بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
دررشته ریاضی (محض)

عنوان

زیر مدولهای اول مجزا

استاد راهنما

دکتر احمد خاکساری

توسط

راضیه زمردیان اصفهانی

مرداد ۱۳۸۶

بسمه تعالی

صورت جلسه دفاع از پایان نامه

جلسه دفاع از پایان نامه آقای / خانم **راضیه زمردیان اصفهانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی** گرایش **جبر** دانشگاه پیام نور مرکز شیراز با عنوان :

زیر مدولهای اول مجزا درساعت۸ روزچهارشنبه تاریخ **۸۶/۵/۱۰** با حضور اعضای کمیته نامبرده در زیر بر گزار گردید و با نمره ......۱۸/۸... و درجه ارزشیابی ...عالی............... مورد تائید قرار گرفت .

اعضای کمیته

	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	از دانشگاه	امضا
۱- استاد راهنما	آقای دکتر احمد خاکساری	استادیار	پیام نور شیراز	
۲- استاد مشاور	____________	__________	___________	
۳- داور جلسه	خانم دکتر منصوره معانی شیرازی	استادیار	پیام نور استهبان	
۴- نماینده دانشگاه	خانم دکتر مهناز پروانه نژاد شیرازی	استادیار	پیام نور شیراز	

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

هدیه ی من به شما تلاش من خواهد بود، همواره می کوشم تا باعث آسودگی خاطر نازنینتان باشم.

تقدیر و تشکر:

سپاس می گویم پروردگارم را که به من قدرت خواندن، نوشتن و یادگیری را عطا نمود ،از اینکه در خط به خط این پایان نامه همراهی ام نمود و توانم داد تا آن را به پایان برسانم. و از او یاری می طلبم که لحظه ای از مسیر صداقت خارج نشوم.

وظیفه خود می دانم از استاد بزرگوار و عزیزم جناب دکتر احمد خاکساری به پاس هدایت صادقانه ، راهنمایی و زحمات بی دریغشان تشکر نمایم و از خداوند متعال توفیقی روز افزون برای ایشان و خانواده محترمشان خواستارم.

از زحمات پدر و مادر دلسوزم که همیشه و همه جا پشتیبانم بودند و هستند و از خواهر مهربانم که با حضور دلگرم کننده اش در کنارم مرا یاری نمود تشکر می نمایم و سپاس قلبی خود را نسبت به استادم آقای مهدیه و دوستانم خانم روشنی و خانم محمودی ابراز می نمایم.

چکیده

نام خانوادگی دانشجو: زمردیان اصفهانی نام: راضیه

عنوان پایان نامه: زیرمدولهای اول مجزا

استاد راهنما: دکتر احمد خاکساری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته : ریاضی گرایش: جبر

دانشگاه: پیام نور مرکز شیراز

تاریخ فارغ التحصیلی : ۱۰ مرداد ۱۳۸۶

کلید واژه ها:

زیر مدول مجزا، مدول ضربی زیر مدول اول، زیر مدولهای اولیه، دامنهٔ کرول

هدف این پایان نامه پیدا کردن بعضی قضایا در مورد زیر مدولهای اول از مدول ها و اثبات قضایای دربارهٔبرد مدولها است.

زیر مدولهای اول مجزا

۱– مقدمه

۱. ۱– یادآوری از حلقه‌ها و همریختی

۱. ۲– مدولها و زیر مدولها

۱. ۳– تعاریفی از زیر مدولهای اول از M

۱. ۴– تعاریفی از حلقه‌ها و مدولها

۲– زیر مدولهای اول مجزا

۳– زیر مدولهای اول مجزا روی مدولهای خاص

۴– زیر مدولهای اول از M و $S^{-1}M$

۵– بعد مدولها

می‌گویند تقوا از تخصص لازم‌تر است، آن را می‌پذیریم ولی می‌گوییم آن کس که تخصص ندارد و کار بزرگی را می‌پذیرد بی‌تقوا است.

«شهید چمران»

۱- مقدمه

در این پایان‌نامه همهٔ حلقه‌ها جابه جایی و یکدار می‌باشد و همهٔ مدولها یکانی می‌باشند. این پایان نامه از پنج قسمت تشکیل شده است. که در قسمت اول مقدمه‌ای از تعاریف اولیه و موارد مورد نیاز در طول پایان نامه ولم و قضایای بدون اثبات بیان شده است.

