بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

رساله دوره دکتری ریاضی (محض)

عنوان:

گراف جابه‌جایی گروههای متناهی و ارتباط آن با گراف اول گروه

نگارش:

عباس جعفرزاده

استاد راهنما:

دکتر علی ایرانمنش

استادمشاور:

دکتر سعید اکبری

بهمن ۱۳۸٦

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای **عباس جعفرزاده** رساله واحدی خود را باعنوان: «**گراف جابجایی گروههای متناهی و ارتباط آن با گراف اول گروه**» در تاریخ ۸۶/۱۱/۶ ارائه کردند.

اعضای هیات داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تایید کرده است و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می کند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر سعید اکبری	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	
٤- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
٥- استاد ناظر خارجی	آقای دکترعلیرضا عبداللهی	استاد	
٦- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر حمیدرضا میمنی	دانشیار	
۷- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	

۱۰۲۳۳۵

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ ~~کارشناسی ارشد~~/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۸۶ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر علی ایرانمنش، مشاورهٔ ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سعید اکبری و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب عباس جعفرزاده دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: عباس جعفرزاده

تاریخ و امضا: ۸۶/۱۱/۹

پیشکش به همسرم که در کنارم بود

تا آموخته‌هایم را بپرورانم

و وجودم را تعالی بخشم.

او که صمیمی‌ترین دوست من است

و وجودش امیدبخش زندگیم؛

تقدیم به مادر مهربان و پدر عزیزم؛

و برای فرزندم یوسف.

تشکر و قدردانی

لازم است از آقای دکتر علی ایرانمنش که زحمت راهنمایی و نظارت بر مراحل انجام رساله را بر عهده داشته‌اند و همواره از راهنمایی‌ها و کمکهای بی‌دریغشان بهره برده‌ام صمیمانه سپاسگزاری کنم. از آقای دکتر اکبری، استاد مشاورم، که از راهنماییهایشان بهره‌مند شده‌ام تشکر و سپاسگزاری می‌کنم. همچنین از آقایان دکتر سید احمد موسوی، دکتر سید محمد باقری، دکتر حمیدرضا میمنی و دکتر علیرضا عبداللهی که زحمت داوری رساله را بر عهده داشتند، تشکر می‌کنم. از آقایان دکتر سید محمد باقر کاشانی و دکتر محمد رضا درفشه هم به خاطر مطالبی فراوانی که به من آموخته‌اند تشکر می‌نمایم. در نهایت از خانواده خودم و خانواده همسرم که همواره من را مورد لطف و عنایت خود قرار داده و یار و یاورم بوده‌اند صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

عباس جعفرزاده — بهمن ۱۳۸۶

چکیده

بحث تشخیص‌پذیری در نظریه گروههای متناهی از حدود سال ۱۹۶۰ مطرح شده‌است و تاکنون تشخیص‌پذیریهای مختلفی برای گروههای متناهی ارائه شده‌اند. یکی از آنها، تشخیص‌پذیری گروههای متناهی به وسیله تعداد شمارنده‌های اول مرتبه گروه است. در سالهای ۱۹۶۸ و ۱۹۹۱ «هرتزوگ» و «شی» گروههای ساده متناهی را که تعداد شمارنده‌های اول مرتبه آنها به ترتیب ۳ و ۴ است مشخص کردند. ما در این رساله گروههایی را که تعداد شمارنده‌های اول مرتبه آنها ۵ یا ٦ است مشخص کرده‌ایم.

