بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی و آمار

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.S c)

گرایش:محض

عنوان:

حلقه های ماتریس مثلثی قویاً کلین روی حلقه موضعی

استاد راهنما:

آقای دکتر شعبانعلی صفری ثابت

استاد مشاور:

خانم دکتر شروین صاحبی

پژوهشگر:

شیرین رادفر

تابستان ۱۳۹۱

سپاسگزاری:

با سپاس از خداوند متعال برای اعطای توفیق انجام این تحقیق ،لازم است از راهنمایی ها ی ارزشمندو همکاری های توأم با صبر و دقت جناب آقای دکتر شعبانعلی صفری ثابت ، در تمامی مراحل انجام این پایان نامه تشکر وقدردانی نمایم و همچنین از زحمات بی دریغ سرکار خانم دکتر شروین صاحبی در این امر و در طول این مقطع تحصیلی سپاسگزاری کنم واز مادر مهربانم که در تمامی مراحل زندگی به ویژه در طول این مقطع تحصیلی همواره مشوق و همراه من بوده است کمال تشکروقدرانی را به عمل آورم.

تقدیم به:

همسر عزیزم

که در این دوره از تحصیل حامی و یار و یاور من بوده است.

فهرست مطالب

چکیده :

فرض کنید R یک حلقه است عنصر $a\in R$ را قویاً کلین[1] نامند هرگاه $a=e+b$ که e و b به ترتیب عنصر خودتوان و یکه حلقه R هستند وضمناً $be=eb$. حلقه R را قویاً کلین نامند هرگاه هر عضو آن قویاً کلین باشد. در این تحقیق شرایطی را روی حلقه موضعی مانند R بررسی می کنیم که نتیجه می دهند $T_n(R)$ یک حلقه قویاً کلین است.در ضمن نشان می دهیم که این حالت برای حلقه های موضعی جابجایی و بعلاوه تحت شرایطی برای حالت های دیگر از حلقه های موضعی نیز برقرار است.

---

[1] -Strongly Clean

مقدمه :

یک عضو از یک حلقه کلین نامیده می شود اگر به صورت مجموع یک عضو یکه و یک عضو خود توان باشد و یک حلقه کلین نامیده می شود اگر هر عضو آن کلین باشد. حاصلضرب حلقه ها کلین است اگر و فقط اگر هر مؤلفه از حاصلضرب کلین باشد. در سال ۱۹۷۷نیکلسون[۲] در[۱۹] نشان داد که تصویر همومورفیک یک حلقه کلین، کلین است و ضمناً شرایط کافی برای حلقه هایی که دارای خاصیت تبادلی هستند را مورد بررسی قرار داد. علاوه بر این کامیلو[۳] در[۱۸]برای حلقه ها نشان داد که رابطه زیر بدون شرط برگشت پذیری بر قرار می باشد:

$$\text{تبادلی} \Rightarrow \text{کلین} \Rightarrow \text{نیمه کامل}$$

در[۱۸و۱۹] ثابت شد حلقه R با رادیکال J کلین است اگر و فقط اگر R/J کلین باشد و عضوهای خود توان آن به $J(R)$ ارتقاء یابند.برای حلقه ها خورانا[۴]و کامیلودر[۱۶] ثابت کردند رابطه زیر برقرار است :

$$\text{منظم یکه} \Rightarrow \text{کلین}$$

در [۱۷] کامیلو ،خورانا، لم[۵] ، نیکلسون و زاو[۶] مدول کلین را چنین تعریف کردند: یک مدول کلین نامیده می شود اگر حلقه اندومورفیسم آن کلین باشد.

[۲] -Nicholson
[۳] -Camillo
[۴] -Khurana
[۵] -Lam
[۶] -Zhou

مقدم بر این، هان[۷] و نیکلسون در[۷] ثابت کردند که اگر M_1, M_2 مدولهای کلین باشند آنگاه $M_1 \oplus M_2$ کلین است.

