

الحمد لله
البرحمين



دانشگاه صنعتی اصفهان

10110

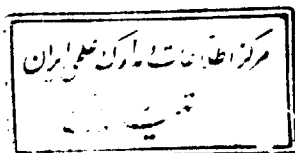
دانشکده مکانیک

برآورد خطا و حل تطبیقی در روش اجزاء محدود

پایان نامه کارشناسی ارشد مکانیک (طراحی کاربردی)

۱۳۸۰ / ۱ / ۱۰

منصور شیرزاد مرگای



استاد راهنما

دکتر مهدی کشمیری

۱۳۷۸

۳۳-۱۸



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد طراحی کاربردی آقای منصور شیرزاد مرگاوی

تحت عنوان

برآورد خطا و حل تطبیقی در روش اجزاء محدود

توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

در تاریخ

۱ - استاد راهنمای پایان نامه

دکتر مهدی کشمیری

۲ - استاد مشاور پایان نامه

دکتر محمود فرزین

۳ - استاد داور

دکتر محمد جعفر صادقی

۴ - استاد داور

دکتر محمود همای

دکتر حسن خادمی زاده

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

تقدیر و تشکر:

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای پایان نامه جناب آقای دکتر مهدی کشمیری تشکر و تقدیر فراوان بعمل می آورم چه اینکه تلاشها و پیگیریهای مجدانه و مشوقانه ایشان در مسیر انجام پایان نامه، بسیار چشمگیر و قابل توجه بوده است به خصوص در زمینه برنامه نویسی کامپیوتری و پیدا کردن الگوریتم مناسب برای حل مسأله، ایشان بسیار به اینجانب یاری رسانده اند و بی شک، اگر زحمات ایشان نبود این پایان نامه به نتیجه نمی رسید.

از خدوند متعال برای این استاد گرانقدر توفیق روزافزون مسئلت دارم و امیدوارم که سالیان درازی، همچنان مشفقانه به تلاش های علمی و تربیت دانشجویانی نظیر خود، مشغول و مستدام باشند.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات ،
ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع
این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی
اصفهان است .

تقدیم به:

پدر و مادرم، به پاس رنجهایی که در راه تربیت من، به جان خریدند

و

همسرم، به پاس فداکاریها و مهربانیهایی که همواره در حق من، روا داشته است.

فهرست مطالب

| عنوان | صفحه |
|--|-------|
| فهرست مطالب | شش |
| فهرست اشکال و نمودارها | نه |
| فهرست علائم | یازده |
| چکیده | ۱ |
| فصل اول: مقدمه | |
| مقدمه | ۲ |
| ۱-۱- پیشگفتار | ۲ |
| ۱-۲- تاریخچه | ۲ |
| ۱-۳- تعریف مسأله | ۵ |
| ۱-۴- محتویات پایان نامه | ۷ |
| فصل دوم: روشهای مختلف برآورد خطا و اصلاح شبکه در حل اجزاء محدود | |
| ۱-۲- مقدمه | ۹ |
| ۲-۲- خطاهای حاصل از تقریب زدن | ۱۰ |
| ۲-۳- نرمهای مختلف اندازه گیری خطا | ۱۱ |
| ۲-۴- همگرایی و دقت حل مسأله | ۱۲ |
| ۲-۵- روشهای مختلف برآورد خطا | ۱۴ |
| ۲-۵-۱- برآورد خطا بوسیله روش باقیمانده المانی | ۱۶ |
| ۲-۵-۲- برآورد خطا بوسیله روش بهبود مقادیر | ۱۷ |
| ۲-۶- حل تطبیقی در اجزاء محدود | ۱۹ |
| ۲-۷- حل تطبیقی باروش h | ۲۱ |