در قسمت دوم از این پایان نامه ما توجه می‌کنیم به دیگر موارد (قضیه۳ ۰ ۲، قضیهٔ ۲۰۵).
با گرفتن نتیجه‌ای از قضیه ۱۰۱ از [۱] و ثابت می‌کنیم یک قضیه (قضیه ۲۰۷) دربارهٔ زیر مدولهای اولیه که خیلی شبیه به قضیهٔ ۲۰۱ از [۱] است.

در قسمت سوم قضایایی را در مورد زیر مدول‌های اول مجزا در مورد مدولهای خاص (مدولهای ضربی، مدولهای محتوا، مدولهای هموار و سریال) بیان می‌کنیم.

در قسمت چهارم قضایایی در مورد زیر مدول های اول از مدول M و $S^{-1}M$ بررسی می کنیم.و ثابت می کنیم که:

اگر M یک R– مدول باشد و S یک زیر مجموعه بسته ضربی R باشد آنگاه،

۱- اگر M یک R– مدول ضربی باشد، آنگاه $S^{-1}M$ نیز یک $S^{-1}R$ مدول ضربی است

۲- اگر M متناهی مولد باشد آنگاه M یک R– مدول ضربی است اگر و فقط اگر بـرای هـر ایده‌آل اول P از R، R_P- مدول M_P، یک مدول ضربی باشد.

در قسمت پنجم این پایان نامه ثابت می‌کنیم که dim M = cl.k.dim M (قضیه ۵.۹ و قضیهٔ ۵.۱۰) اگر M وابسته باشد به شرایط زیر:

۱- M یک مدول توزیع پذیر متناهی مولد است.

۲- M یک مدول توزیع پذیر با $\mu M+M$ بر حلقه موضعی (R, μ) است.

در آخر ما ثابت می‌کنیم برای هر ایده‌آل اول P از R و یک R – مدول توزیع پذیر متناهی مولد dim Mp=cl.k.dim Mp (قضیهٔ ۵.۱۱)

۱.۱ یادآوری از حلقه‌ها و همریختی ها

تعریف۱.۱.۱

در این پایان نامه منظور از یک حلقهٔ جابه جایی و یکدار که معمولا با R نمایش می‌دهیم مجموعه‌ای است همراه با دو عمل دوتایی (+) و ضرب (.)

به طوری که :

۱- R همراه با عمل (+) یک گروه آبلی است.

۲- عمل ضرب روی R خاصیت شرکت‌پذیری ($(xy)z = x(yz)$) و ضرب خاصیت پخش‌پذیری روی عمل جمع را دارد.

$$(y+z)x = yx + zx \quad , x(y+z) = xy + xz$$

۳- برای هر دو عضو دلخواه x , y از R داریم $xy = yx$

۴- عضوی مانند $1\in R$ وجود دارد به طوری که برای هر $x\in R$ داریم $x.1=1.x=x$

تعریف۱.۱.۲

فرض کنیم R',R حلقه باشند، $f:R\to R'$ را همریختی (Homomorphism) حلقه می‌نامیم در صورتی که به ازای هر $x,y\in R$ داشته باشیم.

۱- $f(x+y) = f(x) + f(y)$

۲- $f(x.y) = f(x).f(y)$

۳- $f(1_R)=1_{R'}$

تعریف ۱.۱.۳

اگر همریختی f پوشا و یک به یک باشند آن را یکریختی (Isomorphism) نامیم.

در صورتی که f تنها پوشا باشد آن را بروریختی (Epimorphism) و اگر یک به یک باشد آن را تکریختی (monomorphism) گوییم.

