۱۵۵۲۹

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم تهران

موءسسه‌ی ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان :

تابعی مولد احتمال در فرایند نقطه‌ای

استاد راهنما :

دکتر عین ا... پاشا

نگارش :

بهروز فتحی واجارگاه

سال تحصیلی ۷۰-۷۱

مرداد ماه

تقدیم به :

پدربزرگوارم

مادرمهربانم

امیدوارم که قطره ای از دریای زحمات شان را جبران نموده باشم .

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تربیت معلم

" بسمه تعالی "

جلسه دفاع از پایاننامه برادر بهروزفتحیواجارگاه دانشجوی دوره‌کارشناسی ارشد آمار در روز شنبه مورخه ۷۱/۵/۲۴ درموٴسسه‌ی ریاضیات تشکیل گردید

ونتیجه آزمون به‌شرح زیرتعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون شانزده و نیم ۱۶/۵ می‌باشد.

۱ــ عالی ☐

۲ــ خوب ☒

۳ــ متوسط ☐
- نیاز به‌تجدیدنظردارد ☐
- نیاز به‌تجدیدنظرندارد ☐

۴ــ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	ممتحنین داخلی	ممتحنین خارجی
آقای دکترعین اله‌پاشا	۱ــ آقای دکترمحمدقاسم‌وحیدی	۱ــ آقای دکترمحمدرضا مشکانی
	۲ــ	۲ــ

حسین ذاکری

رئیس موٴسسه‌ی ریاضیات

دکتر غلامحسین مصاحب

"تشکر و قدردانی"

شایسته است از زحمات زیاد استاد محترم جناب آقای دکتر عین ا... پاشا که در طول تهیه و تدوین این رساله مرا مورد راهنمایی قرار دادند، تقدیر و سپاسگزاری نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر محمدقاسم وحیدی اصل و جناب آقای دکتر محمدرضا مشکانی بخاطر پذیرفتن داوری این پایان نامه تشکر می‌نمایم.

در پایان از سرکار خانم صمدیان بخاطر زحمت تایپ این پایان نامه قدردانی می‌گردد.

مرداد ۱۳۷۱

چکیده

برای فرایندنقطه‌ای N از فضای متریک جداپذیر کامل X تابعی مولد احتمال تعمیم یافته

$$\overline{G}[h]=E\exp\int_X \log h(x)\, N(dx)$$

برفضای

$$v_0=\{h:X\longrightarrow[0,1] \mid \inf_{x\in X} h(x)>0\}$$

خوش‌تعریف است. فضاهایی راکه تابعی مولد احتمال برآنها تعریف می‌شوند دسته‌بندی نموده ونشان می‌دهیم‌که توزیع فرایندنقطه‌ای N بطور منحصربفردی بوسیله تابعی مولد احتمال بفرم $\{G[h]:h\in v_0\}$ تعیین می‌گردد.

نتایجی را درخصوص پیوستگی تابعی مولد احتمال و تابعی مولد احتمال تعمیم یافته برای دنباله‌های همگرای نقطه‌وار $\{h_n\}$ از v و v_0 و $\overline{v}$ و $\overline{v_0}$ که درآن

$v=\{h:X\longrightarrow[0,1] \mid$ h اندازه‌پذیرو $1-h$ درخارج یک مجموعه محدودصفر $\}$

$\overline{v}=\{h:X\longrightarrow[0,1] \mid$ h اندازه‌پذیر $\}$

$$v_0=\{h\in\overline{v} \mid \inf_{x\in X} h(x)>0\}$$

بدست می‌آوریم ودرپایان ازاین خواص برای اثبات آمیخته بودن فرایندهای خوشه‌ای استفاده می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

" فصـــــل اول "

مقدمـــــه و دورنمـــــا

مقدمه و دورنما :

در زندگی روزمره به موارد زیادی برمی‌خوریم که ساختار تصادفی یا غیرتصادفی دارند. مطالعه و بررسی این پدیده‌ها به شکل تصادفی همواره بیشتر مورد توجه بوده و سبب آن می‌گردد که برنامه‌ریزی‌هایی که در حالت غیرتصادفی انجام می‌شود برای حالت تصادفی بکار نگیریم و در واقع چون در ساختارهای تصادفی عنصر تصادف مطرح است بایستی برنامه‌های از پیش تعیین شده را با اعتماد کمتری در نظر داشته باشیم و در این پدیده‌ها محتاطانه‌تر عمل نمائیم. در زیر به ذکر چند مثال جهت تمایز روند تصادفی و غیرتصادفی اکتفا می‌کنیم.