سرکید[۸] در[۱۲] نشان داد که یک فضای برداری مدول کلین است (ودر[۲۰] این امر به طور کامل بررسی شده است)و این نتیجه توسط خورانا، لم ، نیکلسون و زاو در[۱۷]مجدداً بررسی شد وآنها نشان دادند که چگونه مدولهای پیوسته کلین هستند.

نیکلسون در [۱۷]مفهوم قویاً کلین را بیان کردبه طوریکه یک عضو از یک حلقه قویاً کلین نامیده می شود اگر به صورت مجموع یک عضو یکه و یک عضو خود توان که جا به جا می شوند باشد. همچنین یک حلقه قویاً کلین است اگر هر عضو آن قویاً کلین باشد و یک مدول قویاً کلین است اگر حلقه اندومورفیسم های آن قویاً کلین باشد.حلقه های موضعی قویاً کلین هستند به تبعیت از کاری که نیکلسون راجع به حلقه های تبادلی در[۱۹] و خصوصیات اساسی حلقه های موضعی [۱۴بخش۱۹] انجام داد یک حلقه تبادلی با عضو خود توان های بدیهی باید موضعی باشد. این امرانگیزه مطالعه روی حلقه های موضعی است و این حلقه ها صریحاً حلقه های کلین هستند که عضوهای خود توان آن ها بدیهی اند. این امر می تواند آغاز تحقیق ومطالعه ما باشد.نیکلسون نشان داد که حلقه های قویاً π منظم، قویاً کلین هستند.

نتایج ابتدایی روی حلقه های آبلی منظم [۱۰]و حلقه های قویاً π - منظم[۱۵تمرین۵-۲۳] نشان می دهد که حلقه های آبلی منظم و حلقه های کامل راست (چپ)قویاً کلین هستند. بویژه حلقه های آرتینی راست (چپ)قویاً کلین هستند.هدف اصلی این تحقیق بررسی مجموعه حلقه های قویاً کلین روی حلقه های ماتریس مثلثی وحلقه های وقوع در خصوص حلقه های موضعی است.

[۷] -Han
[۸] -Searcoid

درفصل اول از این تحقیق کلیات و روش تحقیق را بیان می کنیم و در فصل دوم از این تحقیق تعاریف و قضایای مورد استفاده را ارائه می دهیم و در بخش یک از فصل سوم قضیه ای را اثبات می کنیمکه در این تحقیق تماماً استفاده می شود و سریعاً نشان می دهد که همهٔ ماتریس های بالا مثلثی روی حلقه های موضعی بلیچد[۹] قویاً کلین هستند . در بخش دوم از همین فصل شرایطی را روی حلقهٔ موضعی R قرار می دهیم که نتیجه می دهد $T_n(R)$ قویاً کلین است و همچنین عکس این مطلب را وقتی R ,h- حلقه است، اثبات می کنیم. و در بخش سوم از فصل سوم مثال هایی ارائه می دهیم که ثابت می کنند نتایج قبلی غیر بدیهی هستند ودر فصل چهارم یک تعمیم از حلقه ماتریس های بالا مثلثی که به صورت حلقه وقوع تحت مجموعه جزئاً مرتب متناهی بیان می شوند، ارائه می دهیم و بعضی از نتایج بدست آمده در این تحقیق را روی حلقه های وقوع بسط می دهیم . در فصل پنجم به بیان نتیجه گیری وپیشنهادات می پردازیم.

در این مقاله R یک حلقه و $J(R)$, $U(R)$, $Z(R)$ به ترتیب رادیکال جیکوبسن وگروه یکه های R و مرکز R تعریف می شوند.

[۹] -Bleached

فصل اول:کلیات

هدف

در این پایان نامه به بررسی اینکه حلقه ماتریس های بالا مثلثی تحت چه شرایطی قویاًکلین هستند می پردازیم وآن را روی حلقه های موضعی جابجایی گسترش می دهیم و این ویژگی را روی حلقه های بلیچد وسریهای توانی اریب ووقوع وهمچنین عملگر $B1$ تعمیم می دهیم و قضایای مربوط به آنها را ارائه می کنیم تا ببینیم تحت چه شرایطی قویاً کلین هستند.