گراف جابه‌جایی گروه متناهی G، که آن را با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم، به این صورت تعریف می‌شود که رئوس این گراف تمام عناصر غیرمرکزی G هستند و دو رأس x و y به هم وصل می‌شوند اگر $xy = yx$. مفهوم گراف جابه‌جایی گروههای متناهی، مفهومی نوین است. در سالهای اخیر کارهایی در مورد گراف جابه‌جایی گروههای متناهی انجام شده‌اند. از جمله می‌توان به کار دکتر اکبری و دیگران در مورد گراف جابه‌جایی گروههای خطی $GL_n(q)$ و $SL_n(q)$ و تشخیص‌پذیری گروههای $PSL_2(2^n)$ و $Sz(2^{2n+1})$ به وسیله گراف جابه‌جاییشان توسط دکتر عبداللهی و دیگران اشاره کرد. در این رساله گراف جابه‌جایی گروههای S_n، A_n، D_{2n}، DC_n و چند گروه دیگر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین گراف جابه‌جایی زیرمجموعه‌های متشکل از تمام ترانهشها و تمام عناصر مرتبه دو در S_n را بررسی می‌کنیم. در ادامه تشخیص‌پذیری تعداد زیادی از گروههای ساده متناهی را به وسیله گراف جابه‌جاییشان بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که اگر M گروهی ساده از یکی از انواع مورد اشاره در فصل چهار باشد و G گروهی دلخواه باشد به طوری که $\Gamma(G) \cong \Gamma(M)$، آنگاه $G \cong M$. در انتها ثابت می‌کنیم که اگر G گروهی باشد با $Z(G) = \{1\}$، آنگاه $\Gamma(G)$ همبند است اگر و فقط اگر $\Pi(G)$، گراف اول G، همبند باشد.

لغات کلیدی: گروه ساده؛ گراف جابه‌جایی؛ گراف اول؛ تشخیص‌پذیری؛ مؤلفه‌های مرتبه‌ای؛ گراف همبند؛ گروه متقارن؛ گروه متناوب؛ قطر گراف؛ عدد خوشه‌ای؛ عدد استقلال.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

مفهوم تشخیص‌پذیری گروههای متناهی، از جمله مفاهیمی است که در سالهای گذشته در نظریه گروههای متناهی مطرح شده است. تاکنون تشخیص‌پذیریهای متفاوتی برای گروهها ارائه شده‌اند که از آن جمله می‌توان به تشخیص‌پذیری به وسیله مجموعه مرتبه عناصر گروه، تشخیص‌پذیری به وسیله مرتبه گروه و مجموعه مرتبه عناصرش، تشخیص‌پذیری به‌وسیله تعداد شمارنده‌های اول مرتبه گروه، تشخیص‌پذیری به وسیله مجموعه درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر، تشخیص‌پذیری به وسیله مجموعه مرتبه مؤلفه‌ها و تشخیص‌پذیری به وسیله گراف جابه‌جایی گروه اشاره کرد.

مفهوم گراف جابه‌جایی گروههای متناهی، در سالهای اخیر در نظریه گروههای متناهی و نظریه حلقه‌ها ظاهر شده‌است. تاکنون کارهای زیادی بر روی آن انجام شده‌است که می‌توان به اثبات شرایط لازم و کافی برای همبندی گراف جابه‌جایی گروههای ساده از نوع لی و گروههای خطی اشاره کرد.

در فصل اول این رساله، به ارائه مقدماتی از گروههای متناهی و نظریه گراف و معرفی گراف جابه‌جایی و گراف اول گروهها می‌پردازیم و سپس انواع مختلفی از تشخیص‌پذیری گروههای متناهی را معرفی می‌کنیم.

در فصل دوم، ابتدا انگیزه تشخیص‌پذیری به‌وسیله تعداد شمارنده‌های اول مرتبه یک گروه ساده متناهی را بیان نموده و سپس گروههای ساده‌ای را که مرتبه آنها دارای ۵ یا ٦ شمارنده اول است مشخص می‌نماییم.

در فصل سوم، گراف جابه‌جایی گروههای متقارن، متناوب، دووجهی، دودوری و تعداد دیگری از گروهها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و شرایط لازم و کافی برای همبندی آنها را تحقیق می‌کنیم. همچنین آنها را از نظر قطر گراف، عدد خوشه‌ای و عدد استقلال بررسی می‌کنیم. در این فصل همچنین در مورد گراف جابه‌جایی زیرگروههای خاصی از گروه متقارن تحقیق می‌کنیم.