تعریف ۱.۱.۴

فرض کنیم R حلقه‌ی تعویض پذیر باشد زیر مجموعهٔ I از R را ایده‌آل نامیم اگر

۱- $I \neq \phi$

۲- هرگاه $a,b \in I$ آنگاه $a-b \in I$

۳- اگر $r \in R, a \in I$ آنگاه، $ra \in I$

تعریف ۱.۱.۵

فرض کنیم R یک حلقه باشد، می گوییم ایده‌آل I از حلقهٔ R محض (سره) است اگر $I \neq R$

تعریف ۱.۱.۶

فرض کنیم P ایده‌آلی از حلقهٔ تعویض پذیر R باشد. P را ایده‌آل اول (Prime) R می‌نامیم اگر

۱- $P \neq R$

۲- اگر $a,b \in R$ و $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$

تعریف ۱.۱.۷

ایده‌آل m از حلقهٔ R را ماکسیمال می‌نامیم در صورتی که $m \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل I از R، اگر $m \subseteq I$ آنگاه I=R یا m=I

تعریف ۱.۱.۸

فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیر مجموعهٔ ناتهی R باشد گوییم S یک زیر مجموعهٔ بسته ضربی R است به شرط آن که

۱- $0 \notin S$

۲- $1 \in S$

۳- به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$

تعریف ۱.۱.۹

اگر حلقه‌ای فقط دارای یک ایده‌آل ماکیسمال باشد آن را یک حلقهٔ موضعی (Local) می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۰

ایده‌آل I از حلقهٔ R را مینمال گوییم هرگاه J یک ایده‌آل حلقهٔ R باشد بطوری که $o \subseteq J \subseteq I$ آنگاه J=o یا J=I

تعریف ۱.۱.۱۱

اگر I یک ایده‌آل حلقهٔ R باشد رادیکال I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Rad(I) = \sqrt{I} = \{x \in R : x^n \in I \quad \text{برای بعضی} \quad n \in N\}$$

تعریف ۱۲. ۱. ۱

فرض کنید S زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی R باشد، رابطهٔ ~ روی R×S به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow (at-bs)x=0 \quad (x\in S$ برای بعضی)

بوضوح رابطهٔ ~ یک رابطهٔ هم ارزی است.

$\frac{a}{s}$ رابه عنوان کلاس هم ارزی (a,s) و $S^{-1}R$ را مجموعهٔ تمام کلاس های هم ارزی در نظر می‌گیریم. ما به $S^{-1}R$ با تعریف ضرب و جمع زیر یک ساختار حلقه‌ای می‌دهیم.

$$(\frac{a}{S})+(\frac{b}{t})=\frac{(at+bs)}{St}$$

$$(\frac{a}{s}).(\frac{b}{t})=\frac{ab}{st}$$

تعریف ۱۳. ۱. ۱

فرض کنیم P یک ایده‌آل اول R باشد. در این صورت S=R–P یک زیر مجموعه بسته ضربی R است و $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می‌دهیم.

لم و نماد گذاری ۱۴. ۱. ۱

فرض می‌کنیم $f:L\to M$ همریختی مدولی روی حلقه تعویض پذیر R و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. در این صورت از f یک $S^{-1}R$– همریختی چون $S^{-1}f:S^{-1}L\to S^{-1}M$ بدست می‌آید که به ازای هر $S^{-1}f(\frac{a}{s})=\frac{f(a)}{s}, s\in s, a\in L$

تذکر ۱.۱.۱۵

فرض می‌کنیم N,M,L مدولهای روی حلقه تعویض پذیر S,R زیر مجموعه بسته ضربی از R باشند. فرض می‌کنیم $f, f' : L \to M$ و $R, g : M \to N$ – همریختی باشند.
آنگاه

۱- $S^{-1}(f + f') = S^{-1}f + S^{-1} f'$

۲- $S^{-1}0$ همریختی صفر از $S^{-1}L$ به $S^{-1}M$ است.

۳- $S^{-1}(gof) = S^{-1}goS^{-1}f$

۴- $S^{-1}(Id_M) = Id_{S^{-1}M}$

۵- اگر R, f– یکریختی باشد آنگاه $S^{-1}R$, $S^{-1}f$– یکریختی است.