- ۲۱ ۱-۷-۲ - روشهای مختلف اصلاح شبکه
- ۲۲ ۲-۷-۲ - شکستن شبکه

فصل سوم: روش اجزاء محدود تطبیقی (AFEM) در مسائل صفحه‌ای

- ۲۷ ۱-۳ - مقدمه
- ۲۹ ۲-۳ - مسأله تنش صفحه‌ای
- ۳۱ ۳-۳ - حل اجزاء محدود
- ۳۲ ۱-۳-۳ - المان مستطیلی با ۸ درجه آزادی
- ۳۳ ۲-۳-۳ - توابع تغییر مکان (توابع شکل)
- ۳۶ ۳-۳-۳ - روابط کرنش - تغییر مکان و تنش - کرنش
- ۳۷ ۴-۳-۳ - بدست آوردن ماتریس سختی بوسیله روش انرژی
- ۳۸ ۵-۳-۳ - معادلات ماتریس سختی برای المان مستطیلی در حالت تنش سطحی
- ۴۰ ۴-۳ - بهبود مقادیر تنش حاصل از حل اجزاء محدود و برآورد خطا
- ۴۱ ۱-۴-۳ - محاسبه ماتریس A
- ۴۴ ۲-۴-۳ - محاسبه ماتریس C
- ۴۶ ۳-۴-۳ - انتگرال‌گیری عددی با روش گوس
- ۵۱ ۵-۳ - اصلاح شبکه
- ۵۲ ۶-۳ - الگوریتم کلی برای حل مسأله

فصل چهارم: ارائه نتایج حل مسأله

- ۵۴ ۱-۴ - خصوصیات مسأله
- ۵۵ ۲-۴ - ارائه نتایج
- ۵۵ ۱-۲-۴ - بررسی نتایج مربوط به مسأله شکل (۱-۴-الف)
- ۵۶ ۲-۲-۴ - بررسی نتایج مربوط به مسأله شکل (۱-۴-ب)
- ۵۷ ۳-۲-۴ - حل یک مسأله که در مرجع [۲۵] آمده است

فصل پنجم: نتیجه‌گیری

- ۷۴ ۱-۵ - نتیجه‌گیری
- ۷۵ ۲-۵ - پیشنهادات برای ادامه کار پروژه حاضر
- ۷۶ پیوست «الف»: نحوه بدست آوردن رابطه (۲-۸) از فصل دوم

| | |
|--|----|
| پیوست «ب»: سرهم کردن ماتریسهای سختی المانها و ساختن ماتریس سختی کل | ۷۷ |
| پیوست «ج»: اصلاح شبکه با استفاده از گره‌های وابسته (بدون استفاده از المانهای گذرا) | ۸۱ |
| مراجع و منابع | ۸۴ |

فهرست اشکال و نمودارها

| صفحه | عنوان |
|------|--|
| ۶ | شکل ۱-۱ - صفحه L شکل |
| ۱۲ | شکل ۱-۲ - راههای مختلف اندازه گیری خطا |
| ۱۴ | شکل ۲-۲ - نمودار لگاریتمی خطا در نرم L_p و نرم انرژی برحسب اندازه المان |
| ۲۰ | شکل ۲-۳ - اصلاح شبکه |
| ۲۳ | شکل ۲-۴ - شکستن شبکه |
| ۲۴ | شکل ۲-۵ - اتصال المانهای با مرتبه متفاوت (نمودار جابجایی) |
| ۲۵ | شکل ۲-۶ - اتصال المانهای با مرتبه متفاوت |
| ۲۶ | شکل ۲-۷ - مثالهایی برای اصلاح شبکه |
| ۲۸ | شکل ۳-۱ - مقایسه σ (حل دقیق) و $\hat{\sigma}$ (حل اجزاء محدود) و σ^* (مقادیر بهبود یافته) |
| ۳۲ | شکل ۳-۲ - المان مستطیلی تنش مسطح یا کرنش مسطح با ۸ درجه آزادی |
| ۳۴ | شکل ۳-۳ - المانهای مستطیلی |
| ۴۲ | شکل ۳-۴ - مسأله یک بعدی با توابع شکل خطی |
| ۴۷ | شکل ۳-۵ - نمایش تابع در مختصات سراسری و طبیعی |
| ۴۸ | شکل ۳-۶ - توضیح رابطه (۳-۶۹) |
| ۵۵ | شکل ۴-۱ - نمایش صفحه " L " شکل با شرایط مرزی متفاوت |
| ۵۸ | شکل ۴-۲ - مراحل مختلف حل مسأله |
| ۵۹ | شکل ۴-۲-۱ - مراحل مختلف حل مسئله (ادامه شکل ۴-۲) |
| ۶۰ | شکل ۴-۳ - مراحل مختلف اصلاح شبکه برای مسأله شکل (۴-۱ الف) و $m=6$ و $\bar{\eta}=0/14$ |
| ۶۱ | شکل ۴-۳-۱ - مقادیر η (نسبت خطای هر المان به خطای مجاز) در مراحل مختلف اصلاح شبکه که در شکل (۴-۳) آمده است |

