مرتبه کامل این سیستمها بااستفاده از تبدیلات LOCC و همچنین حالتهای دلخواه از این سیستمها با استفاده از پایه‌های بدست آورده‌ایم. نشان داده شده است که در تمامی موارد فوق متوسط concurrence تجزیه بدست آمده برابر با concurrence حالات است. همچنین نشان داده شده است که برای حالات BD، قسمت جداپذیر تجزیه آنتروپی نسبی فون نویمن را نیز می‌نیمم می‌کند. همچنین با استفاده از فشردگی و محدب بودن فضای ماتریسهای چگالی، تجزیه را برای چندین سیستم مرکب همچون، حالتهای BD سیستم $2\otimes 2$، حالت دلخواه از سیستم $2\otimes 2$، حالتهایی که با استفاده از تبدیلات LOCC تک پارامتری و سه پارامتری از حالتهای BD حاصل می‌شوند، حالتهای ICD، حالتهای Werner و ایزوتروپ سیستمهای $d\otimes d$، حالت تک پارامتری از سیستم $3\otimes 3$ و نهایتاً حالات ایزوتروپ سیستم n ذره‌ای d—ترازی بدست آورده‌ایم. نشان داده شده است که در تمامی حالتهایی که قسمت درهم تنیده تجزیه تنها یک حالت خالص است، متوسط concurrence (تعمیم یافته) تجزیه برابر با concurrence (تعمیم یافته) حالت است و برای این حالتها توانسته‌ایم مقدار concurrence (تعمیم یافته) را بدست آوریم. همچنین قدرت درهم تنیدگی را برای حالات BD سیستم $2\otimes 2$، دسته‌ای از حالتها که با استفاده از تبدیلات LOCC از حالات BD حاصل می‌شوند، حالت دلخواه از سیستم $2\otimes 2$ و حالات BD سیستم $3\otimes 2$ بدست آورده‌ایم. نشان داده شده است که برای حالات $2\otimes 2$ این کمیت متناسب با concurrence و برای حالت BD این سیستمها دقیقاً برابر با concurrence است. در خاتمه نشان داده شده است که حالت دلخواه از سیستم $2\otimes 2$ را می‌توان توسط ماتریسهای $SO(4,c)$ همرا با چهار عدد Wootters $\{\lambda_i\}$ نمایش داد بطوریکه تبدیلات یکانی محلی با گروه $SO(4,r)$ نمایش داده می‌شوند و در نهایت صرفنظر از تبدیلات یکانی محلی پارامتریزاسیونی بر حسب فضای هم مجموعه $SO(4,c)/SO(4,r)$ برای این حالات ارائه شده است.

همتم بدرقه راه کن ای طائر قدس
که دراز است ره مقصد و من نو سفرم

این مختصر
تقدیم به
پدر و مادر عزیزم
به پاس محبتشان
و سپاس از زحمات بی دریغ شان
و به
خواهران و برادرانم

با سپاس از:

- استاد گرانقدر آقای دکتر محمد علی جعفری زاده که راهنمایی این پایان نامه را به عهده داشتند و در طی انجام آن راه گشای مشکلات پژوهشی بودند. و نیز بخاطر همهٔ آنچه در دانشگاه تبریز آموختم مدیون و سپاسگذار ایشان هستم.
- اساتید محترم مشاور آقای دکتر منوچهر کلافی و دکتر رضا صفری.
- اساتید محترم داور پایان نامه آقایان دکتر وحید کریمی پور از دانشگاه صنعتی شریف و دکتر رسول رکنی زاده از دانشگاه اصفهان و آقایان دکتر حسین متولی و دکتر ناصر فولادی از دانشگاه تبریز.
- تمامی دانشجویان دکترا فیزیک نظری دانشگاه تبریز که همیشه با محبتشان مرا شرمنده خود ساختند.
- تمامی دوستانی که سالیان تبریز را در کنار آنها بودم.

فهرست مندرجات

I مقدمه و بررسی منابع ۵

۱ مقدمه ۶

۲ درهم تنیدگی کوانتومی ۱۴

۲—۱ معیارهای جداپذیری ۱۵
۲—۱—۱ معیار PPT ۱۵
۲—۱—۲ شاهد درهم تنیدگی و نگاشتهای مثبت ۱۶
۲—۱—۳ معیار GCN و CCN ۱۷
۲—۱—۴ مقایسه معیارهای PPT و CCN ۲۰

۲—۲ سنجه‌های درهم تنیدگی ۲۲
۲—۲—۱ درهم تنیدگی شکل یابی ۲۳
۲—۲—۲ تلاقی ۲۴
۲—۲—۳ تلاقی—I ۲۶
۲—۲—۴ آنتروپی نسبی درهم تنیدگی ۲۷

