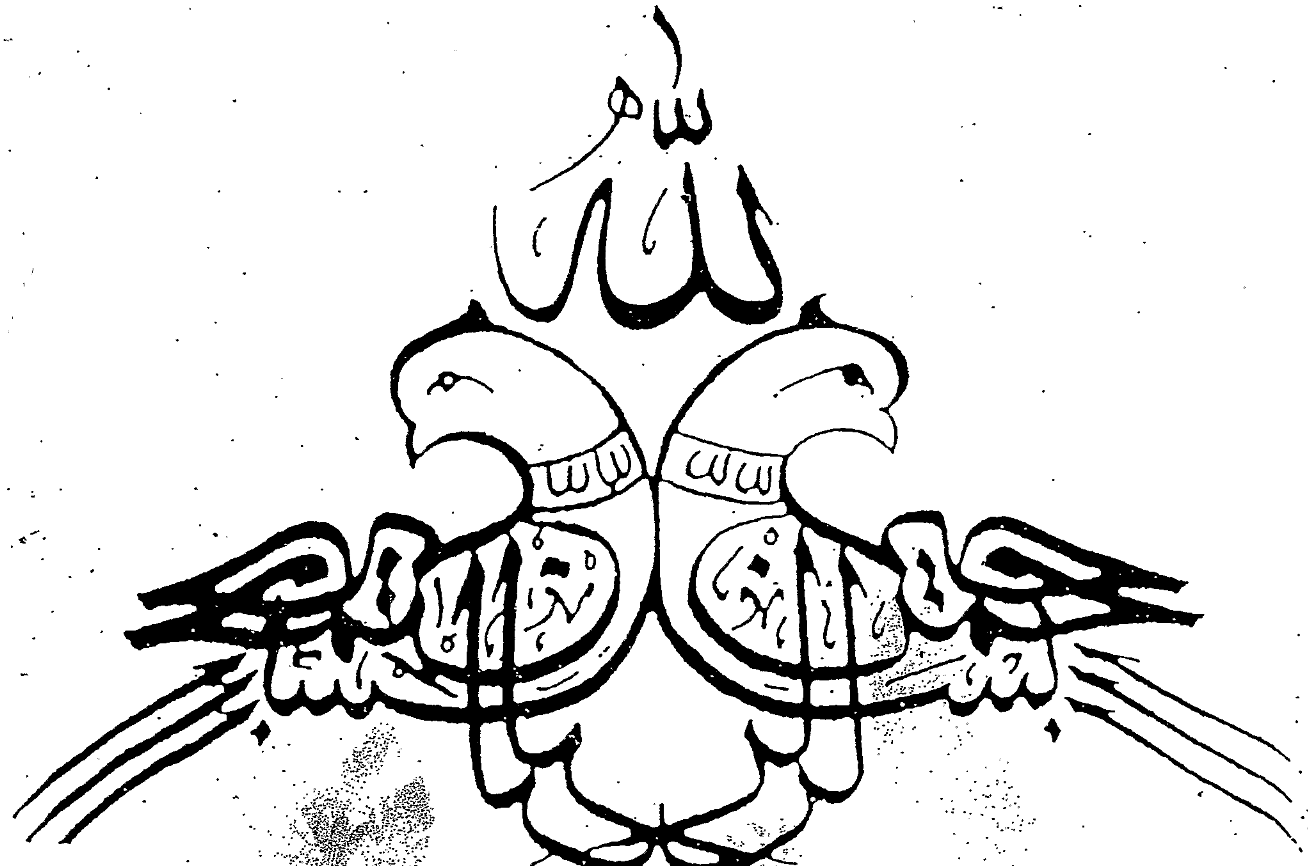

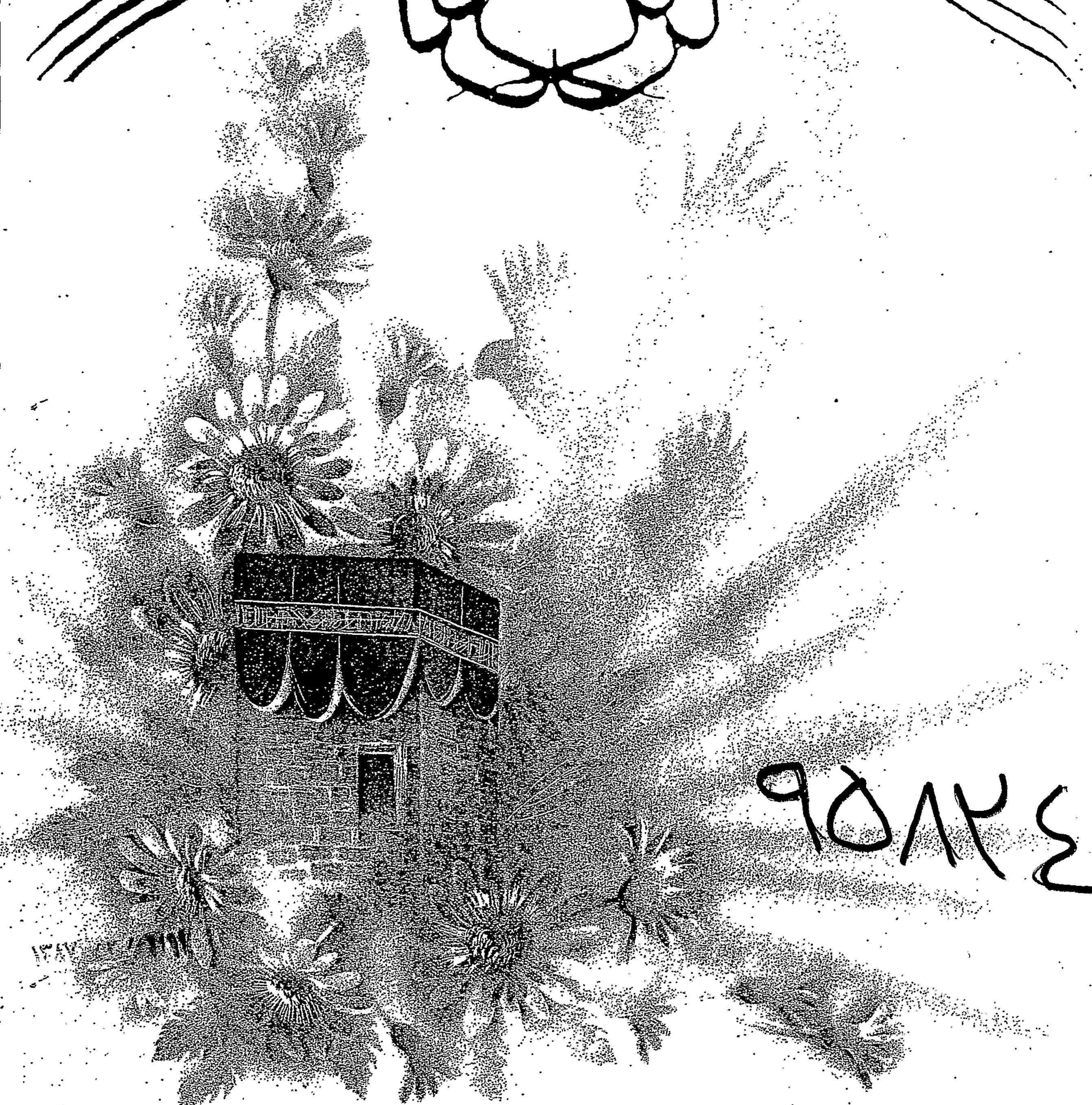

٩٥٨٢٤

دانشگاه جامع پیام نور
دانشکده علوم

گروه ریاضی

برخی از ویژگیهای عملگرهای ترکیبی روی فضای دیریکله

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

مؤلف:
نرجس مؤمنیان کوپائی

استاد راهنما:
دکترصدیقه جاهدی

استادمشاور:
دکترغلامعلی میرزا کریمی اصفهانی

شهریور- ۱۳۸٦

بسمه تعالي

تصویب نامه

پایان نامه تحت عنوان: برخی ازویژگیهای عملگرهای ترکیبی روی فضای دیریکله که توسط نرجس مؤمنیان کوپائی تهیه وبه هیات داوران ارائه گردیده است مورد تائیـد می باشد.

تاریخ دفاع: ۲۱ شهریور ۱۳۸۶ نمره: ۱۸/۵ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیات داوران:

نام ونام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱-دکترصدیقه جاهدی	استاد راهنما	استادیار	
۲-دکترغلامعلی میرزا کریمی اصفهانی	استاد مشاور	استادیار	
۳-دکتربهمن یوسفی	استاد داور	استاد	
۴-دکترپرویز الهی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

۹۵۸۳۴

تقدیم به

اسطوره تلاش وتجلیگاه حمایت خداوند: پدرم

دریای مهر ومظهر لطف ومهربانی: مادرم

الهگان محبت:خواهرانم

اسوگان همراهی: برادرانم

به آنان که هستیشان را چراغ هدایت راهم

ومروارید پر تلالو چشمانشان را بدرقه راهم قرار دادند

بسمه تعالی

حمد وسپاس خدائی را که به من فرصت داد تا در پهنای فکر وقلم قطره ای از دریای بی انتهای علم ودانش را بنوشم.شایسته است که مراتب سپاس وتقدیر فراوان خود را به اساتید عزیز وگرانقدرم سرکار خانم دکتر صدیقه جاهدی و جناب دکتر غلامعلی میرزا کریمی اصفهانی وجناب دکتر بهمن یوسفی اعلام نمایم و از خداوند منان بهروزی وموفقیت روز افزونشان را خواستار باشم.