- شکل ۴-۳-۲ - نمودار $\log \| e \|$ بر حسب $\log(NDOF)$ ۶۲
- شکل ۴-۴ - اثر شبکه اولیه در روند اصلاح شبکه برای مسأله شکل (۴-۱ الف) ۶۳
- شکل ۴-۵ - اثر عدد \bar{m} در روند اصلاح شبکه مسأله شکل (۴-۱ الف) ۶۴
- شکل ۴-۶ - مقایسه اصلاح شبکه بطور محلی و ریزکردن یکنواخت شبکه برای مسأله شکل (۴-۱ الف) ۶۵
- شکل ۴-۷ - مراحل مختلف اصلاح شبکه برای مسأله شکل (۴-۱ ب) $m=6$ و $\bar{m}=0/18$ ۶۶
- شکل ۴-۷-۱ - مراحل مختلف اصلاح شبکه (ادامه شکل ۴-۷) ۶۷
- شکل ۴-۸ - اثر شبکه اولیه در روند اصلاح شبکه برای مسأله شکل (۴-۱ ب) ۶۸
- شکل ۴-۹ - مقایسه اصلاح شبکه بطور محلی و ریزکردن یکنواخت شبکه برای مسأله شکل (۴-۱ ب) ۶۹
- شکل ۴-۱۰ - مراحل مختلف اصلاح یکنواخت شبکه برای مسأله شکل (۴-۱ ب) ۷۰
- شکل ۴-۱۰-۱ - مقادیر ϵ_j (نسبت خطای هر المان به خطای مجاز) در مراحل مختلف اصلاح شبکه (مربوط به شکل ۴-۱۰) ۷۱
- شکل ۴-۱۱ - مثالی از مراحل مختلف اصلاح شبکه که در مرجع [۲۵] آمده است ۷۲
- شکل ۴-۱۲ - حل همان مسأله‌ای که در مرجع [۲۵] آمده است ۷۳
- شکل ب-۱ - سرهم کردن ضرایب ماتریس سختی کل با استفاده از ضرایب سختی محلی ۷۷
- شکل ب-۲ - شبکه اجزاء محدود یک صفحه نازک ۷۸
- شکل ج-۱ - نمایش شبکه اولیه و شبکه شکسته شده ۸۱