مثال الف :

یک مرکز مخابرات و بهره‌برداری تلفن را در دوره شبانه‌روزی در نظر می‌گیریم. این مرکز دارای نرخ مکالمه ثابتی نیست بطوریکه نرخ مکالمه در شب ارزانتر از نرخ مکالمه در روز است. هر مشتری با مراجعه به این مرکز خواهان ارتباط مکالمه‌ای است که از قبل برای مرکز پیش بینی نشده و جنبه تصادفی دارد یعنی هر مشتری برای مرکز یک پدیده تصادفی است علاوه بر آن این مشتری ممکن است شب و یا روز مراجعه کند پس نرخ مکالمه هر مشتری برای مرکز جنبه تصادف و اتفاقی دارد، لذا میزان دریافت هزینه مکالمه هر مشتری با توجه به متغیر بودن نرخ تلفن تصادفی است.

مثال ب :

نانوایی را در نظر می‌گیریم که روزانه تعداد معینی نان برای رستورانهای مشخصی از سطح شهر پخت می‌کند هر رستوران بنا به سفارش خود تعداد معلومی نان از این نانوایی دریافت می‌کند، چون فروش نان این نانوایی دارای تعداد مشخصی است لذا سود حاصل از فروش نان به هر رستوران معین و پیش بینی شده می‌باشد و جنبه تصادفی ندارد.

مثال ج :

نمایشگاه بین المللی کتاب تهران را در نظر می‌گیریم که اکثر اقشار تحصیلکرده در آن شرکت می‌کنند. دانشجویان اعم از دوره‌های کاردانی، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری، هیئت علمی دانشگاهها که خود شامل آموزشیار، مربی، استادیار، دانشیار و استاد می‌باشند و قشر دیگر از شرکت کنندگان که شامل کارمندان مقاطع تحصیلی مختلف از دیپلم تا مقطع دکتری و بقیه ... هر شرکت کننده بنا به نیاز و با توجه به مقطع تحصیلی و با مراجعه به غرفه‌هایی که خودش انتخاب می‌کند کتابهایی را برای سفارش برمی‌گزینند.

هیچ دو شرکت کننده ای با شرایط تحصیلی یکسان و حتی سهمیه خاص یکسان برای سفارش کتاب را نمی توان یافت که کتابهایی با قیمت های برابر و موضوعات مشترک از غرفه های یکسان را انتخاب نموده باشند. لذا میزان سفارش کتاب هر شرکت کننده در نمایشگاه و قیمت آن به ریال جنبه تصادفی دارد.

در مثالهای الف و ج، روند تصادف برقرار است و اندازه ای تصادفی برای آن قایل شدیم، برعکس در مثال ب مسئله غیرتصادفی است و اندازه مربوط به آن را غیرتصادفی می دانیم.

برای بررسی بهتر مثالهایی از نوع الف و ج بحث اندازه های تصادفی را مطرح می کنیم. ما این بحث را از نظریه عمومی اندازه های تصادفی شروع می کنیم و به کمک آن به مطالعه فرایندهای نقطه ای به عنوان اندازه های شمارشی در صفحه و فضاهای عمومی تر می پردازیم. اندازه های تصادفی را بر فضای متریک جدا پذیر کامل در نظر می گیریم و در بعضی اوقات آن را بر فضای اقلیدسی یا فضای فشرده موضعی محدود می کنیم.