فهرست مطالب

نام خانوادگی دانشجو: مؤمنیان کوپائی **نام: نرجس**

عنوان پایان نامه: برخی ازویژگیهای عملگرهای ترکیبی روی فضای دیریکله

استاد راهنما : دکتر صدیقه جاهدی

استادمشاور: دکتر غلامعلی میرزا کریمی اصفهانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:**ریاضی **گرایش:** آنالیز **دانشگاه:**پیام نور

دانشکده: علوم **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۲۱شهریور۱۳۸۶ **تعداد صفحه:**

کلید واژه ها:عملگرهای ترکیبی- نگاشت خطی کسری- فضای دیریکله

چکیده:

تابع تحلیلی φ که دیسک بازیکه D را به روی خودش می برد، به صورت زیر عملگر ترکیبی C_φ را روی $Hol(D)$ تعریف می کند:

$$C_\varphi f = fo\varphi \qquad f \in Hol(D).$$

اخیراً زوربوسکا[1] نشان داده، که در میان اتومور فیسمهای همدیس دیسک یکه، دورانها تنها ایجاد کننده های عملگرهای ترکیبی اساساً نرمال روی H^2 هستند و به علاوه عملگرهای ترکیبی که بوسیله نگاشتهای خطی کسری فاقد نقطه ثابت کرانه ای روی H^2 ایجاد شده اند، از اینکه اساساً نرمال باشند حذف می شوند. آنچه در فصل دوم این مقاله می آید، گذری است بر مقاله [۷]، که پاسخ این سوال زوربوسکا است: کدامیک از عملگرهای ترکیبی ایجاد شده بوسیله خود نگاشتهای خطی کسری غیراتومورفیسم D روی H^2 اساساً نرمال هستند.

قضیه اصلی این فصل چنین است:

عملگر ترکیبی ایجاد شده بوسیله خود نگاشت خطی کسری دیسک یکه روی H^2، اساساً نرمال غیر بدیهی است اگر و تنها اگر بوسیله سهموی غیراتومورفیسم ایجاد شده باشد.

1-Zorboska

ادامه چکیده

در فصل سوم ما این سئوال را مطالعه می کنیم: کدامیک از عملگرهای ترکیبی روی فضای $\mathcal{D}$ که بوسیله خودنگاشتهای خطی کسری دیسک یکه ایجاد شده اند، اساساً نرمال غیربدیهی هستند. همچنین در ادامه مطالب این فصل، شرایطی را برای خودنگاشتهای خطی کسری φ و ψ از دیسک یکه بدست می آوریم به گونه ایکه $C_\varphi C_\psi^*$ و $C_\psi^* C_\varphi$ فشرده باشند.

قضیه اصلی این فصل چنین است:

عملگر ترکیبی C_φ که بوسیله خودنگاشت خطی کسری دیسک یکه φ روی $\mathcal{D}$ ایجاد شده، اساساً نرمال است اگر و فقط اگر φ هذلولوی غیراتومورفیسم با نقطه ثابت روی ∂D، نباشد.

فصل اول

مقدمات

بخش اول
فضای کلاسیک توابع تحلیلی

۱-۱-۱. فرض کنید D دیسک بازیکه از فضای اعداد مختلط باشد.

فضای کلیه توابع تحلیلی روی D را با نماد $Hol(D)$ مشخص کرده و از نماد H^∞ برای فضای کلیه توابع تحلیلی کراندار روی D استفاده می کنیم و نرم طبیعی آنرا بوسیله $\|.\|_\infty$ نمایش می دهیم. یعنی، به ازای هر $f \in H^\infty$ داریم:

$$\|f\|_\infty := \underset{|z|<1}{SUP} |f(z)| \quad .$$

۱-۱-۲. برای $f \in Hol(D)$، ضریب nام f در سری مک لورن را بوسیله $\hat{f}(n)$ نمایش می دهیم.

تعریف: فضای هاردی[۱] H^2، فضای کلیه توابع تحلیلی f است به گونه ایکه

$$\|f\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 < \infty \quad .$$

فرمول بالا یک نرم را تعریف می کند، که نشان می دهد فضای H^2 یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر است:

$$<f, g> = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \qquad (f, g \in H^2) \quad .$$

بر طبق قضیه ریس - فیشر[۲]، اگر $f \in H^2$ باشد، آنگاه تابعی مانند f^* در $L^2 = L^2(\partial D, m)$ موجود است به طوریکه

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} \quad ,$$

که در آن $\hat{f}(n)$ ضریب فوریه nام آن و m اندازه لبگ نرمال روی ∂D می باشد.