پیشینه تحقیق

موضوعی که در این تحقیق مورد بررسی قرار می گیرد یکی از تازه های علمی در زمینه جبر و گرایش حلقه ها می باشدابتدا مفهوم حلقه قویاً کلین در سال ۱۹۷۷ توسط آقای نیکلسون بیان گردید.موضوع مورد بررسی مربوط به مقاله ای با عنوان:

Strongly clean triangular matrix rings over local rings

است که در سال ۲۰۰۷ به چاپ رسیده است.[۶]

در این تحقیق با تعریف حلقه قویاً کلین این خاصیت را روی حلقه ماتریس های بالا مثلثی مورد بررسی قرار می دهیم و به دنبال آن نتایج مهمی روی سایر حلقه ها بدست می آوریم که در فصل های مختلف این تحقیق به طور کامل بیان می گردند.

روش کار تحقیق

در بررسی و انجام این پایان نامه از مقالات وکتب موجود در کتابخانه ها وسایر بخش های مرتبط استفاده شده است.چندین مقاله وکتاب به زبان انگلیسی نیز جهت بهره برداری از اینترنت تهیه گردیده است.ابتدا با تعاریف وقضایایی که در فصل دوم آمده است مفاهیم اولیه مورد استفاده در این تحقیق را بیان می کنیم و در فصل های بعدی به ترتیب به ارائه شرایط قویاًکلین بودن حلقه های ماتریسی بالا مثلثی و بلیچد وعملگر $B1$ و حلقه سری های توانی اریب و حلقه وقوع می پردازیم.نهایتاًدر فصل پایانی به نتایج این پایان نامه خواهیم پرداخت وبعد چند پیشنهاد پژوهشی در رابطه با موضوع مورد بحث را برای محققین وعلاقه مندان مطرح می نماییم.

فصل دوم: تعاریف وقضایای مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف وقضایای مقدماتی مورد استفاده در طول پایان نامه می پردازیم.

(تعریف ۲-۱)حلقه:فرض کنید R یک مجموعه غیر تهی و+و. دو عمل دوتایی روی R باشند که به ترتیب جمع و ضرب نامیده می شوند.در این صورت مجموعه R همراه با این دو عمل را یک حلقه می نامیم وبه صورت $(R,+,.)$نشان می دهیم هرگاه:

۱)$(R,+)$گروه جمعی آبلی باشد

۲)$(R,.)$ یک نیم گروه ضربی باشد

۳)عمل ضرب روی عمل جمع از چپ و راست توزیع پذیر باشد یعنی به ازای هر $a,b,c\in R$ داشته باشیم:

$a(b+c)=ab+ac$

$(a+b)c=ac+bc$

(تعریف۲-۲)حلقه جابجایی:حلقه ای که عمل ضرب در آن دارای خاصیت جابجایی باشدراحلقه جابجایی می نامیم.

تعریف(۲-۳)زیرحلقه:اگر$(R$ و+و.$)$ یک حلقهوS یک زیرمجموعه ناتهی ازRباشد،S رایک زیر حلقه R گوییم وبه صورت $S\leq R$نشان می دهیم اگر(S و+و.)یک حلقه باشد.

تعریف(۲-۴)ضرب حلقه ها:فرض کنید R_1و R_2 و$\cdots$ و R_n خانواده ای از حلقه ها باشد که به صورت $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ نشان می دهیم.حال قرار می دهیم:

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | \quad a_i \in R_i \ , i = 1, \cdots, n\}$$

اعمال دوتایی جمع وضرب را روی مجموعه R چنین تعریف می کنیم:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n).(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n)$$

Rبا جمع وضرب تعریف شده به صورت بالا تشکیل یک حلقه می دهد که آنرا حاصلضرب مستقیم حلقه هایR_i برای $i=1,2,\cdots,n$ می نامیم وبه صورت

$$R = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

نمایش می دهیم.