تشخیص‌پذیری گروههای متناهی به وسیله گراف جابه‌جایی، نوعی از تشخیص‌پذیری است که توسط آقای دکتر اکبری و دیگران در کار منتشر نشده‌ای مطرح شد. با توجه به این که کار زیادی بر روی آن صورت نگرفته‌بود، این سؤال مطرح بود که آیا هر گروه متناهی با گراف جابه‌جاییش تشخیص‌پذیر است.

در فصل چهارم، مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد که گروههای متناهی هستند که با گراف جابه‌جاییشان تشخیص‌پذیر نیستند. در ادامه، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که ارتباط عمیقی بین گراف جابه‌جایی و مؤلفه‌های مرتبه‌ای یک گروه متناهی را بیان می‌نماید و سپس به وسیله این ارتباط و تشخیص‌پذیری گروههای ساده به‌وسیله مؤلفه‌های مرتبه‌ایشان، تشخیص‌پذیری آنها را به وسیله گراف جابه‌جاییشان ثابت می‌کنیم. لازم به‌ذکر است که بعضی از گروههای ساده توسط مؤلفه‌های مرتبه‌ایشان مشخص نمی‌شوند، ولی‌ما آنها را به وسیله گراف جابه‌جاییشان مشخص می‌کنیم. تابه‌حال در مورد گروههای ساده متناهی مثال نقضی یافت نشده‌است که توسط گراف جابه‌جاییش مشخص نشود.

سرانجام در فصل پنجم، با اثبات یک قضیه مهم، ثابت می‌کنیم که در مورد گروههای با مرکز بدیهی، همبندی گراف جابه‌جایی و گراف اول معادل هستند.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدماتی از گروههای متناهی

تعریف ۱.۱.۱ . گروه G را ساده نامیم هر گاه G هیچ زیرگروه نرمال سره غیربدیهی نداشته‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱ . یک **سری نرمال** برای گروه G زنجیری مانند

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$$

از زیرگروههای نرمال G است. به گروههای خارج‌قسمتی G_{i+1}/G_i، که $0 \leq i \leq k-1$، **عوامل** سری گفته می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱ . فرض کنید G یک گروه و سری

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$$

یک سری نرمال G باشد. این سری را یک **سری اصلی** G می‌نامیم اگر به ازای هر $0 \leq i \leq k-1$، عامل G_{i+1}/G_i یک زیرگروه نرمال مینیمال ز گروه G/G_i باشد، یعنی هیچ زیرگروه نرمالی مانند N از G وجود ندارد که $G_i < N < G_{i+1}$. هر گروه خارج‌قسمتی G_{i+1}/G_i را یک **عامل اصلی** G می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱ . فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد. مجموعه تمام شمارنده‌های اول n را با نماد $\pi(n)$ نشان می‌دهیم.

قرارداد ۵.۱.۱ . فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. دراین‌صورت $\pi(|G|)$ را با $\pi(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۶. فرض کنیم π زیرمجموعه‌ای از اعداد اول باشد. عنصر $x \in G$ را یک π-عنصر می‌نامیم هرگاه $\pi(|x|) \subseteq \pi$ و G را یک π-گروه می‌نامیم هرگاه $\pi(G) \subseteq \pi$.

در قضیه بعد، p عددی اول و q همیشه توانی از یک عدد اول است.