بنابر قضیه پارسوال به سادگی می توان دید که:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f^*(t)\right|^2 dt = \|f^*\|^2 \quad .$$

یعنی نگاشت $f \to f^*$ به طور ایزومتری H^2 را به توی زیر فضای بستهٔ L^2، شامل توابع f ای که دارای

1-Hardy space
2-Riesz-fisher

تبدیل فوریه $\hat{f}(n)$ روی اعداد صحیح نامنفی هستند، می برد. f^* در حقیقت حد غیر مماسی[1] تابع f است، یعنی:

$$\angle\lim_{z\to\eta} f(z) = f^*(\eta) \qquad (\eta \in \partial D)$$

برای سادگی از نماد $f(\eta)$ به جای $f^*(\eta)$ برای هر $\eta \in \partial D$، که در آن حدغیرمماسی موجود است، استفاده می کنیم. با این همانند سازی، برای هر $f,g \in H^2$، نرم و ضرب داخلی در H^2 روی مرز دیسک یکه را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\|f\|^2 = \int_{\partial D} |f|^2 dm \quad , \quad <f,g> = \int_{\partial D} f\bar{g}\, dm \quad .$$

۱-۱-۳. تعریف: برای $\alpha > -1$، فضای برگمن وزندار[2] چنین تعریف می شود:

$$A_\alpha^2(D) := \left\{ f \in Hol(D) : \|f\|^2 = \int_D |f(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} < \infty \right\} \quad .$$

۱-۱-٤. تعریف: فرض کنیم $dA(z)$ اندازه مساحت نرمال شده از دیسک یکه باشد.

فضای دیریکله[3]، که آنرا با نماد $\mathcal{D}$ نمایش می دهیم، فضای کلیه توابع تحلیلی روی D است، که دارای نرم متناهی بدست آمده بوسیلهٔ

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \int_D |(f'(z)|^2 dA(z)$$

باشند. به عبارت دیگر:

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in Hol(D) : \|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \int_D |(f'(z)|^2 dA(z) < \infty \right\}$$

جملهٔ $|f(0)|^2$ از اینکه توابع ثابت دارای نرم صفر باشند، جلوگیری می کند.

۱-۱-۵. قضیهٔ نمایش ریس[4]. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد.

اگر $L : H \to F$ تابعی خطی کراندار باشد، آنگاه بردار یکتای h_0 ای موجود است به طوریکه

$$L(h) = <h, h_0> \qquad \forall h \in H \quad .$$

- اثبات. به صفحه ۱۳ از [۲] رجوع کنید.

■

1-nontangential limit function
2-the weighted Bergman space
3-Dirichlet space
4-The Riesz Representation Theorem

تعریف: فضای هیلبرت تابعی[1] $H \neq (0)$، یک فضای هیلبرت از توابع مختلط مقدار تعریف شده روی یک مجموعه مانند χ است، به گونه ایکه برای هر $x \in \chi$، تابعک برآورد نقطه ای $f \to f(x)$ کراندار باشد.

بنابر قضیهٔ نمایش ریس، برای هر $x \in \chi$، تابعی چون $K_x \in H$ چنان موجود است که برای هر $f \in H$، داریم:

$$< f, K_x >= f(x) \quad .$$

تابع K_x هستهٔ مولد[2] در نقطه x در فضای H نامیده می شود.

۱-۱-۶. هستهٔ مولد در فضای H^2: اگر به ازای هر نقطه $p \in D$، تابع $K_p(z)$ را چنین تعریف کنیم:

$$K_p(z) := \frac{1}{1-\overline{p}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}^n z^n$$

، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} < f, K_P >&= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \ . \ \sum_{n=0}^{\infty} \overline{(\overline{p}z)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \ . \ p^n \\ &= f(P) \quad . \end{aligned}$$

پس تابع $K_p(z)$ هستهٔ مولد در نقطهٔ p در فضای H^2 است. هم چنین

$$\|K_P\|^2 =< K_p, K_p >= K_p(p) = \frac{1}{1-|p|^2}$$

۱-۱-۷. هستهٔ مولد در فضای $\mathcal{D}$: اگر به ازای هر $w \in D$ تابع $K_w(z)$ را چنین تعریف کنیم:

$$K_w(z) := ۱ + Log \frac{۱}{۱-\overline{w}z}$$

، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} < f, K_w >&= |f(0)K_w(0)| + \int_D f'(z) K'_w(z) dA(z) \\ &= \int_D \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right) . \left(\sum_{n=1}^{\infty} w^n . \overline{z}^{n-1} \right) dA(z) \\ &= \int_D \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^n |z|^{2n-2} \right) dA(z) \end{aligned}$$

1-functional Hilbert space
2-reproducing kernel

اگر قرار دهیم $dA(z)=\frac{rdrd\theta}{\pi}$، خواهیم داشت:

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}na_n w^n.r^{2n-2}\Big)rdrd\theta$$
$$=2\int_{0}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}na_n w^n r^{2n-1}dr$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n w^n$$
$$=f(w).$$

لذا تابع $K_w(z)$ هستهٔ مولد در نقطهٔ w در فضای $\mathcal{D}$ است.

