[صلى ـ]

دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گراف های وابسته به حلقه های جابجایی

نگارش: زهرا سادات سید صادق

استاد راهنما: دکتر حمید رضا میمنی

استاد مشاور: دکتر سیامک یاسمی

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

در

ریاضی محض

دی ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

همسر صبور و مهربانم

تشکر و قدردانی

چه خوش باشد که بعد از روزگاری به امیدی رسد امیدواری

اگر خزان را امید بهاری نبود، اگر درد را امید شفائی نبود، بی شک تلاش که مهمترین عامل سازندگی و رشد انسان است، در گرداب تنبلی هلاک می‌گشت. اما تقدیر این نبود تا زندگی معنا یابد و آنان که می‌خواهند همیشه زنده بمانند، به تلاشی بزرگ برای رسیدن به امیدی در دوردست واداشته شوند.

این مجموعه تلاش ناچیزی است برای رسیدن به امید. اثبات تلاش است، نه تحصیل امید.

اکنون که با استعانت و عنایت حضرت حق تدوین و نگارش این رساله پایان یافته است، در به فرجام رسیدن این مهم، از گنجینه علم و حکمت و سرچشمه بذل و معرفت بزرگانی بهره برده‌ام که بر خود واجب می‌دانم از تمامی آن بزرگواران کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. با این که می‌دانم فراتراز توان بیان و کلام من است، ولی امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند. لذا بر خود لازم می‌دانم از آقای دکتر حمیدرضا میمنی که زحمت راهنمایی این پایان نامه را کشیدند تشکر نمایم. از آقای دکتر سیامک یاسمی که به عنوان استاد مشاور از راهنمایی های کارگشایشان بسیار استفاده کردم، سپاسگزارم و همچنین از دیگر اساتید بخش ریاضی نیز قدردانی می نمایم و برایشان سلامتی و موفقیت را از خداوند منان خواستارم. از آقای دکتر پورنکی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را کشیدند، تشکر می‌کنم.

در انتها از همسر مهربان، صمیمی، صبور و خستگی ناپذیرم به خاطر زحمات فراوان و هم چنین از پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی راهنما و مشوّق من بوده‌اند و تمام موفقیت های من مرهون فداکاری های آنها می‌باشد، سپاسگزارم.

چکیده

در سال های اخیر گراف های زیادی به ساختار حلقه های جابجایی نسبت داده شده است، از جمله گراف مقسوم علیه صفر، گراف جابجایی و ....

در این پایان نامه سعی خواهیم کرد دو خانواده مهم از این گراف ها را مورد بررسی قرار دهیم که عبارتند از:

(الف) گراف هم ماکسیمال ($Comaximal \quad graph$): این گراف را با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم و رئوس آن عناصر حلقه بوده و دو رأس a و b مجاورند هرگاه $Ra + Rb = R$، سپس یک زیر گراف خاص آن به نام گراف یکال را که با $G(R)$ نشان می دهیم، مورد بررسی قرار می دهیم.در این گراف رئوس همان عناصر حلقه بوده و دو عنصر a و b مجاورند هرگاه $a + b \in U(R)$.

(ب) گراف جمعی ($Total \quad graph$): این گراف را با $T(\Gamma(R))$ نمایش می دهیم و دو عنصر a و b در این گراف مجاورند هرگاه $a + b \in Z(R)$، که $Z(R)$ مقسوم علیه صفر حلقه R است.

هدف از معرفی این گراف ها بکارگیری یک شیء ترکیباتی برای درک بهتر موضوع مجرد حلقه های جابجایی است.

در این مقوله سه سؤال مهم مطرح است که سعی کردیم به آن ها جواب هایی بدهیم:

الف) این گراف ها کدام خواص گرافی را دارند؟

ب)حلقه ها کدام خواص گرافی را از خود بروز می دهند؟

ج) اگر گراف دو حلقه یکریخت باشند، آیا حلقه ها یکریختند؟

کلمات کلیدی: گراف، حلقه جابجایی، گراف هم ماکسیمال، گراف یکال، گراف جمعی، قطر، دور، کمر، همبندی، حلقه آرتینی، حلقه های $K - good$.