تعریف(۲-۵)حوزه صحیح:حلقه Rرایک حوزه صحیح می نامیم اگر به ازای هر $a, b \in R$ که $a\,b = 0$آنگاه $a = 0$یا$b = 0$

تعریف(۲-۶)مرکزحلقه:فرض کنید Rیک حلقه باشدمجموعه

$$Z(R) = \{a \in R \mid \quad a\,x = x\,a\ ;\ \forall\, x \in R\}$$

رامرکزحلقه نامیم.

تعریف(۲-۷)عضو مرکزی:اعضای $Z(R)$ راعضو مرکزی حلقه R می نامیم.

تعریف(۲-۸) عضو خودتوان:در حلقه R عضو $a \in R$ راعضوخودتوان می نامیم اگر $a^2 = a$.

تعریف(۲-۹)عضو پوچ توان:در حلقه R عضو $a \in R$ را عضو پوچ توان می نامیم اگر عدد صحیح و مثبتی مانند n موجود باشد که $a^n = 0$

(**تعریف۲-۱۰)حلقه آبلی**: حلقه R آبلی است هر گاه هر عضو خودتوان آن یک عضو مرکزی باشد.

تعریف (۲-۱۱)عضو وارون:عضو مخالف صفر a را در حلقه R وارون پذیر از راست گوییم

هر گاه $b \in R$ موجود باشد که $a\ b = 1$ و وارون پذیر از چپ است هر گاه $c \in R$ موجود باشد که $c\ a = 1$

تعریف (۲-۱۲) عضو یکه:عضو $a \in R$ را یکه گوییم هرگاه a دارای وارون راست و چپ باشد(یعنی a وارون پذیر باشد)و

$U(R) = \{\ a \in R \mid$ وارون پذیر باشد $a\ \}$

تعریف(۲-۱۳)ایده آل :زیرمجموعه ناتهی I ازحلقه R رایک ایده آل راست می نامیم اگربه ازای هر $a, b \in I$ وهر $r \in R$ داشته باشیم:

۱) $a - b \in I$

۲) $a\ r \in I$

همچنین زیرمجموعه ناتهی I ازحلقه R رایک ایده آل چپ نامیم اگر به ازای هر $a, b \in I$ وهر $r \in R$ داشته باشیم:

۱) $a - b \in I$

۲) $r\ a \in I$

وزیرمجموعه ناتهی I ، یک ایده آل ازحلقه R است اگریک ایده آل راست و یک ایده آل چپ حلقه R باشد.

تعریف(۲-۱۴)ایده آل اول:ایده آل محض P ازحلقه Rرا اول گوییم اگربرای دو ایده آل دلخواهI و J ازحلقه R داشته باشیم:

$I\ J \subsetneq$P $\Rightarrow I \subsetneq$P یا $J \subsetneq$P

تعریف(۲-۱۵)ایده آل ماکسیمال:ایده آلM ازحلقه R ر ا ماکسیمال گوییم اگر :

۱) $M \neq R$

۲)برای ایده آل دلخواهN که$M \subsetneq N$، نتیجه شود $N = R$

تعریف(۲-۱۶)حلقه موضعی: [۱۴] حلقه R با دقیقایک ایده آل ماکسیمال چپ (راست)راحلقه موضعی می نامیم.

تعریف(۲-۱۷)رادیکال جیکوبسن:رادیکال جیکوبسن که با $J(R)$ نمایش میدهیم اشتراک تمام ایده ال های ماکسیمال چپ(راست)R است.

تعریف(۲-۱۸)شرطD.C.C **:** اگر... وI_2و I_1 ایده آلهای R باشند برای دنباله نزولی

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ عدد صحیح t موجود باشد که $I_i = I_t$، $\forall i \geq t$ آنگاه گوییم R در شرط D.C.C صدق می کند.

تعریف(۲-۱۹)حلقه آرتینی:حلقه R را آرتینی چپ(راست)نامند اگر R شرطD.C.C را روی دنباله ای از ایده آلهای چپ(راست) متعلق به خود داشته باشد.

(تعریف۲-۲۰)حلقه تقسیم(حلقه بخشی):حلقه یکدار R رایک حلقه تقسیم گوییم اگرعناصر غیرصفرآن تحت عمل ضرب وارون پذیر باشند.