تذکر ۱.۱.۱۶

فرض کنیم L_1, L_2 زیر مدولهای از مدول M روی حلقه R و S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد.همچنین فرض کنیم $r \in I$ و I ایده‌آل R باشد آنگاه ،

۱- $S^{-1}(L_1 + L_2) = S^{-1}L_1 + S^{-1}L_2$

۲- $S^{-1}(L_1 \cap L_2) = S^{-1}L_1 \cap S^{-1}L_2$

تعریف ۱.۱.۱۷

اگر $f : R \to R'$ همریختی حلقه، I ایده‌آل R، و J ایده‌آل R' باشد آنگاه $f^{-1}(J)$ یک ایده‌آل R است که با علامت J^c نمایش می‌دهیم و با $J^c=f^{-1}(J)$ نمایش می‌دهیم که $f^{-1}(J)= \{ r \in R:f(r)\in J \}$. همچنین می‌دانیم که f(I) لزوماً یک ایده‌آل حلقه R' نیست اما ایده‌آل تولید شده توسط f(I) را با I^e نشان میدهیم لذا

$$I^e = < f(I) > = R' f(I)$$

بنابراین $I^e=\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i' f(t_i) \middle| x_i' \in R', t_i \in I\right\}$

تذکر ۱.۱.۱۸

اگر I_1, I_2 ایده‌آلهای R و J_1, J_2 ایده‌آل های R' باشند آنگاه

۱- $(I_1+I_2)^e=I_1^e+I_2^e$

۲- $(I_1\bigcap I_2)^e\subseteq(I_1^e\bigcap I_2^e)$

۳- $(I_1 I_2)^e=I_1^e I_2^e$

۴- $(I_1:I_2)^e\subseteq(I_1^e:I_2^e)$

۵- $(J_1+J_2)^C\supseteq J_1^C+J_2^C$

۶- $(J_1\bigcap J_2)^c=J_1^c\bigcap J_2^c$

۷- $(J_1 J_2)^c\supseteq J_1^c J_2^c$

۸- $(J_1:J_2)^c\supseteq(J_1^c:J_2^c)$

لم ۱.۱.۱۹

اگر $f:R\to S$ همریختی حلقه‌ها، I ایده‌آل R و J ایده‌آل S باشند. در این صورت با استفاده از نمادهای I^e و J^c داریم.

۱- $I\subseteq I^{ec}$

۲- $J^{ce}\subseteq J$

۳- $I^e=I^{ece}$

۴- $J^{cec}=J^c$

۱.۲ مدولها و زیر مدولها

تعریف ۱.۲.۱

فرض کنیم R یک حلقه منظور از یک R- مدول M، گروه آبلی M است همراه با عمل دوتایی $R\times M \to M$ $(r,m)\to rm,$ که برای هر m و m' متعلق به M و r_1 و r_2 متعلق به R داشته باشیم.

۱- به ازای هر $r(m+m')=rm+rm', m,m'\in M, r\in R$

۲- به ازای هر $(r+r')m=rm+r'm, m\in M, r',r\in R$

۳- به ازای هر $(rr')m=r(r'm), m\in M, r,r'\in R$

۴- به ازای هر $1_R.m=m, m\in M$

تعریف ۱.۲.۲

فرض کنیم M , N دو R -مدول باشند. نگاشت $f:M\to N$ را یک همریختی R- مدولی گوییم هرگاه

۱- $\forall x,y\in M$ $\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$

۲- $\forall r\in R, \forall x\in M$ $\quad f(rx)=rf(x)$

تعریف ۱.۲.۳

فرض کنیم M یک R – مدول و N زیر مجموعه‌ای از M باشد. گوییم N زیر مدول M یا R زیر مدول M است اگر N خود با عملهای M یک R- مدول باشند.

معیار زیر مدول‌ها

فرض کنیم R حلقه‌ی تعویض‌پذیر و N زیر مجموعه‌ای از R – مدول M باشد. در این صورت N زیر مدول M است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد.

۱- $N \neq \phi$

۲- هرگاه، $r' \in R, n, n' \in N$ آنگاه $n - n' \in N$ و $rn \in N$

تعریف۴. ۲. ۱

زیر مدول N از R- مدول M را متناهی مولد گوییم اگر توسط زیر مجموعه‌ای متناهی از M (در واقع لزوما از N) تولید شده باشد.

یک R– مدول را دوری گوییم اگر توسط یک عضو تولید شده باشد.