فهرست مندرجات

مقدمه

آنچه که در این پایان نامه مورد بحث قرار گرفته است آشنایی و مطالعه گراف های متناظر با حلقه های جابجایی است. در سال ۱۹۸۸، بک برای اولین بار گراف مقسوم علیه صفر متناظر با حلقه جابجایی R را با $\Gamma(R)$ نشان داد و این چنین تعریف کرد: گرافی با رأس هایی از R و دو رأس متمایز y و x در این گراف مجاورند اگر وفقط اگر $xy = ۰$. او بیشتر در مورد گراف حلقه های رنگ پذیر متناهی تحقیق کرد و در مورد برخی حلقه ها ثابت کرد که عدد رنگی و عدد خوشه ای آن ها با هم برابر است و حدس زد که این برابری را می تواند به تمام حلقه ها تعمیم دهد، اما در سال ۱۹۹۳، نصیر و اندرسون توانستند حلقه ای موضعی و متناهی پیدا کنند که $۵ = clique(R) < \chi(R) = ۶$. حال ما در این پایان نامه به‌انواع دیگری از گراف های متناظر با حلقه R می پردازیم و نتایج قابل توجهی را ارائه می کنیم.

در فصل (۱) با تعاریف کلی در مورد گراف ها و حلقه های جابجایی آشنا می‌شویم. همچنین برخی تعریف های ابتدایی که در طول پایان‌نامه از آن ها استفاده می‌شود، ذکر شده است.

در فصل (۲) گراف هم ماکسیمال را معرفی می کنیم. البته لازم به ذکر است که در سال ۱۹۹۵، شارما و باتوادکار این گراف را به این گونه تعریف کردند: گرافی است که رئوس آن عناصر R و دو رأس متمایز b و a در آن مجاورند اگر وتنها اگر $Ra + Rb = R$ و نشان دادند که $\chi(\Gamma(R)) < \infty$ اگر و تنها اگر حلقه R متناهی باشد و هم چنین ثابت کردند که اگر t تعداد ایده ال های ماکسیمال R و l تعداد عناصر یکه در R باشد، آن گاه داریم: $\chi(\Gamma(R)) = clique(\Gamma(R)) = t + l$. حال ما در این فصل نتایج بیشتری از خصوصیات این نوع گراف را بیان می کنیم و خواص گرافی دو زیر گراف این گراف به نام های $\Gamma_۱(R)$ [۱] و $\Gamma_۲(R)$ [۲] را شرح می دهیم و نشان می دهیم که $\Gamma_۲(R) \setminus J(R)$ گرافی دوبخشی

[۱] گراف تولید شده توسط عناصر یکه R

[۲] گراف تولید شده توسط عناصر نایکه در R

کامل است اگر و تنها اگر $|Max(R)| = ۲$ و هم چنین R حاصل ضرب متناهی حلقه شبه‌موضعی است اگر وتنها اگر R تمیز بوده و $clique(\Gamma_۲(R)) \setminus J(R)$ متناهی باشد و نشان می دهیم که $\Gamma_۲(R) \setminus J(R)$ گرافی همبند است و قطر آن کوچکتر یا مساوی ۳ است. در آخر جواب این سؤال را که اگر گراف دو حلقه جابجایی S و R با هم یکریخت باشند، آیا دو حلقه S و R نیز با هم یکریختند، شرح می دهیم و می بینیم که اگر دو حلقه شبه موضعی بوده و یکی از آن ها کاهشی باشد، آن گاه می توان گزاره بالا را ثابت کرد.

