دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه:

مطالعه‌ای بر توزیع مرکب پواسون–گاما

زهرا وهاب زاده

استاد راهنما:

دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور:

دکتر امین فلامکی

آذر ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه:

مطالعه‌ای بر توزیع مرکب پواسون–گاما

زهرا وهاب زاده

استاد راهنما:

دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور:

دکتر امین فلامکی

آذر ۱۳۹۲

تاریخ : ۹۲/۰۹/۲۷
شماره : ۰۵/۱۶۲۷۶
پیوست :

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه پیام نور استان فارس

دانشگاه پیام نور شیراز
باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم زهرا وهاب‌زاده** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۹۰۰۱۱۱۹۰۰** با عنوان:

" مطالعه‌ای بر توزیع مرکب پوآسون - گاما "

با حضور هیأت داوران در روز **چهارشنبه** مورخ **۱۳۹۲/۰۹/۲۷** ساعت **۹** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۹ به حروف نوزده تمام با درجه عالی تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر نرگس عباسی	راهنما	دانشیار	پیام‌نورشیراز	
۲	دکتر امین فلامکی	مشاور	استادیار	پیام‌نورشیراز	
۳	دکتر عبدالحسین جاهدی	داور	استادیار	دانشکده فنی شهید باهنر شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام‌نور شیراز	

معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۶۲۲۲۲۵۵ - ۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۴۹ - ۰۷۱۱
صندوق پستی: ۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

گواهی اصالت، نشر و حقوق مادی و معنوی اثر

اینجانب زهرا وهاب زاده دانشجوی ورودی سال ۱۳۹۰ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمارریاضی گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز درجای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تایید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان‌نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مراجع آن را ذکر نموده است.

زهرا وهاب زاده

تاریخ وامضا ۱۳۹۲/۹/۲۷

اینجانب زهرا وهاب زاده دانشجوی ورودی سال ۱۳۹۰ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمارریاضی گواهی می‌نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله،کتاب، و ... و به صورت مشترک وبا ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

زهرا وهاب زاده

تاریخ وامضا ۱۳۹۲/۹/۲۷

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می‌باشد.

آذر ۱۳۹۲

تقدیم به پدرم و مادرم

به آسمان‌هایی که باریدند تا بروییم،

خورشیدهایی که تابیدند تا جان بگیریم،

و ریشه‌هایی که قوت خود را به من دادند تا زنده بمانم.

آنان که سپید موی گشتند تا سپید رویم بینند و از پا نشستند تا پای گیرم.

تقدیرنامه

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری. خدایا چنین زیستن را، توبه من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم دانست...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم مراتب سپاس‌گزاری خود را از خانم دکتر نرگس عباسی، دانشیار گروه آمار دانشگاه پیام نور شیراز که زحمات فراوانی در امر تدوین پایان‌نامه بر عهده داشته‌اند که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به پایان نمی‌رسید، ابراز دارم. از جناب آقای دکتر امین فلامکی که زحمت مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را تقبل نمودند کمال امتنان و تشکر را دارم. و از جناب آقای دکتر عبدالحسین جاهدی که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند و از راهنمایی‌های خود اینجانب را بهره‌مند ساخته است، تقدیر و تشکر می‌کنم. و همچنین از سایر اساتید محترم گروه آمار نیز تشکر و قدر دانی می‌کنم. در پایان از خانواده عزیزم به خصوص پدر و مادرم و تمامی دوستانم که با عاطفه سرشار بهترین پشتیبان من بودند از صمیم قلب تشکر می‌نمایم.