تعریف(۲-۲۱)میدان: اگرحلقه بخشی K جابجایی باشد آن را یک میدان می نامیم.

تعریف(۲-۲۲) زیر میدان: گوییم L زیر میدان K است هرگاه L با همان اعمال دوتایی + و. ، K یک میدان باشد.

تعریف(۲-۲۳)میدان اول:میدان K را میدان اول نامیم اگر Kزیر میدان محض نا بدیهی نداشته باشد.

تعریف(۲-۲۴)R-مدول:اگر R یک حلقه و M یک گروه آبلی با عمل دوتایی $R \times M \to M$ با ضابطه $(r, m) \to rm$ باشد $(m\epsilon M)$ به طوری که داشته باشیم $\forall a, b\epsilon m$ و $\forall r, s\epsilon R$

۱) $r(a + b) = ra + rb$

۲) $(r, s)a = ra + sa$

۳) $(rs)a = r(sa)$

آنگاه گوییم M یک R -مدول چپ است و ضمناً اگر R یکدار و شرط $1_{\mathrm{R}}. a = a$ نیز برقرار باشد آنگاه M را R -مدول یکانی چپ نامند. R -مدول راست نیز به طور مشابه تعریف می شود.نماد$_{R}M$ به منزله آن است که M ، R-مدول چپ است و M_{R} نیز نمایانگر آن است که M ، R-مدول راست است .

تعریف(۲-۲۵) بیو مدول:اگر Rو S دو حلقه باشند به طوری که برای گروه آبلیM داشته باشیم،M یک Rـمدول چپ و یک S-مدول راست باشد آنگاه گوییم M یک بیومدول می باشد و به صورت $_{R}M_{S}$ نمایش می دهیم.

تعریف (۲-۲۶)زیر مدول:اگرM یک R-مدول و $\emptyset \neq N \subsetneq M$ در صورتیکهN خود نیز یک R-مدول باشد آنگاه N را زیرمدولM می نامیم که معادل است با

$\forall x, y\epsilon N: \quad x - y\epsilon N$

$\forall r\epsilon R \ , \ \forall y\epsilon N \ : \quad ry\epsilon N, yr \in N$

تعریف (۲-۲۷) هومورفیسیم حلقه ها:فرض کنید R و S دو حلقه باشند در این صورت نگاشت

$f: R \to S$ را هومورفیسم از R به S نامیم اگر به ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

تعریف (۲-۲۸) اندومورفیسم:هر هومورفیسم حلقه R به خودش $(f: R \to R)$ را یک اندومورفیسم نامیم.برای گروه ها نیز به طور مشابه تعریف می شود.

تعریف(۲-۲۹)اتومورفیسم:اگر هومورفیسم حلقه R به خودش یک به یک وپوشا باشد آن را اتومورفیسم نامیم.

تعریف (۲-۳۰) R ـ مدول هومورفیسم: اگر A و B دو R ـ مدول (چپ) باشند تابع

$f: A \to B$ را یک R ـ مدول هومورفیسم گوییم هر گاه:

$$\forall a, b \in A : f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$\forall r \in R\ , \forall a \in A : \ f(ra) = rf(a)$$

تعریف (۲-۳۱)تصویر هومورفیک:اگر برای هومورفیسم $f: A \to B$ داشته باشیم

$B = Imgf$ آنگاه گوییم B تصویر هومورفیک A است.(A و B می توانندهر دو حلقه یا گروه باشند)

تعریف (۲-۳۲)مدول هاپفین[۱۰] : گوییم M یک مدول هاپفین است هر گاه هر اندومورفیسم پوشای آن یک به یک باشد.

تعریف (۲-۳۳): فرض کنید A و B دو حلقه باشند ، A در B قابل نشاندن است هرگاه هومورفیسم یک به یک $f: A \to B$ وجود داشته باشد.

---

[۱۰] -Hopfian

تعریف (۲-۳۴)مدول پیوسته:[۱۷] مدول M پیوسته نامیده می شود هرگاه هر زیرمدول از آن یک جمعوند مستقیم از M باشدو هر زیر مدول از M که با یک جمعوند از M ایزومورف باشد خود نیز یک جمعوند از M باشد.