فهرست علائم

| | | | |
|-----------------------------------|------------------|--|---------------------|
| خطا | e | تغییر مکان حاصل از حل دقیق | u |
| خطا در نرم ماکزیمم (نرم بی نهایت) | $\ e\ _{\infty}$ | تغییر مکان حاصل از حل اجزاء محدود | \hat{u} |
| خطا در نرم انرژی | $\ e\ _E$ | تغییر مکانهای گرهی برای یک المان | \bar{u} |
| خطا در نرم L_2 | $\ e\ _{L_2}$ | تنش حاصل از حل دقیق | σ |
| نرم خطای محلی بر روی یک المان | $\ e\ _i$ | تنش حاصل از حل اجزاء محدود | $\hat{\sigma}$ |
| خطای نسبی | η | تنش بهبود یافته | σ^* |
| خطای نسبی مجاز | $\bar{\eta}$ | مقادیر گرهی تنش بهبود یافته | $\bar{\sigma}^*$ |
| خطای مجاز | \bar{e}_m | کرنش حاصل از حل دقیق | ε |
| نسبت خطای هر المان به خطای مجاز | ε_i | کرنش حاصل از حل اجزاء محدود | $\hat{\varepsilon}$ |
| ماتریس سختی محلی (المانی) | K^e | توابع شکل سراسری | N |
| ماتریس سختی سراسری | K | توابع شکل محلی برای یک المان | N^e |
| تغییر مکانهای گرههای کل شبکه | \bar{x} | اپراتور دیفرانسیلی ارتباط دهنده کرنش و جابجایی | S |
| مقادیر نیروهای گره‌ای | f | ماتریس الاستیسیته | D |

چکیده

در این پایان‌نامه، روشهای مختلف برآورد خطا و اصلاح شبکه معرفی شده است. می‌توان آنها را به دو دسته عمده تقسیم نمود؛ روش باقیمانده المانی و روش مبتنی بر بهبود مقادیر. روش مبتنی بر بهبود مقادیر، که در این پایان‌نامه بطور خاص مورد استفاده قرار گرفته است، بصورت تفصیلی توضیح داده شده است. از میان سه روش رایج بر اصلاح شبکه که عبارتند از روش h ، روش p و روش $h-p$ ، روش h مورد استفاده قرار گرفته است.

روش برآورد خطا $Z-Z$ ، که یکی از روشهای مبتنی بر بهبود مقادیر است، بکار گرفته شده است. در این روش، ابتدا مقادیر تنش تقریبی حاصل از حل اجزاء محدود بهبود می‌یابند که به آنها تنش بهبود یافته گفته می‌شود. تفاضل این دو، که خطای تخمینی نامیده می‌شود، برای اصلاح شبکه بکار گرفته می‌شود.

در اصلاح شبکه با روش h می‌توان شبکه جدید را هم با استفاده از حل تطبیقی (اصلاح محلی شبکه) و هم با استفاده از اصلاح یکنواخت شبکه، بدست آورد. با مقایسه این دو روش، نتیجه می‌شود که حل تطبیقی بسیار دقیق‌تر و سریع‌تر همگرا می‌شود.

فصل اول

مقدمه

۱-۱- پیشگفتار

از زمانی که شبیه‌سازی کامپیوتری پدیده‌های فیزیکی آغاز شده است، همواره وجود خطاهای عددی در محاسبات، یکی از موضوعات اصلی قابل بررسی بوده است. خطاهای عددی (محاسباتی) در چنین شبیه‌سازیهایی گریزناپذیر است چرا که فرآیند جزء‌جزء کردن^۱ یک مدل پیوسته^۲ و تبدیل آن به یک مسأله کامپیوتری قابل مدیریت، یقیناً نمی‌تواند تمام اطلاعات موجود در مدل را که بوسیله معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یا معادلات انتگرالی مشخص و توصیف شده است، دربرگیرد. خطای تقریبی^۳ در چنین شبیه‌سازیهایی چقدر است؟ چگونه ممکن است که بتوان خطا را اندازه گرفت، کنترل کرد و بطور مؤثر و قابل توجهی مقدار آن را کم کرد؟ اینها سؤالاتی است که از آغاز بکارگیری روشهای عددی در مسائل مختلف علوم و مهندسی، متخصصان این رشته‌ها را با خود روبرو کرده است، چه آنها که بطور عملی با مسائل درگیر هستند و چه آنها که تئورسین و نظریه پرداز هستند [۱]. پروژه حاضر ضمن معرفی روشهای مختلف برآورد خطا و مفاهیم مربوط به آن، یک صفحه « L شکل» را در حالت تنش صفحه‌ای با روش اجزاء محدود تطبیقی^۴ حل کرده است. برای برآورد خطا از روش قدیمی $Z-Z$ ^۵ و برای اصلاح شبکه از روش h ^۶ استفاده شده است. برای حل مسأله در محیط نرم‌افزارهای *Maple* و *MATLAB* برنامه‌نویسی شده است و از هیچ برنامه آماده‌ای برای حل آن استفاده نشده است.