هدف فصل (۳) آشنایی با نوعی دیگر از گراف متناظر با حلقه R است. حالت خاص این گراف در سال ۱۹۹۰ توسط گریمالدی به این گونه معرفی شد که گراف، متناظر با حلقه Z_n بوده و رئوس آن $V = \{۰, ۱, ۲, \cdots, n - ۱\}$ و دو رأس متمایز y و x در Z_n متمایزند اگر وتنها اگر $(x + y)^{-۱} \in Z_n$ و با $G(Z_n)$ نمایش داد و نشان داد که برای m های مثبت $G(Z_{۲m})$ گرافی $\phi(۲m)$ منظم است و شامل $\frac{\phi(۲m)}{۲}$ دور همیلتونی است (ϕ تابع اویلر است) و $G(Z_p)$ ($p = ۲r + ۱$ عدد اول) گرافی به شکل $K_۱ \vee K_{\underbrace{۲, ۲, \cdots, ۲}_{r}}$ است و به کمک این نوع نوشتن به راحتی توانست چند جمله ای رنگی این گراف را بدست آورد. حال در این فصل از حلقه R به جای حلقه Z_n استفاده شده است و دو رأس متمایز y و x مجاورند اگر وتنها اگر $(x + y) \in U(R)$[3] و به آن گراف یکال می گویند. در این فصل به رابطه بین گراف یکال $G(R)$ با گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ و $G(R \oplus M)$[4] پی می بریم و ملاحظه می کنیم که اگر m ایده ال ماکسیمال R باشد که $[R, m] = ۲$، آن گاه $G(R)$ گرافی دوبخشی است و اگر R میدانی با p^n عضو باشد، داریم: $G(R) \cong K_۱ \vee cp(p^n - ۱)$. سپس در مورد همبندی این گراف نتایجی را بیان می‌کنیم و به نتایج بدست آمده درباره همبندی و قطر گراف متناظر با حلقه چند جمله ای ها و ماتریس های $n \times n$ پی می بریم. جالب آن است که فهمیدیم عدد رنگی یالی گراف یکال همواره برابر با d (بزرگترین درجه رئوس گراف)است و عدد رنگی و عدد خوشه ای گراف متناظر با حلقه $F_۱ \times \cdots \times F_n$ که F_i ها میدان های متناهی هستند، با هم برابراست و حدس زده اند که این نتیجه را می توان به تمام حلقه ها تعمیم داد. هم چنین ثابت شده است که در حلقه های متناهی قطر گراف یکال همواره کوچکتر یا مساوی ۳ است و کمر گراف $\{۳, ۴, ٦, \infty\}$ است.

[3] مجموعه عناصر یکه R

[4] توسیع ناگاتای R توسط R مدول M

در فصل (۴) گراف دیگری را به نام گراف جمعی حلقه R معرفی می کنیم که آن را با $T(\Gamma(R))$ نمایش می دهند و رئوس آن عناصر حلقه R بوده و دو رأس متمایز y و x مجاورند اگر و تنها اگر $x+y\in Z(R)$[5]. سپس به مطالعه سه زیر گراف $Reg(\Gamma(R))$، $Z(\Gamma(R))$ و $Nil(\Gamma(R))$ با رأس هایی به ترتیب از $Reg(R)$[6]، $Z(R)$ و $Nil(R)$[7] پرداختند. در این فصل حلقه ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: حلقه هایی که $Z(R)$ ایده ال R است و حلقه هایی که مجموعه مقسوم علیه صفر آن ایده ال R نیست. اگر شرط ایده ال بودن $Z(R)$ را داشته باشیم، می بینیم که $Z(\Gamma(R))$ زیر گراف کامل و مجزا از $Reg(\Gamma(R))$ است و $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع مجزایی از گراف ها به شکل گراف کامل یا دو بخشی کامل است و اگر $Z(R)$ ایده ال R نباشد، ملاحظه می کنیم که $Z(\Gamma(R))$ همبند است و مجزا از $Reg(\Gamma(R))$ نیست و $T(\Gamma(R))$ همبند است اگر و تنها اگر $R=<Z(R)>$. هم چنین در مورد گراف جمعی حلقه $R\oplus M$ نتایجی را شرح می دهیم.

---

[5] مجموعه مقسوم علیه صفر R

[6] عناصر منظم R

[7] عناصر پوچ توان R

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی از نظریه حلقه های جابجایی و نظریه گراف که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته است، یادآوری می گردد.

۱.۱ مفاهیم مربوط به نظریه گراف

تعریف ۱. ۱.۱ گراف G بنا به تعریف، برابر زوج (V,E) است که V مجموعه ای شامل تعداد دلخواهی عضو و مجموعه E شامل تعداد دلخواهی از زیرمجموعه های دو عضوی مجموعه V است. مجموعه V را رئوس گراف G و مجموعه E را یال های گراف G می نامند.
به طور شهودی می توان گفت گراف را با تعدادی نقطه در صفحه که در تناظر یک به یک با اعضای V (رأس ها) هستند، می توان نشان داد. برای ترسیم یال ها اگر $\{x,y\} \in E$ که $x,y \in V$ ، آن گاه کافی است پاره خطی بین دو نقطه مربوط به x,y رسم کرد.

تعریف ۱. ۲.۱ دو رأس x,y در G مجاورند هرگاه یالی بین x,y موجود باشد.

تعریف ۱. ۳.۱ یک مسیر در گراف G با رئوس V و یال های E بین دو رأس $x,y \in V$ دنباله‌ای از رئوس $x_i \in V$, $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ به صورت $x_۱ \longrightarrow x_۲ \longrightarrow x_۳ \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_n$ است که $x_n = y$ و $x_۱ = x$ که تمام x_i ها متمایزند و $\{x_i, x_{i+۱}\}$ یالی در E است .طول مسیر بالا برابر با $n - ۱$ است و اگر داشته باشیم $x_n = x_۱$ آنگاه مسیر فوق دوری به طول $n - ۱$ است.