۲—۳ تجزیه L-S ۲۸

۲—۴ قدرت درهم تنیدگی ۳۰

۲—۵ تبدیلات LOCC ۳۱

۲—۶ نورم فیزیکی برمبنای پایه‌های ووترز ۳۳

۲—۷ حالتهای BD سیستم $2 \otimes 2$ ۳۴

۲—۸ حالتهای ICD ۳۷

II روش و محاسبات نظری ۴۱

۳ تجزیه L-S سیستم $2 \otimes 2$ ۴۲

۳—۱ تجزیه L-S حالتهای BD ۴۲

۳—۱—۱ حالتهای حاصلضربی کانونیک ۴۳

۳—۱—۲ حالتهای حاصلضربی ووترز ۴۵

۳—۱—۳ تجزیه L-S و آنتروپی نسبی درهم تنیدگی ۴۸

۳—۲ اثر تبدیلات LOCC بر تجزیه L-S ۴۹

۳—۳ تجزیه L-S حالتهای ICD ۵۲

۳—۴ تجزیه L-S ماتریس چگالی دلخواه سیستم $2 \otimes 2$ بر حسب پایه‌های ووترز . . . ۵۶

۴ تجزیه L-S سیستمهای دو ذره‌ای ۶۱

۴–۱ حالتهای BD سیستم $2 \otimes 2$ ۶۳

۴–۲ حالت دلخواه سیستم $2 \otimes 2$ در پایه‌های ووترز ۶۴

۴–۳ حالتهای ICD ۶۵

۴–۴ تبدیلات LOCC تک پارامتری ۶۷

۴–۵ تبدیلات LOCC سه پارامتری ۷۰

۴–۶ حالتهای BD سیستم $2 \otimes 3$ ۷۳

۴–۷ حالتهای ورنر سیستم $d \otimes d$ ۷۷

۴–۸ حالتهای ایزوتروپ سیستم $d \otimes d$ ۷۸

۴–۹ حالت تک پارامتری از سیستم $3 \otimes 3$ ۷۹

۴–۱۰ حالتهای ایزوتروپ سیستم $d \otimes \cdots \otimes d \otimes d$ ۷۹

۵ قدرت درهم تنیدگی سیتمهای $2 \otimes 2$ و حالتهای BD سیستمهای $2 \otimes 3$ ۸۱

۵–۱ قدرت درهم تنیدگی حالات BD ۸۱

۵–۲ اثر تبدیلات LOCC بر قدرت درهم تنیدگی ۸۶

۵–۳ قدرت درهم تنیدگی حالت دلخواه سیستم $2 \otimes 2$ ۸۹

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

۴–۵ قدرت درهم تنیدگی حالتهای BD سیستم $2 \otimes 3$ ۹۶

۶ نمایش هم مجموعه‌ای ماتریسهای چگالی سیستمهای $2 \otimes 2$ ۱۰۰

III نتایج و بحث ۱۰۵

۷ نتیجه گیری ۱۰۶

A ۱۰۹

بخش I

مقدمه و بررسی منابع

فصل ۱

مقدمه

بدون شک درهم تنیدگی کوانتومی[1] یکی از شگفت انگیزترین وجههای مکانیک کوانتومی است. این پدیده غیر کلاسیکی که اولین بار در سال ۱۹۳۵ توسط اینشتین در مقاله معروف EPR[2] [۱] و شرودینگر [۲] معرفی شد سالیان درازی توجه زیادی را به خود جلب نمود. اینشتین و پیروانش بر این عقیده بودند که وجود چنین پدیدههایی در مکانیک کوانتومی دلیل بر نقص آنست و لذا معتقد بودند که با استفاده از متغیر نهانی[3] میتوان نظریه کاملی بدون اثرات غیر—موضعیت[4] بوجود آورد. در این راستا تلاشهای زیادی برای توسعه متغیر نهانی صورت گرفت که برجستهترین آنها توسط بوهم[5] [۳] انجام شد. از طرفی بل[6] [۴] در سال ۱۹۶۴ نشان داد که تمامی تلاشها برای توسعه نظریه متغیر نهانی محکوم به شکست است چرا که اصولاً ایدههای مقاله EPR در باره موضعیت با بعضی پیش بینی های مکانیک کوانتومی ناسازگار است. بل نشان داد که وجود مدلی مبتنی بر متغیر نهانی برای مکانیک کوانتومی مستلزم بر قراری یک نامساوی (نامساوی بل) است، در حالیکه مکانیک کوانتومی پیش بینی حالتهایی را میکند که نامساوی را نقض میکنند. پس از مقاله بل درهم تنیدگی کوانتومی موضوعی برای مطالعه علاقمندان مبانی کوانتومی قرار گرفت.