تعریف ۵. ۲. ۱

زیر مدول N از مدول M را اول (ابتدایی) می‌گوییم هرگاه برای هر $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in N$ آنگاه نتیجه دهد که $m \in N$ یا $rM \subseteq N$

تعریف ۶. ۲. ۱

فرض کنیم R یک حلقه ، R,G,M,N – مدول، $f : M \to N$ و $g : G \to M$ همریختی R مدولی باشند گوییم دنباله

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

دقیق است اگر $\ker f = \operatorname{Im} g$

۱.۳ زیر مدولهای اول از M

تعریف ۱. ۱.۳

اگر M یک R- مدول و N زیر مدول از M باشد، در این صورت (N:M) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(N:M)=\{r\in R: rM\subseteq N\}$$

تذکر ۲. ۱.۳

اگر M یک R- مدول و N زیر مدولی از M باشد به روشنی (N:M) یک ایده‌آل از R است.

تعریف ۳. ۱.۳

فرض کنیم R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. زیر مدول سرهٔ P از M را اول می‌نامیم اگر $rm\in P$ آنگاه $m\in P$ یا $r\in (P:M)$

خصوصا زیر مدول اول P را p- اول (P-prime) می‌نامیم اگر (P:M)=P

به درستی اگر P یک زیر مدول اول از M باشد آنگاه (P:M) یک ایده‌آل اول از R است.

لم ۱.۳.۴

فرض کنیم N یک زیر مدول از R - مدول M باشد. آنگاه N یک زیر مدول اول از M است اگر و فقط اگر برای هر $r\in R$، همریختی طبیعی $f_r:\frac{M}{N}\to\frac{M}{N}$،با ضابطهٔ $f_r(x+N)=rx+N$، یک به یک باشد یا صفر.

تعریف ۱.۳.۵

زیر مدول سرهٔ Q از M را اولیه می‌نامیم اگر $rm \in Q$ برای $r \in R$ و $m \in M$ نتیجه دهد که، $m \in Q$ یا عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که $r^k M \subseteq Q$

زیرمدول اولیهQ از M، p- اولیه (P-primary) می‌نامیم اگرP= $\sqrt{(Q:M)}$. به درستی اگر Q یک زیرمدول p- اولیه باشد آنگاه p یک ایده‌آل اول از R است.

قضیه ۱.۳.۶

فرض کنیم M یک R- مدول ، N وP زیر مدولهای M باشد. اگر P با تولید متناهی باشد آنگاه

$$(N :_R P)_P = (N_P : P_P)$$

۱.۴ تعاریفی از حلقه‌ها و مدولها

لم ۱.۴.۱

اگر M یک R– مدول متناهی تولید شده باشد و I یک ایده‌آل از R باشد آنگاه

$$\sqrt{Ann(\frac{M}{IM})} = \sqrt{AnnM + I}$$

لم ۱.۴.۲

فرض کنیم M یک R– مدول متناهی تولید شده ، B یک زیر مدول از M وP یک ایده‌آل اول از R باشد به طوری که $(B:M) \subseteq P$، دراین صورت زیر مدول اول N از M شامل B وجود دارد به طوری که $(N:M) = P$.

تعریف ۳. ۴. ۱

R- مدول M را مدول ضربی می‌نامیم اگر برای هر زیر مدول N از M، ایده آل I از R موجود باشد به طوری که N=IM .

لم ۴. ۴. ۱

فرض کنید N یک زیر مدول از R- مدول ضربی M باشد به طوری که N=IM ، در این صورت داریم N=(N:M)M.

اثبات

با استفاده از تعریف (N:M) ، ما داریم $(N:M)M \subseteq N$ از اینکه $N = IM$ و $\mathrm{I} \subseteq (\mathrm{N}:\mathrm{M})$ ، بنابراین $N = IM \subseteq (N:M)M$ ولذا نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

لم ۵. ۴. ۱

اگر M یک R- مدول و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد آنگاه

۱- اگر M یک R- مدول ضربی باشد آنگاه $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$ مدول ضربی است.

۲- اگر M متناهی تولید شده باشد آنگاه M یک R- مدول ضربی است اگر و فقط اگر برای هر ایده‌آل اول p از R ، Rp- مدول Mp یک مدول ضربی باشد.