چکیده:

توزیع مرکب پواسون–گاما یکی از توزیع‌های مهم در علم آمار می‌باشد که کاربردهای وسیعی در حل مسائل پیدا کرده است. این توزیع از روی توزیع اولیه‌ی پواسون و توزیع پیشین گاما، و در نتیجه توزیع پسین به صورت توزیع مرکب پواسون–گاما پدیدار می‌شود. در این پایان‌نامه، کلیه‌ی مشخصه‌های توصیفی و پارامتری توزیع پواسون–گاما ارائه می‌شود. برای یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها از روش نیوتن استفاده شده است. مطالب در چهار قسمت، فصل‌بندی شده است. فصل اول خلاصه‌ای از روابط بین توزیع‌های پواسون، گاما، دوجمله‌ای، نمایی، و توزیع مرکب پواسون–گاما و تابع چگالی احتمال توزیع مرکب پواسون–گاما ارائه شده است. در فصل دوم، توزیع مرکب پواسون–گاما برای ریزش باران یعنی تحت متغیر S معرفی وسپس مشخصه‌های این توزیع مانند: میانگین، واریانس، مد، تابع مولد گشتاورها، تابع گشتاوری فاکتوریلی، و چندک‌ها ارائه می‌شوند. در فصل سوم این پایان‌نامه به برآورد پارامترهای توزیع مرکب پواسون–گاما با استفاده از روش‌های درستنمایی ماکسیمم شرطی و غیرشرطی و گشتاوری می‌پردازیم. درفصل چهارم ابتدا مقدمات و سپس روش برآورد طراحی – محور گشتاوریاین توزیع و روش هیبرید بیان می‌شود.

کلیدواژه‌ها: توزیع پواسون–گامای مرکب، روش‌های برآوردیابی، روش نیوتن، گشتاور، ماکسیمم درستنمایی شرطی، ضرایب دوجمله‌ای.

فهرست مطالب:

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه توزیع مرکب پواسون–گاما بررسی شده است. متغیر مرکب پواسون–گاما از مجموع یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با اندازه‌ی نمونه تصادفی مستقل با توزیع پواسون است که کاربردهای وسیعی در حل مسائل پیدا کرده است. در تحقیقی که توسط فیشر[۱]، در سال (۱۹۶۰) داده شده است، این مدل برای ریزش باران آورده شده استاین موضوع در میان مولفان دیگر در تحقیقاتشان دیده شده است. برای حالت $\rho = 1$ (ریزش نمایی) برآورد ماکسیمم درستنمایی به دست آمده در مطالعات بویی شاند[۲]، در سال (۱۹۷۷) آورده شده است. برآورد گشتاوری و میزان فصلی بودن در تحقیقات ریفایم[۳]، در سال(۱۹۸۲) آورده شده است. بری وهادجیکاستس[۴]، در سال(۱۹۹۹) برآورد را براساس تحقیق زنجیره مارکوف بررسی کردند و ژی و همکارانش[۵]، درسال (۲۰۰۶) این برآورد را بر اساس ترکیب حداکثر درستنمایی سلسله مراتبی و درستنمایی مجازی مطالعه کردند. چندین تعمیم از مدل پواسون–گاما توصیه شده است. نامیاس ودمی[۶]، در سال (۱۹۸۲) نسخه لگاریتمی کاربردهای مورد نیاز این مدل را فراهم ساخته‌اند. فاکاساوا وباساوا[۷]، در سال (۲۰۰۶) نسخه فضای حالت را ارائه دادند. کریستین[۸]، در سال (۲۰۰۳) نسخه سلسله مراتبی با کاربردهای مانیتورینگ محیطی مدل را ارائه داد. هندرسون وشیماکورا[۹]، در سال (۲۰۰۳) نسخه ای را برای محاسبه ناهمگونی افراد و همبستگی

---

[1] Fisher
[2] Buishand
[3] Revfeim
[4] Hadjicostas and Berry
[5] Xia
[6] Nahmias and Demmy
[7] Fukasawa and Basawa
[8] Christensen
[9] Henderson and Shimakura

سریالی افراد نشان دادند. گالو[1] درسال، (۲۰۰۷) تعمیمی را بررسی کرد که شامل تابع H غیرقابل ردیابی بود و اخیراً چو و والکر[2]، در سال (۲۰۰۸) نسخه چندمتغیری با کاربردهای مدل‌سازی تغییرات فضایی بیماری نشان دادند.