از طرفی در سالهای اخیر نیز از منظری متفاوت توجه زیادی به درهم تنیدگی کوانتومی جلب شده

---

quantum entanglement[1]
Einestein Podolsky Rosen[2]
hidden variable[3]
non-locality[4]
Bohm[5]
Bell[6]

است. این توجه بدلیل نقشی است که درهم تنیدگی کوانتومی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی[7] همچون رمزنگاری[8]، کدگذاری فشرده[9]، انتقال از راه دور[10] و همچنین محاسبات کوانتومی[11] ایفاء می‌کند [۵، ۶، ۷، ۸]. درهم تنیدگی کوانتومی معمولاً از هم بستگی کوانتومی بین زیرسیستمهای جدا از هم ناشی می‌شود. این هم بستگی کوانتومی که نمی‌توان آنرا توسط عملیات محلی بر روی زیرسیستمهای جدا از هم بوجود آورد معمولاً در زیرسیستمهایی وجود دارد که تنها در گذشته با یکدیگر بر هم کنش داشته و اکنون هیچ بر هم کنشی با یکدیگر ندارند. بنابراین اگر دو سیستم در گذشته برهم کنش داشته باشند عموماً این امکان وجود ندارد که حالت هر یک از زیرسیستمها را مستقل از دیگری معین نمود.

بنا به تعریف، حالت خالص[12] $|\psi\rangle$ یک سیستم N ذره‌ای را حالت درهم تنیده[13] گویند اگر نتوان آنرا بصورت حاصلضرب تانسوری از حالتهای خالص هر یک از زیرسیستمها بصورت:

$$|\psi\rangle = \left|\psi^A\right\rangle \otimes \left|\psi^B\right\rangle \otimes \cdots \left|\psi^N\right\rangle,$$

(که در آن $\left|\psi^A\right\rangle$، $\left|\psi^B\right\rangle$ و ... بترتیب بیانگر حالت خالص زیرسیستمهای A، B و ... است) نوشت. در غیر اینصورت $|\psi\rangle$ را حالت حاصلضرب[14] گویند. برای حالتهای آمیخته[15]، بسته به اینکه چه نوع همبستگی در سیستم وجود داشته باشد حالتهای مختلف را می‌توان در نظر گرفت. ساده ترین وضعیت زمانی است که زیرسیستمها هیچگونه همبستگی نداشته باشند و لذا ماتریس چگالی سیستم را می توان بصورت ضرب مستقیم زیرسیستمها نوشت ($\rho_p = \rho_A \otimes \rho_B \otimes ... \otimes \rho_N$)، که به آن حالت حاصلضرب گفته می‌شود. از طرفی بر اساس تعریفی که ورنر[16] [۹] برای جداپذیری حالتهای آمیخته ارائه نموده است ماتریس چگالی ρ_s یک سیستم N ذره‌ای را جداپذیر[17] گویند اگر سیستم تنها همبستگی کلاسیکی

---

quantum information processing[7]
cryptography[8]
dense coding[9]
teleportation[10]
quantum computation[11]
pure state[12]
entangled state[13]
product state[14]
mixed state[15]
Werner[16]
separable[17]

داشته باشد. در اینصورت ρ_s را می‌توان بصورت ترکیبی از حالتهای حاصلضرب نوشت:

$$\rho_s = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \otimes ... \otimes \rho_i^N, \qquad p_i \geq 0, \qquad \sum_i p_i = 1.$$

وجود همبستگی کوانتومی باعث می شود که ماتریس چگالی این سیستمها را نتوان بشکل ترکیبی از حاصلضربها با ضرائب مثبت نوشت. در این صورت آنرا در هم تنیده گویند.

یکی از اهداف مهم نظریه اطلاعات کوانتومی تعیین جداپذیری حالت مورد نظر می‌باشد. در واقع هر چند برای حالتهای خالص سیستم دو ذره‌ای روشهای مختلف (اما معادلی) جهت تشخیص جداپذیری حالت مورد نظر وجود دارد [۴، ۱۰]، اما این موضوع برای سیستمهای آمیخته و حتی حالتهای خالص سیستمهای با بیش از دو ذره بطور کامل حل نشده است. بعنوان مثال هر چند تمامی حالتهای خالص سیستم دو ذره‌ای که نامساوی بل [۴] (و یا یکی از اشکال معادل آن [۱۱]) را نقض کنند درهم تنیده کوانتومی هستند ولی ورنر[18] [۹] و پوپسکو[19] [۱۲، ۱۳] نشان دادند که حالتهایی وجود دارند که علی‌الرغم ارضاء نامساوی بل، می‌توانند در فرآیند انتقال از راه دور استفاده شوند و لذا هم بسته کوانتومی هستند. همچنین گیسین[20] [۱۴] نشان داده است که حالتهایی وجود دارند که فرم CHSH[21] نامساوی بل را نقض نمی‌کنند اما در اثر اعمال LOCC[22] و خالص سازی[23]، حالتهایی بوجود می آورند که قادر به نقض نامساوی CHSH می‌باشند و لذا نامساوی CHSH نیز نمی‌تواند معیار خوبی برای اندازه‌گیری همبستگی کوانتومی باشد.