۱-۱-۸. تعریف: تابع تحلیلی φ که دیسک بازیکهٔ D را به روی خودش می برد به صورت زیر عملگر ترکیبی C_φ [1] را روی $Hol(D)$ تعریف می کند:

$$C_\varphi f = fo\varphi \qquad (f\in Hol(D)).$$

۱-۱-۹. لم. فرض کنید C_φ یک عملگر ترکیبی بر فضای هاردی H^2 باشد، آنگاه برای هر $p\in D$ داریم:

$$C_\varphi^* K_P = K_{\varphi(P)}$$

- **اثبات.** f را عضو دلخواهی از H^2 در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned}<f,C^*{}_\varphi K_p> &=<C_\varphi f,K_p>\\ &=<f\,o\varphi,K_p>\\ &=f\,o\varphi(\mathrm{p})\\ &=<f,K_{\varphi(p)}>\end{aligned}$$

■

لم (۱-۱-۹) برای فضای دیریکله نیز بر قرار است.

۱-۱-۱۰. قضیهٔ همگرایی ضعیف[2]. اگر φ یک خود نگاشت تحلیلی روی D باشد، آنگاه حالات زیر هم ارزند:

(a) C_φ عملگر فشرده ای روی H^2 است.

(b) اگر $\{f_n\}$ دنباله ای کراندار روی H^2 باشد و روی زیر مجموعه های فشرده D به صفر همگرای یکنواخت باشد، آنگاه $\|C_\varphi f_n\|\to 0$.

1-composition operator induced by φ
2-weak convergence theorem

– اثبات. برای اثبات به صفحات ۲۹ و ۳۰[۶] رجوع نمائید.

■

۱-۱-۱۱. تعریف: فرض می کنیم V یک فضای برداری باشد.

تبدیل $T:V \to V$ را یک تبدیل آفین[1] (مستوی) می نامیم، هرگاه بردار ثابت $b \in V$ و تبدیل خطی $T':V \to V$ موجود باشند به طوریکه برای هر $v \in V$ داشته باشیم:

$$T(v) = T'(v) + b\ .$$

بخش دوم
تبدیلات خطی کسری

در این قسمت مقدمه ای بر تبدیلات خطی کسری آورده می شود که در قسمتهای بعدی از آنها استفاده خواهیم نمود. برای مطالعه کاملتر خواننده می تواند به مراجع[۱] و[۳] و[۶] رجوع کند.

۱-۲-۱. تعریف: فرض کنیم a,b,c,d اعداد مختلطی باشند که $ad-bc \neq 0$، در این صورت نگاشت $f(z)=az+b/cz+d$ یک تبدیل خطی کسری[2] نامیده می شود.

با توجه به مقدار c می توان f را همه جا بر $\hat{\mathbf{C}}$، یعنی صفحهٔ وسعت یافته $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ تعریف کرد.

به این ترتیب:

۱- اگر $c \neq 0$، تعریف می کنیم $f(\infty)=\frac{a}{c}$ و $f(\frac{-d}{c})=\infty$

۲- اگر $c=0$، تعریف می کنیم $f(\infty)=\infty$.

معکوس تابع f با رابطه زیر تعریف می شود:

$$f^{-1}(z)=\frac{-dz+b}{cz-a} \quad , \quad f^{-1}(\frac{a}{c})=\infty \quad , \quad f^{-1}(\infty)=\frac{-d}{c}\ .$$

مشتق یک تبدیل خطی کسری به صورت زیر است:

$$f'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\ .$$

چون در هر نقطه $z \neq \frac{-d}{c}$، $f'(z) \neq 0$ است، لذا این تبدیلات در هر نقطهٔ متناهی مخالف $\frac{-d}{c}$ خاصیت همدیسی دارند.

1-Affin transformation
2-Linear - fractional transformation

ما نماد $LFT(D)$ را برای نگاشتهای خطی کسری که دیسک بازیکه را به توی خودش می برند استفاده می کنیم.

اتومورفیسمهای D[1]، آن نگاشتهای از $LFT(D)$ هستند که دیسک بازیکه را به روی خودش می برند و با نماد $Aut(D)$ مشخص می شوند.

دونگاشت خطی کسری φ و ψ مزدوجند[2] هر گاه نگاشت خطی کسری دیگری چون T موجود باشد به طوریکه: $\varphi = T^{-1} o \psi\, oT$.

فرض کنیم f یک تبدیل خطی کسری روی $\hat{\mathbf{C}}$ باشد. در این صورت:

۱- اگر $f(z) = z + a$ باشد، آنگاه f یک انتقال[3] نامیده می شود.

۲- اگر $f(z) = \alpha\, z$ برای برخی αهای مختلط، آنگاه f یک انبساط[4] نامیده می شود.

۳- اگر $f(z) = \mu\, z$ با $|\mu| = 1$، آنگاه f یک دوران[5] نامیده می شود.

نگاشت خطی کسری غیرهمانی در صفحهٔ وسعت یافته مختلط، یک یا ۲ نقطه ثابت دارد، زیرا:

اگر $az + b / cz + d = z$ باشد، آنگاه $cz^2 + (d - a)z - b = 0$.