تعریف(۲-۳۵) R -مدول نیم ساده: M را یک R-مدول نیم ساده گوییم هرگاه هر زیر مدول از آن یک جمعوند مستقیم از M باشد.

تعریف (۲-۳۶) دنباله دقیق: فرض کنید $M_0, \cdots, M_{\mathrm{n}}$ $(n \geq 2)$ ، R-مدول هایی دلخواه باشند.در این صورت دنباله

$$M_0 \overset{\varphi_1}{\to} M_1 \overset{\varphi_2}{\to} M_2 \to \cdots \to M_{n-1} \overset{\varphi_n}{\to} M_n$$

را، که دنباله ای از R- همومورفیسم های $\varphi_1, \cdots, \varphi_{\mathrm{n}}$ است، دنباله دقیق می نامیم هر گاه برای هر $2 \leq i \leq n$ ، $Im\ \varphi_{i-1} = Ker\varphi_i$.

تعریف (۲-۳۷)دنباله دقیق کوتاه: فرض کنید M وN و K ، R-مدول هایی دلخواه باشند. در این صورت اگر دنباله $0 \to M \overset{\varphi}{\to} N \overset{\mu}{\to} K \to 0$ دقیق باشد ، آن را دنباله دقیق کوتاه می گوییم و اگر $N=M+K$ آنگاه این دنباله را شکافنده گوییم.

تعریف(۲-۳۸)حلقه نیم ساده:فرض کنیم R یک حلقه باشد اگر R در هریک از شرایط زیر صدق کند آنگاه R یک حلقه نیم ساده می باشد:

۱)همه R-مدول های(چپ)نیم ساده باشند

۲)همه R-مدول ها ی(چپ)متناهیاً تولید شده نیم ساده باشند

۳)همه R-مدول های (چپ)دوری نیم ساده باشند

۴) R- مدول(چپ) R ،نیم ساده باشد

۵)همه دنباله های کوتاه دقیق از R-مدول ها (چپ) شکافنده باشند

تعریف(۲-۳۹)مجموعه T -پوچ توان :[۱۴] گوییم A زیر مجموعه حلقه R ،T-پوچ توان چپ(راست) است اگر برای هر دنباله از اعضا مانند $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ یک عدد صحیح $n\geq 1$ وجود داشته باشد به طوریکه $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$.

تعریف(۲-۴۰)حلقه کامل: حلقه R کامل است اگر $R/J(R)$ نیم ساده باشد و $J(R)$ ،T-پوچ توان راست(چپ)باشد.

تعریف (۲-۴۱) نیم موضعی: حلقه R نیمه موضعی است اگر $R/J(R)$ نیمه ساده باشد.

تعریف(۲-۴۲)حلقه نیم کامل: حلقه R نیمه کامل است اگر R نیمه موضعی باشد و عضوهای خودتوان $R/J(R)$ بتوانند به R ارتقاء یابند.

تعریف(۲-۴۳) حلقه منظم وقویاً منظم: حلقه R منظم است اگر وفقط اگر برای هر $a\epsilon R$ ، xای متعلق به R موجود باشد که $axa = a$ ضمناً اگر $a = a^2x$ آنگاه گوییم حلقه R قویاً منظم است.

تعریف(۲-۴۴) حلقه π -منظم: حلقه R ، π- منظم است اگر برای هر $a\epsilon R$ ، $x \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $a^n x a^n = a^n$.

تعریف(۲-۴۵)حلقه قویاً π- منظم: حلقه R ، قویاً π- منظم است هرگاه برای هر $x \in R$ ،عدد طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوریکه $x^n R = x^{n+1} R$.

تعریف(۲-۴۶) حلقه تبادلی: R یک حلقه تبادلی است اگر وفقط اگر برای هر $a\epsilon R$ ،عضو خودتوان e در $a R$ موجود باشد بطوری که $1 - e \in (1 - a) R$.