کاربردهای مدل پواسون–گاما وسیع است. در این میان از زمان بندی عمیق تاریخ رادیوکربن با مدل آن، داده‌های سرعت سنگریزه بستر داده‌های تلاش صورت گرفته، توزیع میکروارگانیسم‌ها در غذا، تعداد تیک‌های مرغ‌های ردگروس، جریان خون اندام‌ها، و بی نظمی آب و هوایی در ساحل اسپانیایی مدیترانه، شناسایی نقاط پرخطر، جراحت زیاد بیمار، استخدام در آزمون‌های چند محوری، BSE در غرب فرانسه، توزیع سرمایه انسانی، داده‌های مرگ و میر، بیمه، فراوانی مراجعه به بازار، داده‌های افت پمپ، نرخ آسیب وارده به صنعت ومعدن، اثر غلظت گامت در ادغام اسپرم، و نمونه‌گیری خوشه‌ای دومرحله‌ای می‌باشد. اگرچه به نظر می‌رسد که اکثر ویژگی‌های ریاضیاتی معادله (۲–۱) شناخته نشده است. هدف این تحقیق توجه به تامین ویژگی‌های ریاضیاتی توزیع پواسون–گاما شامل مسائل برآورد می‌باشد. به جز مهارت‌های مجموع و بخشی از روش‌های برآورد نتایج داده شده جدید و اصیل هستند و پیش‌بینی می‌شود که نتایج از مقاله ویدرس و سارالیس ناداراجا[3] در سال (۲۰۱۱) گرفته شده است که مقاله خود را به عنوان منبع مرجع لحاظ کرده‌اند که به تحقیق بیشتر در زمینه مدل پواسون–گاما تشویق می‌کنند.

---

[1]Galue
[2]Choo and Walker
[3]Withers and Saralees Nadarajah

در این پایان‌نامه به مشخصه‌های این توزیع و خواصی شامل روش‌های برآوردیابی با روش‌های گشتاورها و درست‌نمایی ماکسیمم می‌پردازیم و مطالب جمع‌آوری شده در مجموعه‌ای شامل چهار فصل دسته‌بندی و تدوین شده است.

در فصل اول، مقدمات و مطالبی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان شده است. خلاصه‌ای از روابط بین توزیع‌های پواسون، گاما، دوجمله‌ای، نمایی، و توزیع مرکب پواسون–گاما و تابع چگالی احتمال توزیع مرکب پواسون–گاما ارائه شده است. در ادامه توزیع‌های چندجمله‌ایی زنگی شکل و حالت‌های تابع $B_{r,k}(y)$ بیان شده است و سپس در مورد دو روش برآوردیابی نقطه‌ای یعنی برآورد گشتاوری و برآورد درستنمایی ماکسیمم و روش نیوتن شرحی ارائه شده است، که این دو روش در فصل سوم برای برآورد پارامترهای توزیع مرکب پواسون–گاما مورد استفاده قرار می‌گیرد. در پایان این فصل خلاصه‌ای از آماره‌های مرتب و کاربرد آن‌ها بیان شده است.

در فصل دوم، توزیع مرکب پواسون–گاما برای ریزش باران یعنی تحت متغیر S معرفی و تعریف می‌شود، و تاریخچه مختصری از پژوهشگرانی که در این زمینه تحقیق کرده‌اند و کاربردهای توزیع مرکب پواسون–گاما آورده شده است. سپس مشخصه‌های این توزیع مانند: میانگین، واریانس، مد، تابع مولد گشتاورها، تابع گشتاوری فاکتوریلی و چندک‌ها ارائه می‌شوند. سپس به ارائه روش‌های گوناگون برای تابع ایجاد گشتاور، گشتاورها و حالت‌های مجموع s می‌پردازد. این نمایش‌ها برای تابع ایجاد گشتاور و گشتاورها شامل چندجمله‌ای زنگی شکل می‌باشد و سپس در بخش بعدی بسط‌هایی برای چگالی احتمال، توزیع مجموع و توابع چندک از S و میانه فراهم می‌سازد و در نهایت در بخش آخر به نامساوی چبیشف این توزیع می‌پردازد.