قضیه ۱.۱.۷. (رده‌بندی گروههای ساده متناهی) گروههای ساده متناهی عبارتند از:

۱) گروههای دوری از مرتبه اعداد اول $\mathbb{Z}_p$؛

۲) گروههای متناوب A_n با $n \geq ۵$؛

۳) گروههای ساده متناهی از نوع لی[۱] که خود به سه دسته تقسیم می‌شوند:

(الف) Chevalley Groups که مشتمل بر چهار خانواده نامتناهی از گروههای ساده می‌باشد:

(a) $PSL_n(q)$ (گروه خطی خاص تصویری[۲])؛

(b) $PSU_n(q)$ (گروه یکانی خاص تصویری[۳])؛

(c) $PSp_{۲n}(q)$ (گروه سیمپلکتیک تصویری[۴])؛

(d) $P\Omega_n^\epsilon(q)$ (شامل $P\Omega_{۲n+۱}(q)$، $P\Omega_{۲n}^+(q)$ و $P\Omega_{۲n}^-(q)$)؛

(ب) Twisted Chevalley Groups که مشتمل بر خانواده‌های گروههای ساده ${}^۲B_۲(۲^{۲n+۱})$ برای $n > ۰$، ${}^۳D_۴(q)$، $E_۶(q)$، $E_۷(q)$، $E_۸(q)$، ${}^۲E_۶(q)$، $F_۴(q)$، ${}^۲F_۴(۲^{۲n+۱})$ برای $n > ۰$، $G_۲(q)$ و ${}^۲G_۲(۳^{۲n+۱})$ برای $n > ۰$ می‌باشد؛

(ج) Tits Group گروه ساده و متناهی ${}^۲F_۴(۲)'$، که زیرگروهی از ${}^۲F_۴(۲)$ است؛

۴) ۲۶ گروه پراکنده[۵].

---

[۱] Lie
[۲] Projective Special Linear Group
[۳] Projective Special Unitary Group
[۴] Projective Symplectic Group
[۵] Sporadic

گروههای ساده متناهی به همراه مرتبه آنها، در جداول ۱.۱ و ۲.۱ آمده‌اند.

تذکر ۸.۱.۱. در مورد جدول ۱.۱ نکات زیر قابل توجه‌اند:

۱) گروههای $A_1(2)$، $A_1(3)$، $^2A_2(2)$ و $^2B_2(2)$ حلپذیرند؛

۲) برای گروههای $G = B_2(2) = C_2(2)$، $G = G_2(2)$، $G = {}^2G_2(3)$ و $G = {}^2F_4(2)$ می‌دانیم که $G' = [G, G]$ ساده است و اندیس آن در G، به‌ترتیب، برابر است با ۲، ۲، ۳ و ۲؛

۳) در مورد گروههای $^2B_2(q)$ و $^2F_4(q)$ داریم $q = 2^{2n+1}$؛

۴) در مورد گروه $^2G_2(q)$ داریم $q = 3^{2n+1}$؛

۵) گروههای B_1، C_1، C_2، D_1، D_2، D_3، $^2D_2$ و $^2D_3$ از جدول خارج شده‌اند، زیرا آنها با گروههای دیگر یکریخت هستند:

$$C_1 \cong B_1 \cong A_1 \qquad C_2 \cong B_2 \qquad D_1(q) \cong \mathbb{Z}_{q-1}$$

$$D_2 \cong A_1 \times A_1 \qquad D_3 \cong A_3 \qquad {}^2D_2(q) \cong A_1(q^2)$$

$$^2D_3 \cong {}^2A_3$$

تعریف ۹.۱.۱. برای گروه G، مرکز[6] G را با $Z(G)$ نمایش می دهیم. مرکز زیرمجموعه S از G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(S) = \{x \in S \mid xa = ax, \forall a \in S\}.$$

S را آبلی گوییم اگر $S = Z(S)$. اگر a عنصری از G باشد، آنگاه مرکزساز[7] a در G را با نماد $C_G(a)$