برای بررسی بهتر ساختار این فضاها به ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

بنابراین در فصل دوم، ابتدا خلاصه ای از نظریه اندازه های تصادفی بر فضای متریک جدا پذیر کامل معرفی می کنیم و طی گزاره ای نشان می دهیم که میتوان در شرایط مطلوب اندازه های تصادفی را با متغیرهای تصادفی متناظر نمود، سپس فرایندهای نقطه ای را به عنوان اندازه شمارشی حالت خاصی از اندازه های تصادفی در نظر می گیریم و ضمن بیان توزیع اندازه های تصادفی (و در نتیجه فرایندهای نقطه ای) به فضاهای حاصلضربی و قضیه فوبینی می رسیم و به دنبال آن نیز شرط سازگاری و قضیه گسترش منسوب به ریاضیدان روسی کلموگروف را یادآور می شویم و در انتهای فصل دوم فرایند پواسون با اندازه پارامتر را معرفی و فرایند پواسون معمولی را با آن مقایسه می کنیم و حالت خاصی از آن در نظر می گیریم سپس نشان می دهیم که فرایند پواسون به عنوان اندازه تصادفی (فرایند نقطه ای) فاقد اتم ثابت است.

در فصل سوم چون اکثر انتگرالهای مورد بحث تصادفی اند، با بیان تعریف انتگرال تصادفی شروع می کنیم و سپس نشان می دهیم که برای هر تابع اندازه پذیر برل، انتگرال تصادفی آن تابع را می توان به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفت. آنگاه با بیان گزاره ای نشان می دهیم که اندازه های تصادفی را می توان توسط خانواده ای از انتگرالهای

تصـــــــــــــــا دفی‌شنا سا یی"Charactrized " نمود .

بعدتا بعی‌مشخصه ،تا بعی‌لاپلاس وتا بعی‌مولدا حتما ل وخوا ص مشا به‌آ نها را بیـــا ن می‌کنیم .سپس با ا دا مه‌بحث تا بعی‌ها ی‌مولدا حتما ل وگسترش فضا ی‌توا بعی‌که‌تا بعی‌هـــا ی مولدا حتما ل برآ ن تعریف می‌شوندبه‌بیا ن وا ثبا ت خوا ص پیوستگی‌تا بعی‌مولدا حتمـا ل وتا بعی‌مولدا حتما ل تعمیم‌یا فته می‌پردا زیم .

درفصل ۴ درا متدا دمفا هیم‌فصل دوموسوم‌بحث آ میخته‌بودن فرا یندها ی‌نقطـه‌ا ی را مطرح‌می‌کنیم‌سپس بیک شرط لازم‌وکا فی‌برا سا س تا بعی‌لاپلاس ،برا ی‌آ میختن ا ندا زه‌ها ی تصا دفی‌می‌رسیم .

دربخش بعدی‌به‌فرا یندنقطه‌ا ی‌مشروط می‌رسیم‌وسپس با ا یجا دزمینه‌ا ی‌منا سب بـه ا ثبا ت قضیهWestcott که‌مبین یک شرط لازم‌وکا فی‌برا سا س تا بعی‌مولدا حتما ل ،برا ی آ میخته‌بودن ا ندا زه‌ها ی‌تصا دفی‌ا ست می‌پردا زیم ،بعدا "با ا ستفا ده‌ا زهمین قضیه یــــک شرط کا فی‌برا ی‌آ میخته‌بودن فرا یندنقطه‌ا ی‌برا سا س تا بعی‌مولدا حتما ل تعمیم‌یا فتـــه می‌رسیم .

دربخش بعدی‌فرا یندخوشه‌ا ی‌را معرفی‌می‌کنیم‌وضمن تعریف وقضا یا یی‌سرا نجــــا م با ا ستفا ده‌ا زقضا یا ی‌قبلی‌که‌درخصوص برخی‌خوا ص پیوستگی‌تا بعی‌مولدا حتما ل بیا ن نموده بودیم‌نشا ن می‌دهیم‌که‌آ میخته‌بودن فرا یندمرکزی‌خوشه‌ا ی،آ میخته‌بودن فرا یندخوشه‌ا ی ا یستا را ا یجا ب می‌کند .

مقا له‌ا صلی‌موردبحث ما درطول ا ین پا یا ن نا مه [6] می‌با شد .

فصـــل دوم

اندازه‌های تصادفی و فرایندهای نقطه‌ای

۲-۱ . اندازه‌های تصادفی:

فرض کنید X یک فضای متریک جداپذیر کامل و (Ω,ε,P) یک فضای احتمال و $\mathcal{B}(X)$ نمایش تمام زیرمجموعه‌های برل X باشد.