در فصل سوم این پایان‌نامه به برآورد پارامترهای توزیع مرکب پواسون–گاما با استفاده از روش‌های درستنمایی ماکسیمم و گشتاوری می‌پردازد و همچنین به مقایسه برآوردهای درستنمایی ماکسیمم با شرطی‌سازی برآوردهای درستنمایی ماکسیمم در دوره‌های بارشی و برآوردهای درستنمایی ماکسیمم با برآوردهای گشتاوری می‌پردازد. در این فصل فرض می‌شود که ρ معلوم است همانگونه که مقادیر ناشناخته $\theta = (\lambda, \alpha)$ هستند. کارائی نسبی مجانبی $\hat{\theta}_c$ به $\hat{\theta}$ و عبارت آشکار و تصاعد برای کمیتهای اطلاع فیشر در این فصل داده شده‌اند. در نهایت، در بخش آخر این فصل به نمایش نتایج بخش‌های قبلی با استفاده از مجموعه داده‌های ریزش باران می‌پردازد، که سه روش برآورد گشتاوری، برآورد درستنمایی ماکسیمم شرطی و برآورد درستنمایی ماکسیمم غیر شرطی با هم مقایسه شده‌اند.

درفصل چهارم برآورد فراوانی فراوانی‌های توزیع مرکب پواسون - گاما ارائه شده است. ابتدا مقدمات و سپس روش برآورد طراحی – محور گشتاوری این توزیع و روش استنتاج هیبرید بیان می‌شودو در نهایت دو گشتاور اول این توزیع و برآورد گشتاوری پارامترها را بدست می‌آورد و سپس یک برآورد تلویحی برای فراوانی فراوانی‌ها ارائه می‌دهد. همچنین، به ارائه تحقیق شبیه‌سازی طراحی شده برای مقایسه مختصات برآوردگر نقطه خالص مدل محور$\mathrm{N}r$ (فراوانی فراوانی‌ها) برای مقادیر کم rبا روش هیبرید پیشنهادی تحت انحراف‌هایی از مدل پارامتری پایه می‌پردازد که در این فصل آن را به عنوان مدل پواسون–گاما به کار می‌گیرد.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱–۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم و نمادهایی را که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت، معرفی می‌کنیم. در بخش دوم، روابط بین توزیع‌ها و توزیع مرکب پواسون–گاما و تابع چگالی احتمالآن را بیان می‌کنیم. در بخش سوم تابع چندجمله‌ای زنگدیس بیان می‌شود. در بخش چهارم برای روش‌های برآوردیابی نقطه‌ای و روش نیوتن شرحی ارائه می‌دهیم. در بخش پنجم آماره‌های مرتب و برخی کاربردهای آن بیان می‌شود.

۱–۲ روابط توزیع‌های پواسون، گاما، نمایی،دوجمله‌ای

توزیع پواسون علاوه بر نقشی که به عنوان یک توزیع تقریب کننده دارد، مدل احتمال مفیدی است برای پیشامدهایی که بطور تصادفی در زمان یا مکان رخ می‌دهند،توزیع پواسون تقریبی از احتمال‌های دوجمله‌ای در حالاتی که n خیلی بزرگ، p خیلی کوچک و np مقدار متوسطی باشد، به دست می‌دهد توزیع پواسون الگوی واقعی برای بسیاری از پدیده‌های تصادفی را فراهم می‌کند.از آنجا که مقادیر یک متغیر تصادفی پواسون اعداد صحیح نامنفی هستند، هر پدیده تصادفی را که در آن نوعی از شمارش مورد توجه است، با فرض توزیع پواسون برای آن می‌توان مدل‌بندی کرد.این شمارش ممکن است،تعداد تصادفات رانندگی منجر به مرگ در هفته در ایالتی معین، تعداد پرتوهای ذرات رادیو اکتیو در واحد زمان، تعداد تلفن‌هایی که در یک ساعت به شرکت بزرگی زده می‌شود،تعداد شهاب سنگ‌هایی که در طی یک دوره چرخش یک ماهواره‌ی آزمایش در مدار به آن برخورد می‌کند، تعداد مولکولهای زنده در واحد حجم یک مایع، و تعداد دفعاتی که باران در یک دوره زمانی می‌بارد.