۱-۲- تاریخچه

برآورد پیشرونده خطا^۷ در روشهای عددی، مدت زمان بسیاری است که مورد استفاده

-
- | | |
|--|-----------------|
| 1- discretization | 2- continuous |
| 3- approximation error | |
| 4- AFEM (Adaptive Finite Element Method) | |
| 5- old Z-Z estimator | 6- h-refinement |
| 7- a priori estimation of error | |

و کاربرد متخصصان روشهای عددی بوده است. چنین برآوردهایی، اطلاعاتی درباره همگرایی^۱ و پایداری^۲ حل های مختلف ارائه می دهد. همچنین اطلاعات اجمالی درباره رفتار خطا، مادامی که متغیرهای شبکه^۳ تغییر می کنند، ارائه می دهد. بطور سنتی متخصصانی که از شبیه سازیهای عددی استفاده می کردند، به ندرت به دنبال تعیین مقدار خطا می رفتند در حالی که از وجود خطا در چین روشهایی کاملاً آگاه بودند و معمولاً کیفیت یک شبیه سازی بوسیله بحثهای فیزیکی و ابتکاری، مورد تأیید و اثبات قرار می گرفت و چنین بحثهایی مبتنی بر تجربه و قضاوت اشخاصی بود که به تجزیه و تحلیل مسأله می پرداختند. بعدها ثابت شد که چنین بحثهایی اغلب دارای نقص و عیب هستند.

برخی از ابتدایی ترین برآوردهای پسرونده خطا^۴ که در روشهای کامپیوتری مهندسی مکانیک مورد استفاده بودند، برای حل معادلات دیفرانسیل عادی به کار می رفتند. چنین روشهایی تحت عنوان الگوریتمهای پیش بینی کننده - اصلاح کننده^۵ شناخته می شوند.

در واقع علاقه و رویکرد به برآوردهای پسرونده خطا در روش اجزاء محدود، برای حل معادلات دیفرانسیل بیضوی با شرایط مرزی^۶، با کارهای بابوسکا^۷ و رین بولت^۸ [۲] آغاز شد. تکنیکهای برآورد پسرونده خطا توسعه یافت تا اینکه عددهای [۷] برای هر عنصر اجزاء محدود محاسبه شد. عددهای [۷] خطا را در نرم انرژی^۹ یا نرمهای دیگر بطور تقریبی بیان می کردند. این اعداد، سبب شکل گیری روشهای تطبیقی^{۱۰} جهت کنترل و کم کردن خطا شد.

طی سالهای ۱۹۷۸ تا ۱۹۸۳، یک سری نتایج برای تکنیکهای برآورد خطا با روش باقیمانده المانی^{۱۱} که به دو دسته صریح^{۱۲} و ضمنی^{۱۳} تقسیم می گردد، بدست آمد برای مثال می توان به کارهای بابوسکا و رین بولت اشاره کرد [۳، ۴].

در سال ۱۹۸۴، یک کنفرانس مهم درباره روشهای تطبیقی و برآورد خطا در لیبسون^{۱۴} برگزار شد در آن

-
- 1- convergence
 - 2- stability
 - 3- mesh parameters
 - 4- a posterior estimation of error
 - 5- predictor-corrector
 - 6- Elliptic boundary value
 - 7- Babuska
 - 8- Rheinboldt
 - 9- Energy norm
 - 10- Adaptive procedures
 - 11- Element Residual method
 - 12- Explicit
 - 13- Implicit
 - 14- libson