پس اگر $c \neq 0$ و $\Delta \neq 0$، آنگاه f درست ۲ نقطه ثابت دارد و اگر $c \neq 0$ و $\Delta = 0$، آنگاه f درست ۱ نقطه ثابت دارد.

۱-۲-۲. تعریف: فرض کنیم f یک تبدیل خطی کسری روی $\hat{\mathbf{C}}$ باشد.

در این صورت:

۱- اگر f دارای یک نقطه ثابت در $\hat{\mathbf{C}}$ باشد سهموی[6] نامیده می شود. فرض کنیم α نقطه ثابت f باشد. اگر $S \in LFT(\hat{\mathbf{C}})$ به گونه ای باشد که α را به ∞ ببرد، آنگاه نگاشت $V = SofoS^{-1}$ متعلق به $LFT(\hat{\mathbf{C}})$ است و ∞ تنها نقطه ثابت آن است. بنابراین برای یک عدد مختلط t، $V(z) = z + t$ و در نتیجه f نگاشت خطی کسری مزدوج با یک انتقال است.

۲- اگر f دارای ۲ نقطه ثابت $\alpha, \beta \in \hat{\mathbf{C}}$ باشد، نگاشت خطی کسری S که α را به صفر و β را به ∞ می برد، در نظر می گیریم. آنگاه نگاشت $V = SofoS^{-1}$ متعلق به $LFT(\hat{\mathbf{C}})$ است و دارای نقاط ثابت صفر و بی نهایت می باشد. بنابراین به ازای یک عدد مختلط λ، تابع V به صورت $V(z) = \lambda\, z$ است.

در این حالت:

1-Automorphisms of D
2-conjugate
3-translation
4-dilation
5-Rotation
6-Parabolic

۱- اگر $|\lambda|=1$، آنگاه نگاشت خطی کسری f، بیضوی[1] نامیده می شود.

۲- اگر $\lambda > 0$، آنگاه نگاشت خطی کسری f، هذلولوی[2] نامیده می شود.

۳- اگر λ یک عدد مختلط باشد، آنگاه نگاشت خطی کسری f، ثابت زاویه[3] نامیده می شود.

۱-۲-۳. هنگامی که شرط $\varphi(D)\subseteq D$ را اضافه کنیم، برخی محدودیتها روی مکان نقاط ثابت φ ایجاد می شود:

قضیه. فرض کنیم φ نگاشت خطی کسری با شرط $\varphi(D)\subseteq D$ باشد، در این صورت:

۱- اگر φ سهموی باشد، آنگاه نقطه ثابت φ روی ∂D است.

۲- اگر φ هذلولوی باشد، نقطه ثابت جاذب در $\overline{D}$ و نقطه ثابت دیگر در D می باشد. هر ۲ نقطه ثابت φ روی ∂D هستند اگر و تنها اگر φ روی D، اتومورفیسم باشد.

۳- اگر φ بیضوی یا ثابت زاویه باشد، آنگاه φ دارای یک نقطه ثابت در D و نقطه ثابت دیگری در خارج $\overline{D}$ می باشد. بیضوی ها همیشه روی D اتومورفیسم هستند.

- اثبات. به صفحه ۵ از [۶] رجوع شود.

■

فرض کنیم $\varphi(D)\subseteq D$ و φ یک نگاشت خطی کسری با نقطه ثابت $w\in\partial D$ باشد. در این صورت، با توجه به قضیهٔ بالا یکی از ۲ حالت زیر اتفاق می افتد:

(i) φ سهموی است و w تنها نقطه ثابت φ در کرهٔ ریمان است. نگاشت خطی کسری $\tau(z)=\dfrac{1+\overline{w}z}{1-\overline{w}z}$ دیسک یکه را به روی نیم صفحه راست Π می برد و w را به ∞ می فرستد. بنابراین، $\phi:=\tau o\varphi o\tau^{-1}$ یک خود نگاشت خطی کسری روی Π است که تنها در ∞ ثابت است. لذا به ازای مقادیر t با شرط $\mathrm{Re}\,t\geq 0$ و به ازای هر $z\in\mathbf{C}$ داریم:

$$\varphi(z)=\tau^{-1}o\phi\, o\tau(z)=\tau^{-1}(\tau(z)+t)\ .$$

t عدد انتقال φ یا ϕ نامیده می شود.

اگر t موهومی محض باشد، آنگاه ϕ اتومورفیسم روی Π است و لذا، φ نیز اتومورفیسم روی D می باشد.

اگر $\mathrm{Re}\,t>0$ ، آنگاه $\varphi\notin Aut(D)$.

1-Ellptic
2-Hyperbolic
3-Loxodromic

به علاوه اگر ۲ عضو سهموی $LFT(D)$ نقطه ثابت مشابهی داشته باشند، آنگاه هر دو تحت ترکیب جابجا می شوند.