دو خانواده‌ی دیگر از توزیع‌ها، توزیع نمایی(منفی) و گاما هستند. توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع گاما است و مجموع متغییرهای تصادفی مستقل هم توزیع با توزیع نمایی دارای توزیع گاما است.توزیع نمایی یکی از توزیع‌های آماری است که در مدل‌سازی و تحلیل داده‌های طول عمر به کار می‌رود.

حالت خاص در توزیع گاما،$\rho = 1$، یعنی $\Gamma(\alpha, \rho) = \Gamma(\alpha, 1)$، همان توزیع نمایی با پارامتر α است.

$$f(N = x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

بسیاری از خانواده‌ی توزیع‌های استاندارد،که با آنها آشناییم، نظیر: برنولی، پواسون، دوجمله‌ای، گاما، بتا و هندسی عضو خانواده نمایی هستند. معروف است که:

۱-$f_\theta(x)$ خانواده توزیع‌های نمایی یک پارامتری است اگر

$$f_\theta(x) = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$$

۲-$f_\theta(x)$خانواده توزیع‌های نمایی k پارامتری است اگر

$$f_\theta(x) = a(\theta)b(x)e^{\{\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta)d_i(x)\}}$$

تحت فرض استقلال می‌توان ثابت کرد که اگر وقایع در زمان طوری رخ دهند که توزیع فواصل زمانی بین وقایع متوالی،نمایی باشد،آنگاه توزیع تعداد وقایع در بازه‌ی زمانی معین،توزیع پواسون است از این رو توزیع نمایی و پواسون به هم وابسته‌اند.

۱-۲-۱ توزیع مرکب پواسون-گاما

متغیر مرکب پواسون-گاما از مجموع یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با اندازه‌ی نمونه تصادفی مستقل با توزیع پواسون است.

۱-۲-۲ تابع چگالی احتمال توزیع مرکب پواسون-گاما

فرض کنید، تابع چگالی پواسون به صورت زیر باشد

$$f(x;\theta)=\frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}\quad,\qquad x=0,1,2,\ldots$$

و θ دارای تابع چگالی گاما، $g(\theta)$ به عنوان توزیع پیشین در نظر می‌گیریم.

$$g(\theta)=\frac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-\lambda\theta}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
m(x)=\int_0^{\infty} f(x;\theta).\,g(\theta)d\theta&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}\cdot\frac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-\theta\lambda}d\theta\\
&=\frac{\lambda^{r}}{x!\,\Gamma(r)}\int_0^{\infty}\theta^{r+x-1}e^{-(\lambda+1)\theta}d\theta\\
&=\frac{\lambda^{r}}{x!\,\Gamma(r)}\cdot\frac{\Gamma(r+x)}{(\lambda+1)^{r+x}}\times\int_0^{\infty}[(\lambda+1)\theta]^{r+x-1}e^{-(\lambda+1)\theta}\,d[(\lambda+1)\theta]/\,\Gamma(r+x)\\
&=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{r}\frac{\Gamma(r+x)}{(x!)\Gamma(r)}\frac{1}{(\lambda+1)^{x}}\\
&=\binom{r+x-1}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{r}\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{x},\qquad x=0,1,\ldots,
\end{aligned}$$

که تابع توزیع دوجمله‌ای‌منفی با پارامترهای r و $p=\frac{\lambda}{\lambda+1}$ است. می‌گوییم توزیع دوجمله‌ای‌منفی حاصل،مرکب پواسون-گاما است.این تعریف برگرفته از حالت کلی‌تر است که درانتگرال

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}g(\theta)d\theta$$