تعریف ۱. ۴.۱ فرض کنید G یک گراف باشد. $d(u,v)$ را طول کوتاه ترین مسیر بین u,v می گیریم. اگر بین دو رأس u,v مسیری موجود نباشد، آن گاه می نویسیم : $d(u,v) = \infty$ و هم چنین قطر گراف G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$diam(G) = Max\{d(u,v) \quad | \quad u,v \in V(G)\}$$

تعریف ۱. ۵.۱ کمر گراف طول کوتاه ترین دور در گراف $G=(V,E)$ است و با $gr(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱. ٦.۱ گراف G را r بخشی گوییم، هرگاه رئوس G را بتوان به r بخش افراز کرد که رئوس هر بخش با هم مجاور نباشند. گراف G را r بخشی کامل می گوییم، هرگاه r بخشی بوده و هر دو رأسی که در یک بخش نیستند با هم مجاور باشند. گراف دو بخشی کامل با اندازه های m,n را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم و به گراف $K_{1,n}$ ستاره می گوییم.

تعریف ۱. ۷.۱ فرض کنید G یک گراف باشد. منظور از k رنگ آمیزی G، یک برچسب گذاری رأس های G با اعداد $1,2,\cdots,n$ است به طوری که هیچ دو رأس مجاور برچسب یکسان نداشته باشند. عدد رنگی G را با $\chi(G)$ نمایش می دهیم و برابر کمترین مقدار k تعریف می کنیم به طوری که G یک k رنگ آمیزی داشته باشد. اگر چنین k ای موجود نباشد، می‌نویسیم : $\chi(G)=\infty$.

تعریف ۱. ۸.۱ عدد خوشه ای گراف G را با $clique(G)$ نمایش می دهیم و حداکثر عدد طبیعی n تعریف می کنیم که K_n زیر گرافی از G باشد و اگر برای هر n داشته باشیم که K_n زیر گراف G است می نویسیم : $clique(G)=\infty$.

نکته ۱. ۹.۱ عدد رنگی گراف G همواره بزرگتر یا مساوی عدد خوشه‌ای گراف است(به صفحه ۲۸۹ مرجع [۱] مراجعه نمایید).

تعریف ۱. ۱۰.۱ فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد. برای هر $v\in V$ درجه رأس v را با $deg(v)$ نمایش می دهیم و برابر با تعداد رأس های مجاور با v تعریف می کنیم . ماکزیمم درجه رأس های گراف را با d نمایش می دهیم و گراف را $r-$ منظم می گوییم هرگاه درجه همه رئوس گراف G، r باشد.

تعریف ۱. ۱۱.۱ فرض کنید G یک گراف باشد. منظور از یک $k-$رنگ آمیزی یالی G یک برچسب‌گذاری یال های G با اعداد $\{۱,۲,\cdots,n\}$ است به طوری که هیچ دو یال منتهی به یک رأس رنگ یکسان نداشته باشند. عدد رنگی یالی G را با $\chi'(G)$ نمایش می دهیم و برابر با کمترین مقدار k تعریف می کنیم، به طوری که گراف G یک $k-$ رنگ آمیزی یالی داشته باشد.

قضیه ۱. ۱۲.۱ $(Vizing's \quad theorem)$ برای هر گراف غیر تهی G داریم: $d\leq\chi'(G)\leq ۱+d$. (ماکزیمم درجه رئوس گراف d است)

برهان برای مشاهده برهان، به مرجع [۱] مراجعه فرمایید. □

تعریف ۱. ۱۳.۱ گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری موجود باشد و در غیراین‌صورت آن را ناهمبند گوییم.گراف را کاملاً ناهمبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری موجود نباشد. زیر گراف H از G را مؤلفه G گوییم، اگر بزرگ ترین زیر گراف همبند باشد.

تعریف ۱. ۱۴.۱ دور همیلتونی دوری در گراف G است که از تمام رئوس گراف عبور کند.

تعریف ۱. ۱۵.۱ فرض کنید G و H دو گراف باشند. به تابع $f:V(G)\longrightarrow V(H)$ یک یکریختی گرافی گوییم، هرگاه f تابع دوسویی باشد و برای هر $u,v\in V(G)$ رأس های u,v در G مجاور باشند اگر و فقط اگر رأس های $f(u),f(v)$ در H با هم مجاور باشند. اگر یک یکریختی بین دو گراف G و H موجود باشد می گوییم G یکریخت با H است و می نویسیم $G\cong H$.