برای خود نگاشت خطی کسری سهموی φ از D به توی D با نقطهٔ ثابت او عدد انتقال t، می توان این نمایش را در نظر گرفت:

$$\varphi(z) = \frac{(2-t)z+t}{-tz+(2+t)}.$$

(ii) دومین حالت، زمانی اتفاق می افتد که φ یک نقطه ثابت اضافی در $\hat{\mathbf{C}}$ داشته باشد، یعنی φ هذلولوی باشد. فرض کنیم τ یک خود نگاشت خطی کسری باشد که این نقطهٔ ثابت اضافی را به صفر ببرد و نقطه ثابت مرزی را به ∞، بنابراین $\phi := \tau o \varphi o \tau^{-1}$ یک انبساط است. اگر نقطه ثابت اضافی روی ∂D باشد، آنگاه φ اتومورفیسم است.

برای مطالعه بیشتر در رابطه با نقاط ثابت خواننده می تواند به مراجع [۳]و[۶] رجوع نماید.

۱-۲-٤. تعریف:فرض کنیم $A \in \beta(H)$ باشد، در این صورت اسکالر α یک مقدار ویژه A نامیده می شود، هرگاه $Ker(A-\alpha) \neq (0)$ باشد.

بردار غیر صفر hدر $Ker(A-\alpha)$، بردار ویژه α نامیده می شود. کلیهٔ مقادیر ویژه A را بانماد $\sigma_P(A)$ نمایش می دهیم.

۱-۲-۵. قضیهٔ .F.Riesz. اگر $\dim H = \infty$ و $A \in \beta_0(H)$، آنگاه تنهایکی از موارد ذیل برقرار است:

(a) $\sigma(A) = \{0\}$.

(b) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, ..., \lambda_n\}$، جائیکه برای $1 \leq K \leq n$، $\lambda_K \neq 0$ و هر λ_K مقدار ویژه ای از Aباشد و

$$\dim Ker(A-\lambda_K) < \infty.$$

(c) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, ...\}$ ، جائیکه برای هر $K \geq 1$، λ_K مقدار ویژه ای برای A باشد و $\dim Ker(A-\lambda_K) < \infty$و به علاوه

$$Lim\ \lambda_K = 0$$

- اثبات. به صفحه ۲۱۹ [۲] رجوع نمائید.

■

فرض کنیم $\varphi \in LFT(D)$یک سهموی با نقطه ثابت ۱ باشد، به گونه ایکه φ به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\varphi(z) = \tau^{-1} o \phi o \tau(z) = \tau^{-1}(\tau(z)+t) \qquad (z \in \mathbf{C})$$

یعنی، توسط نگاشت $\tau(z)=(1+z)/(1-z)$ با نگاشت انتقال $\phi(w)=w+t$ از نیم صفحه راست Π که در آن t عددی مختلط با قسمت حقیقی نامنفی است، مزدوج است.

بازای هر $w\in\Pi$ و $\lambda>0$ قرار دهید:

$$F_\lambda(w):=e^{-\lambda w}$$

بنابراین، F_λ یک تابع تحلیلی کراندار روی Π است و

$$C_\phi(F_\lambda)=F_\lambda o\phi=e^{-\lambda t}F_\lambda.$$

به عبارت دیگر: F_λ یک بردار ویژه برای عملگر C_ϕ روی $Hol(\Pi)$ است و مقدار ویژه متناظر آن مقدار $e^{-\lambda t}$ است.

تابع $f_\lambda:=F_\lambda o\tau$ روی دیسک یکه D تحلیلی و کراندار است و در حقیقت یک تابع داخلی منفرد است. لذا به H^2 تعلق دارد. از آنجایی که φ و ϕ توسط نگاشت τ مزدوج اند، داریم:

$$C_\varphi(f_\lambda)=f_\lambda o\varphi=e^{-\lambda t}f_\lambda\ .$$

در نتیجه f_λ بردار ویژه ای برای عملگر C_φ روی H^2 است و مقدار ویژه متناظر آن باز هم $e^{-\lambda t}$ است.

بنابراین طیف C_φ شامل منحنی $\Gamma_t:=\{e^{-\lambda t}:\lambda\geq 0\}$ است.

بخش سوم

عملگرهای هیلبرت - اشمیت و توپلیتز

۱-۳-۱. تعریف: عملگر T روی فضای هیلبرت H، عملگر هیلبرت - اشمیت[1] نامیده می شود، هرگاه پایه متعامدی از H مانند $\{e_n\}$ موجود باشد به قسمی که سری $\sum_{n=0}^{\infty}\|Te_n\|^2$ همگرا شود.

برای دیدن اثبات لم ها و قضایای بعدی می توانید به صفحات ۲۸۷ و ۲۸۹ و ۲۹۷[۱۲] و صفحه ۲۶[۶] رجوع کنید.