[6] Center
[7] Centralizer

نام گروه	اسامی دیگر گروه	مرتبه گروه
$\mathbb{Z}_p$		p
$A_n, n \geq 5$	$Alt(n)$	$\frac{1}{2}n!$
$A_n(q), n \geq 1^{(1)}$	$PSL_{n+1}(q) = L_{n+1}(q)$ $= L^{+}_{n+1}(q) = A^{+}_n(q)$	$\frac{1}{(n+1,q-1)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - 1)$
${}^2A_n(q), n \geq 2^{(1),(5)}$	$PSU_{n+1}(q) = U_{n+1}(q)$ $= L^{-}_{n+1}(q) = A^{-}_n(q)$	$\frac{1}{(n+1,q+1)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - (-1)^i)$
$B_n(q), n \geq 2^{(2),(5)}$	$O_{2n+1}(q) = P\Omega_{2n+1}(q)$	$\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$
$C_n(q), n \geq 3^{(2),(5)}$	$PSp_{2n}(q)$	$\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$
$D_n(q), n \geq 4^{(5)}$	$O^{+}_{2n}(q) = P\Omega^{+}_{2n}(q)$	$\frac{1}{(4,q^n-1)} q^{n(n-1)}(q^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$
${}^2D_n(q), n \geq 4^{(5)}$	$O^{-}_{2n}(q) = P\Omega^{-}_{2n}(q)$	$\frac{1}{(4,q^n+1)} q^{n(n-1)}(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$
${}^2B_2(q)^{(1),(3)}$	$Sz(q) = {}^2B_2(\sqrt{q})$	$q^2(q-1)(q^2+1)$
${}^3D_4(q)$		$q^{12}(q^2-1)(q^8+q^4+1)(q^6-1)$
$E_6(q)$	$E^{+}_6(q)$	$\frac{1}{(3,q-1)} q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)$ $(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)$
$E_7(q)$		$\frac{1}{(2,q-1)} q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)$ $(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)$
$E_8(q)$		$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)$ $(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)$
${}^2E_6(q)$	$E^{-}_6(q)$	$\frac{1}{(3,q+1)} q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)$ $(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)$
$F_4(q)$ ${}^2F_4(q)^{(2),(3)}$	 ${}^2F_4(\sqrt{q})$	$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$ $q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)$
$G_2(q)^{(2)}$ ${}^2G_2(q)^{(2),(4)}$	 $R(q) = {}^2G_2(\sqrt{q})$	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$ $q^3(q-1)(q^3+1)$

جدول ۱.۱: گروههای ساده متناهی (گروههای آبلی، متناوب و از نوع لی)