تعریف ۱. ۱۶.۱ فرض کنید S مجموعه ناتهی از رئوس گراف G باشد. زیر گراف شامل S زیر گراف ماکسیمالی با رئوس مجموعه Sاست که با$< S >$ نمایش می دهیم و دقیقاً یال هایی از G است که دو رأس در S را به هم وصل می کند.

تعریف ۱. ۱۷.۱ دو گراف G و H از هم مجزا هستند، هرگاه هیچ رأس مشترکی نداشته باشند و هیچ یالی از رئوس گراف G به رئوس گراف H وصل نباشد.

تعریف ۱. ۱۸.۱ فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند. گراف الحاقی[۱] $G_۱$ و $G_۲$ را با $G_۱ \vee G_۲$ نمایش می دهیم و تعریف می کنیم گرافی که رئوس آن رئوس $G_۱$ و $G_۲$ بوده و یال های آن یال های $G_۱$ و یال های $G_۲$ به همراه یال هایی به شکل $e = v_۱v_۲$ که $v_۱ \in V(G_۱)$ و $v_۲ \in V(G_۲)$، یعنی داریم:

$$V(G_۱ \vee G_۲) = V(G_۱) \cup V(G_۲)$$

$$E(G_۱ \vee G_۲) = E(G_۱) \cup E(G_۲) \cup \{e| \quad e = v_۱v_۲ \quad ; v_۲ \in V(G_۲) \quad ; v_۱ \in V(G_۱)\}.$$

[۱] join

۱. ۲ مفاهیم مربوط به نظریه حلقه های جابجایی

در این بخش تعاریف و قضایای مورد نیاز از نظریه حلقه های جابجایی ارائه می شود.

نکته ۱. ۱.۲ در این پایان نامه همواره R حلقه ای جابجایی و یکدار است به طوری که $1_R \neq 0$.

تعریف ۱. ۲.۲ فرض کنید R یک حلقه و $a \in R$ باشد. گوییم a مقسوم علیه صفر است، اگر عضو ناصفر $x \in R$ موجود باشد به طوری که $ax = 0$. مجموعه مقسوم علیه های صفر حلقه R را با نماد $Z(R)$ نمایش می دهیم و توجه داریم که در هر حلقه عضو $0 \in R$ مقسوم علیه صفر است.

تعریف ۱. ۳.۲ حلقه R را حوزه صحیح می گوییم هرگاه صفر تنها مقسوم علیه صفر حلقه R باشد.

تعریف ۱. ۴.۲ فرض کنید R یک حلقه و $a \in R$ باشد. می گوییم a عضو پوچ توان است، اگر عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $a^n = 0$.

واضح است که هر عضو پوچ توان در حلقه R مقسوم علیه صفر است و هم چنین $0 \in R$ عضوی پوچ توان است.

تعریف ۱. ۵.۲ حلقه R را کاهشی[۲] می گوییم هر گاه صفر تنها عضو پوچ توان آن باشد.

تعریف ۱. ۶.۲ فرض کنید R یک حلقه و $a \in R$ باشد، می گوییم a یک عضو خود توان است هرگاه $a^2 = a$. عضو خود توان a را نابدیهی می گوییم هرگاه $a \neq 0$ و $a \neq 1$.

---

[۲] reduce

واضح است که در حلقه R، 0 تنها عضو پوچ توان است که خودتوان نیز هست و اگر $e \neq 1$ خود توان باشد چون $e(e-1)=0$، پس e یک مقسوم علیه صفر است.

تعریف ۱. ۷.۲ فرض کنید R یک حلقه و X یک عضو یا یک زیر مجموعه از R باشد. پوچساز X را با نماد $Ann(X)$ نشان می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$Ann(X)=\{a\in R \quad | \quad aX=0\}.$$

قضیه ۱. ۸.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت برای هر $a\in R$ داریم: $Ra \cong \frac{R}{Anna}$.

تعریف ۱. ۹.۲ فرض کنید X یک مجموعه باشد. می گوییم X در شرط Acc (Dcc) صدق می کند هر گاه هر زنجیر صعودی (نزولی) مانند $x_1 < x_2 < \cdots (x_1 > x_2 > \cdots)$ از عناصر X پس از متناهی مرتبه متوقف شود. حلقه R را نوتری (آرتینی) می گوییم هرگاه مجموعهٔ ایده ال های R در شرط Acc (Dcc) صدق کند.