۱-۳-۲. لم. C_φ روی H^2 هیلبرت - اشمیت است اگر و تنها اگر

$$\int_{\partial D}\frac{1}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2}d\theta<\infty\ .$$

۱-۳-۳. لم. C_φ روی $\mathcal{D}$ هیلبرت - اشمیت است اگر و تنها اگر

$$\int_D\frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2}dA(z)<\infty\ .$$

1-Hilbert - Schmidt

۱-۳-٤. قضیه هیلبرت - اشمیت برای عملگرهای ترکیبی[1]

اگر C_φ روی H^2 هیلبرت - اشمیت باشد، آنگاه C_φ فشرده است.

۱-۳-۵. قضیه .فرض کنیم φ خود نگاشت تحلیلی دیسک یکه باشد، اگر C_φ عملگری هیلبرت - اشمیت روی فضای دیریکله باشد، آنگاه C_φ روی فضای هاردی هیلبرت - اشمیت خواهد بود.

۱-۳-٦: تعاریف:

۱- عملگر T روی فضای هیلبرت نرمال نامیده می شود، اگر $\mathrm{T^*T} = \mathrm{TT^*}$

۲- عملگر T روی فضای هیلبرت اساساً نرمال[2] نامیده می شود، اگر $\mathrm{T^*T} - \mathrm{TT^*}$ فشرده باشد.

۳- چون عملگرهای نرمال و فشرده، به وضوح اساساً نرمال هستند. یک عملگر را اساساً نرمال غیربدیهی می نامیم، هرگاه اساساً نرمال بوده اما فشرده و یا نرمال نباشد.

۴- برای عملگرهای کراندار A و B روی فضاهای هیلبرت، جابجاگر A و B [3] را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$[A,B] := AB - BA \ .$$

بنابراین عملگر A، اساساً نرمال است اگر و فقط اگر $[A^*,A]$ فشرده باشد.

۱-۳-۷. تعریف عملگر ضرب:فرض کنیم (χ,Ω,μ) یک فضای اندازه پذیر $\delta-$ متناهی باشدو $L^2(X,\Omega,\mu) = L^2(\mu)$. همچنین $b \in L^\infty(\mu)$ باشد. عملگر ضربی M_b به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_b : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$$
$$M_b f = bf$$

ثابت می شود که:

$$\|M_b\| = \|b\|_\infty \qquad , \qquad M_b \in \beta(L^2(\mu))$$

خواننده می تواند جهت مطالعه بیشتر به صفحه ۲۸ [۲] رجوع کند.

۱-۳-۸. تعریف عملگر توپلیتز[4]: فرض کنید $b \in L^\infty(\partial D) = L^\infty$ باشد. عملگر T_b روی H^2 که با ضابطه $\mathrm{T}_b = PM_b$ تعریف می شود، عملگر توپلیتز نامیده می شود. جائی که P تصویر متعامد L^2 به روی H^2 با ضابطه زیر می باشد:

1-The Hilbert - Schmidt Theorem for composition operators
2-Essentially normal
3-commutator of A and B
4- Toeplitz operator

$$P(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)z^n)=\sum_{n\geq 0}\hat{f}(n)z^n \ .$$

با توجه به تعریف، دیده می شود که T_b یک عملگر کراندار روی H^2 است و

$$\|T_b\|=\|PM_b\|\leq\|M_b\|=\|b\|_\infty$$

در حقیقت $\|T_b\|=\|b\|_\infty$ (صفحه ۱۷۹، گزاره ۸-۷[۱۱]).

اگر b تابع حد غیرمماسی از یک تابع تحلیلی کراندار باشد، آنگاه M_b، H^2را به توی خودش می برد و لذا تصویر در تعریف T_b زائد است و T_b روی H^2 در حقیقت همان تحدید M_b به توی H^2 می باشد. در این حالت T_b می تواند به صورت عملگر ضرب نقطه ای توسط تابع تحلیلی b روی H^2 عمل کند.

اگر روی D یا ∂D، $b(z)=z$ باشد، آنگاه به جای T_b می نویسیم T_z. توجه کنید که به ازای $b\in L^\infty$ و $f\in L^2$ داریم:

$$\begin{aligned}<T_b^*f,g> &=<f,T_bg>=<f,PM_bg>=<f,P(bg)>\\ &=<Pf,bg>\\ &=\int(Pf)(\bar{b}\,\bar{g})d\mu\\ &=\int(\bar{b}Pf)\bar{g}\,d\mu\\ &=<PM_{\bar{b}}f,g>\\ &=<T_{\bar{b}}f,g> \quad (\because Pf\in H^2)\end{aligned}$$

به ویژه $T_z^*=T_{\bar{z}}$ یک انتقال پسرو روی H^2 است. زیرا:

$$T_z^*(z^n)=T_{\bar{z}}(z^n)=\bar{z}.z^n=|z|^2.z^{n-1}=z^{n-1}$$

در نتیجه:

$$T_z^*(z^n)=\begin{cases}z^{n-1} & n=1,2,\ldots\\ 0 & n=0\end{cases}$$

هم چنین برای عملگرهای توپلیتز تحلیلی و هر $p\in D$ داریم:

بنابراین، $T_b^*K_p=\overline{b}(p)K_p$.