۲-۱-۱. تعریف:

اندازه برل μ را روی فضای متریک جداپذیر کامل X محدوداً "متناهی" گوئیم هرگاه به ازاء تمام مجموعه‌های محدود $A\in\mathcal{B}(X)$ داشته باشیم؛ $\mu(A)<\infty$.

فضای تمام اندازه‌های برل محدوداً "متناهی" روی X را با $\hat{M}_X$ نشان می‌دهیم، یعنی:

$$\hat{M}_X=\{\mu:\ \mu \text{ اندازه برل و محدوداً "متناهی"}\}$$

می‌توان با قرار دادن یک متریک بر فضای $\hat{M}_X$ این فضا را بعنوان فضای متریک جداپذیر کامل در نظر گرفت. [گزاره A2.5.III، از [10]]

همچنین فرض کنیم که $\psi_A:\hat{M}_X\longrightarrow R$ با $\psi_A(\mu)=\mu(A)<\infty$

بعلاوه $\mathcal{B}(\hat{M}_X)=\sigma\{\psi_A:\ A\in\mathcal{B}(X)\}$.

در اینصورت $\mathcal{B}(\hat{M}_X)$ کوچکترین σ-جبری است که نگاشت‌های $\mu\longrightarrow\mu(A)$ اندازه‌پذیر باشد. [گزاره A.2.5.IV، [10]].

۲-۱-۲. تعریف:

اندازه تصادفی ξ با فضای وضعیت X نگاشتی است اندازه‌پذیر از فضای احتمال (Ω,ε,P) بتوی $(\hat{M}_X,\mathcal{B}(\hat{M}_X))$.

درزیر به گزاره‌ای می‌پردازیم که به ما امکان می‌دهد تا با داشتن یک اندازه تصادفی به یک متغیر تصادفی دسترسی داشته و در واقع ایجاد انگیزه‌ای است تا برخی خواص متغیرهای تصادفی را مشابها "به اندازه‌های تصادفی نسبت دهیم.

۲-۱-۳. گزاره:

فرض کنید که $\xi:\Omega\longrightarrow\hat{M}_X$ و $\mathcal{A}$ یک نیم‌حلقه تولید شده از زیرمجموعه‌های برل X باشد، آنگاه ξ یک اندازه تصادفی است اگر و تنها اگر برای هر $A\in\mathcal{A}$، ξ_A یک متغیر تصادفی باشد.

برهان:

ابتدا فرض کنیدکه $\S_A:\Omega \longrightarrow R^+$ متغیرتصادفی باشد. فرض کنیدکه $\mathcal{U}$ σ ـ جبرتولیدشده از زیرمجموعه‌های $\hat{M}_X$ باشدکه تحت تصویرمعکوس §، پیشامدباشند یعنی:

$$\mathcal{U} = \sigma\{V\subset M_X \ :\ \S^{-1}(V)\in \varepsilon\}$$

بعلاوه فرض کنیدکه $\psi_A:\hat{M}_X \longrightarrow R^+$ با $\psi_A(\mu)=\mu(A)$. دراینصورت درحالت خاص $\mu=\S(\cdot,W)$ داریم:

$$\psi_A(\S(\cdot,W)) = \S(A,W) \qquad (۱)$$

ازآنجائیکه $\S_A:\Omega \longrightarrow R^+$ لذا:

$$\S_A(W) = \S(A,W) \qquad (۲)$$

ازروابط (۱)و(۲)خواهیم داشت:

$$\S_A(W)=\S(A,W)=\psi_A(\cdot,W))$$

لذا با توجه به بحث فوق الذکردیاگرام زیررا خواهیم داشت:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "\S : W \longrightarrow \S(\cdot,W)"] \arrow[dr, swap, "\S_A : W \longrightarrow \S(A,W)"] & & \hat{M}_X \arrow[dl, "\psi_A :\ \mu \longrightarrow \mu(A)"] \\
& R^+ &
\end{tikzcd}$$

برای هر $B\in\mathcal{B}(R^+)$:

$$\S^{-1}(\psi_A^{-1}(B))=(\S_A)^{-1}(B) \qquad (۳)$$

چون طبق فرض $\S_A$ یک متغیرتصادفی است پس $(\S_A)^{-1}(B)\in\varepsilon$ یعنی:

$$\S^{-1}(\psi_A^{-1}(B))\in\varepsilon$$