نکته ۱. ۱۰.۲ اگر حلقه R نوتری (آرتینی) باشد و $\varphi : R \longrightarrow R$ همریختی حلقه ای پوشا (یک‌به‌یک) باشد، آن گاه φ یک همریختی یک به یک (پوشا) است.

لم ۱. ۱۱.۲ فرض کنید R حلقه ای آرتینی باشد، در این صورت هر عضو R یک مقسوم علیه صفر است یا یک عضو وارون پذیر است.

برهان فرض کنید a یک مقسوم علیه صفرنباشد، لذا تابع $\varphi : x \longrightarrow ax$ یک همریختی حلقه ای یک به یک است. حال چون R آرتینی است، پس این تابع پوشا است، درنتیجه $a' \in R$ وجود دارد که $aa'=1$. لذا a عضو وارون پذیر است. $\square$

لم ۱. ۱۲.۲ فرض کنید R حلقه ای متناهی باشد. در این صورت هر عضو R یک مقسوم علیه صفر است یا یک عضو وارون پذیر است.

برهان چون هر حلقه متناهی آرتینی است، پس طبق لم (۱—۲—۱۱) حکم اثبات می شود. □

تعریف ۱. ۱۳.۲ حلقه R را موضعی گوییم هرگاه دقیقاً یک ایده ال ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۱. ۱۴.۲ مجموعه همه ایده ال های اول R را با $SpecR$ و مجموعه همه ایده ال های ماکسیمال R را با $MaxR$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱. ۱۵.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد. رادیکال جیکوبسن R را با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $J(R) = \bigcap_{m \in Max(R)} m$ تعریف می کنیم.

قضیه ۱. ۱۶.۲ فرض کنید R حلقه آرتینی باشد. دراین صورت R را می توان به طور یکتا به صورت حاصل ضرب متناهی از حلقه های موضعی نوشت.

برهان برای اثبات می توانید به مرجع [۲۲] مراجعه نمایید. □

نکته ۱. ۱۷.۲ اگر حلقه R متناهی باشد، آن گاه R را می توان به طور یکتا به صورت حاصل ضرب متناهی از حلقه های موضعی نوشت.

قضیه ۱. ۱۸.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد در این صورت اگر $p_۱, p_۲, \cdots, p_n$ ایده ال های اول R باشند و ایده ال I چنان باشد که $I \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} p_i$، آن گاه $۱ \leq i \leq n$ موجود است به طوری که $I \subseteq p_i$.

تعریف ۱. ۱۹.۲ رادیکال پوچ حلقه R را با $nil(R)$ نمایش می دهیم و تعریف می کنیم:
$nil(R) = \{r \in R \quad |r^n = 0 \quad n$ به ازای عدد طبیعی مانند $\}$ که $nil(R)$ مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان حلقه است و به راحتی می توان ثابت کرد که $nil(R) = \bigcap_{p \in spec(R)} p$.

تعریف ۱. ۲۰.۲ حلقه R را منظم فون ریمان می گوییم اگر برای هر $a \in R$ عضو $x \in R$ موجود باشد که $axa = a$.

تعریف ۱. ۲۱.۲ زیر مجموعه S از حلقه R را بسته ضربی [۳] می گوییم اگر نسبت به عمل ضرب حلقه بسته باشد و شامل عضو همانی عمل ضرب باشد.

تعریف ۱. ۲۲.۲ فرض کنید R یک حلقه و S یک مجموعه بسته ضربی در R باشد. $S^{-1}R$ حلقه‌ای است که عناصر آن به صورت $\frac{r}{s}$ است که r و s به ترتیب از R و S انتخاب می شوند و جمع و ضرب آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\frac{r}{s}) + (\frac{r'}{s'}) = \frac{rs' + r's}{ss'},$$

$$(\frac{r}{s}) \cdot (\frac{r'}{s'}) = \frac{rr'}{ss'},$$

$$(\frac{r}{s}) = (\frac{r'}{s'}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad x \in S \quad (rs' - r's)x = 0$$

حال اگر $S = R \setminus Z(R)$، آن گاه $S^{-1}R$ را با نماد $T(R)$ نمایش می دهیم و آن را حلقه کامل کسر های R [۴] می نامیم.

---

[۳] Multiplitive

[۴] total quotient Ring