اولین گام جهت تشخیص جداپذیری سیستمهای آمیخته چند ذره‌ای معیار PPT[24] نام دارد که توسط پِرس[25] [۱۵] و خانواده هورودکی[26] [۱۶] صورت گرفت. پِرس نشان داد که اگر ماتریس چگالی ρ جداپذیر باشد آنگاه ماتریس حاصل از ترانهاد پاره‌ای[27] آن بایستی غیر منفی باشد. ترانهاد پاره‌ای ماتریس چگالی ρ از ترانهاد ρ نسبت به یکی از زیر سیستمها حاصل می‌شود. هورودکی ها نشان دادند که معیار پِرس تنها برای سیستمهای دو ذره‌ای با ابعاد $2 \otimes 2$ و $2 \otimes 3$ شرط لازم و کافی برای جداپذیری

---

[18] Werner
[19] Popescu
[20] Gisin
[21] Clauser, Horne, Shimony and Holt
[22] Local Operations and Classical Comunications
[23] purification
[24] Positive Partial Transpose
[25] Peres
[26] Horodecki
[27] partial transpose

می‌باشد.

از طرفی دیدگاه دیگری در مطالعه جداپذیری سیستمهای مرکب مبتنی بر مفهوم مشاهده پذیری بنام شاهد درهم تنیدگی[28] و همچنین نگاشتهای مثبت[29] وجود دارد [۱۹، ۱۸، ۱۷]. شاهدان درهم تنیدگی عملگرهای هرمیتی (مشاهده پذیر) هستند که مقادیر میانگین منفی آنها شاهدی بر درهم تنیدگی حالت کوانتومی است. بر مبنای این عملگرها، یک حالت جداپذیر است اگر هیچ شاهد درهم تنیدگی آنرا شناسایی نکند و یا بطور معادل یک حالت درهم تنیده است اگر و تنها اگر یک شاهد درهم تنیدگی وجود داشته باشد که آنرا شناسایی کند. همچنین بر اساس تعریف نگاشتهای مثبت، ماتریس چگالی ρ که در فضای هیلبرت $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ تعریف می‌شود جداپذیر است اگر و تنها اگر $[I \otimes \Lambda](\rho)$ بازای تمامی نگاشتهای مثبت Λ، مثبت باشند. معیارهای بالا هر چند برای جداپذیری سیستمهای مرکب شرط لازم و کافی ارائه می‌دهند ولی استفاده عملی از آنها کار ساده‌ای نیست.

معیار دیگری برای تشخیص درهم تنیدگی سیستمهای دو ذره‌ای بر مبنای نورم کلاس ردّ[30] می‌باشد که توسط رودولف[31] [۲۱، ۲۰] ارائه شد. بر مبنای این معیار (که شرط لازم و کافی برای جداپذیری ارائه می‌دهد)، رودولف همچنین معیار کاربردی تر CCN[32] را ارائه نمود که تنها شرط لازم برای جداپذیری سیستمهای دو ذره‌ای ارائه می‌کند [۲۲].

مسئله دیگری که در نظریه اطلاعات کوانتومی مطرح است تعیین مقدار کمّی درهم تنیدگی یک حالت درهم تنیده است. در واقع درهم تنیدگی کوانتومی همانند پتانسیل در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی عمل می‌کند و لذا بایستی بتوان مانند هر پتانسیلی مقدار کمی برای آن تعریف کرد. هر تابعی که مقدار کمی درهم تنیدگی کوانتومی را مشخص کند سنجه درهم تنیدگی[33] نامیده می‌شود. از مهمترین سنجه‌هایی که تا کنون برای تعیین محتوای کمی درهم تنیدگی کوانتومی سیستمهای دو ذره‌ای پیشنهاد شده است درهم تنیدگی شکل یابی[34] است که توسط بِنِت[35] و همکارانش [۸] معرفی شد. درهم تنیدگی شکل یابی در واقع مقدار کمی منابع لازم برای تولید یک حالت درهم تنیده را

---

[28] entanglement witness
[29] positive map
[30] trace class norm
[31] Rudolph
[32] Computable Cross Norm
[33] entanglement measure
[34] entanglement of formation
[35] Bennett