نام گروه	اسامی دیگر گروه	مرتبه گروه
$M_{۱۱}$		$۲^{۴}.۳^{۲}.۵.۱۱$
$M_{۱۲}$		$۲^{۶}.۳^{۳}.۵.۱۱$
$M_{۲۲}$		$۲^{۷}.۳^{۲}.۵.۷.۱۱$
$M_{۲۳}$		$۲^{۷}.۳^{۲}.۵.۷.۱۱.۲۳$
$M_{۲۴}$		$۲^{۱۰}.۳^{۳}.۵.۷.۱۱.۲۳$
$J_{۱}$		$۲^{۳}.۳.۵.۷.۱۱.۱۹$
$J_{۲}$	HJ	$۲^{۷}.۳^{۳}.۵^{۲}.۷$
$J_{۳}$	HJM	$۲^{۷}.۳^{۵}.۵.۱۷.۱۹$
$J_{۴}$		$۲^{۲۱}.۳^{۳}.۵.۷.۱۱^{۳}.۲۳.۲۹.۳۱.۳۷.۴۳$
HS		$۲^{۹}.۳^{۲}.۵^{۳}.۷.۱۱$
He	$HHM = F_{۷}$	$۲^{۱۰}.۳^{۳}.۵^{۲}.۷^{۳}.۱۷$
Mc	McL	$۲^{۷}.۳^{۶}.۵^{۳}.۷.۱۱$
Suz	Sz	$۲^{۱۳}.۳^{۷}.۵^{۲}.۷.۱۱.۱۳$
Ly	LyS	$۲^{۸}.۳^{۷}.۵^{۶}.۷.۱۱.۳۱.۳۷.۶۷$
Ru		$۲^{۱۴}.۳^{۳}.۵^{۳}.۷.۱۳.۲۹$
ON		$۲^{۹}.۳^{۴}.۵.۷^{۳}.۱۱.۱۹.۳۱$
$Co_{۱}$	.۱	$۲^{۲۱}.۳^{۹}.۵^{۴}.۷^{۲}.۱۱.۱۳.۲۳$
$Co_{۲}$	.۲	$۲^{۱۸}.۳^{۶}.۵^{۳}.۷.۱۱.۲۳$
$Co_{۳}$	.۳	$۲^{۱۰}.۳^{۷}.۵^{۳}.۷.۱۱.۲۳$
$Fi_{۲۲}$	$M(۲۲)$	$۲^{۱۷}.۳^{۹}.۵^{۲}.۷.۱۱.۱۳$
$Fi_{۲۳}$	$M(۲۳)$	$۲^{۱۸}.۳^{۱۳}.۵^{۲}.۷.۱۱.۱۳.۱۷.۲۳$
$Fi'_{۲۴}$	$M(۲۴)'$	$۲^{۲۱}.۳^{۱۶}.۵^{۲}.۷^{۳}.۱۱.۱۳.۱۷.۲۳.۲۹$
$F_{۵}$	HN	$۲^{۱۴}.۳^{۶}.۵^{۶}.۷.۱۱.۱۹$
$F_{۳}$	Th	$۲^{۱۵}.۳^{۱۰}.۵^{۳}.۷^{۲}.۱۳.۱۹.۳۱$
$F_{۲}$	$B = BM$	$۲^{۴۱}.۳^{۱۳}.۵^{۶}.۷^{۲}.۱۱.۱۳.۱۷.۱۹.۲۳.۳۱.۴۷$
$F_{۱}$	M	$۲^{۴۶}.۳^{۲۰}.۵^{۹}.۷^{۶}.۱۱^{۲}.۱۳^{۳}.۱۷.۱۹.۲۳.۲۹.۳۱.۴۱.۴۷.۵۹.۷۱$

جدول ۲.۱: گروههای ساده متناهی (گروههای پراکنده)

نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}.$$

به همین صورت، مرکزساز عنصر $a \in S$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_S(a) = \{x \in S \mid xa = ax\}.$$

قرارداد ۱.۱.۱۰. گروههای متقارن[۸] و متناوب[۹] روی n حرف را به ترتیب با S_n و A_n و گروه دووجهی[۱۰] مرتبه $۲n$ را با $D_{۲n}$ نمایش می‌دهیم و نمادهای T_n و I_n را به ترتیب برای مجموعه تمام ترانهشها[۱۱] و مجموعه تمام عناصر مرتبه دو در S_n به کار می‌بریم، یعنی

$$T_n = \{(i,j) \mid ۱ \leq i < j \leq n\}$$

و

$$I_n = \{x \in S_n \mid |x| = ۲\}.$$

همچنین گروه کواترنیون تعمیم یافته[۱۲] از مرتبه ۲^n $(n \geq ۳)$ را با نماد Q_n نمایش می‌دهیم و گروه دودوری[۱۳] DC_n از مرتبه $۴n$ عبارتست از گروه

$$< x, y | x^{۲n} = ۱, x^n = y^۲, y^{-۱}xy = x^{-۱} > .$$

به وضوح اگر $n = ۲^{m-۲}$ آنگاه $DC_n \cong Q_m$.

[۸] Symmetric
[۹] Alternating
[۱۰] Dihedral
[۱۱] Transpositions
[۱۲] Generalized Quaternion
[۱۳] Dicyclic

تعریف ۱.۱.۱۱. اگر $\sigma \in S_n$، تکیه‌گاه[۱۴] σ، که آن را با نماد $\mathrm{supp}(\sigma)$ نمایش می‌دهیم عبارتست از مجموعه تمام حروف $k \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ به طوری که $\sigma(k) \neq k$. اگر σ یک دور باشد طول آن را با نماد $l(\sigma)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با $|\sigma|$.

---

[۱۴] Support