بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار گرایش آمار ریاضی

برآورد چگالی شرطی در چارچوب رگرسیون

استاد راهنما:

دکتر افشین پرورده

پژوهشگر:

محسن کبوتری

مهر ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

آقای محسن کبوتری

تحت عنوان

برآورد چگالی شرطی در چارچوب رگرسیون

در تاریخ **۸۹/۷/۲۱** توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **بسیار خوب** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر افشین پرورده با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲- استادداور داخل گروه پایان‌نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۳- استاد داورخارج از گروه دکتر علی رجالی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

امضای مدیر گروه

تقدیر و تشکر

خدا را سپاس می‌گویم که این حقیر را لیاقت داد تا از محضر خوبانی بهره‌مند شوم و برای تشکر، نامشان را بر زبان جاری می‌سازم.

پیش از هر چیز لازم است مراتب امتنان قلبی خود را از الطاف **پدر و مادر عزیزم** ابراز دارم چرا که به من فرصت زیستن در محیطی مساعد برای رشد و پیشرفت را دادند و مرا با روشنی و عشق آشنا کردند، باشد این رساله برای لحظه‌ای لبخند رضایت ایشان را سبب شود.

همچنین از برادران گرامیم که همیشه مایه دلگرمی من بوده‌اند،کمال تشکر و قدردانی را به جا می‌آورم.

از استاد راهنمای بزرگوارم آقای دکتر افشین پرورده بسیار سپاسگذارم، که در تمامی مراحل این پروژه از راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره‌مند شدم و زحمت تصحیح پایان نامه را به عهده گرفتند.

از تمامی دوستانم در که در این مدت با همفکری و همراهی خویش مرا مساعدت کردند، با کمال تواضع و افتخار سپاسگذارم.

و در انتها این پژوهش کاری بود که توانسته‌ایم نه آنچه خواسته‌ایم و حاصل آن تقدیم به تمام کسانی که در طول زندگی‌ام حتی به اندازه کلمه‌ای به من آموخته‌اند.

تقدیم به همه کسانی که دوستشان دارم

و

دوستشان خواهم داشت...

چکیده

در این پایان‌نامه، برآورد چگالی شرطی در چارچوب رگرسیون مورد بررسی قرار گرفته است. چگالی احتمال شرطی نقش مهمی در تجزیه و تحلیل آمار کاربردی از قبیل تحلیل رگرسیون، پردازش سیگنال‌ها، کاوش داده‌ها و پیش‌بینی سری‌های زمانی در علوم اقتصادی و مالی دارد. برآورد ناپارامتری، با استفاده از داده‌ها و روش‌های برآورد و هموارکردن، استنباط کمیت مجهولی که حداقل اطلاعات و فرضیات در مورد آن وجود دارد را ممکن می‌سازد. این پژوهش با مقدمه‌ای بر ریاضیات مورد استفاده برای بیان و اثبات نتایج برآورد منحنی‌های ناپارامتری شروع می‌شود. در ادامه مفاهیم و چگونگی برآورد چگالی احتمال و رگرسیون ناپارامتری برای اندازه نمونه‌های کوچک که به عنوان روش اصلی بکار رفته است مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس دو محک میانگین مربع خطا و میانگین مربع خطای انتگرال برای مشاهده عملکرد برآوردگر مطرح می‌شوند. آن‌گاه دو چگالی طرح ثابت و تصادفی پیش‌بین‌ها که در ادبیات رگرسیون ناپارامتری، برای تحلیل رابطه متغیر پاسخ و متغیرهای پیش‌بین، بکار می‌روند، مطرح خواهندشد. در این پایان‌نامه، مدلهای رگرسیون هم‌واریانس و ناهم‌واریانس که در حالت استقلال و وابستگی خطاها از پیش‌بین‌ها به کار می‌روند و نیز حالت‌های چندمتغیره نیز بررسی می‌شوند. یکی از موضوعات مهم آماری، نظریه مجانبی است که در این پایان‌نامه به آن توجه خاصی شده است. برای بیان نتایج با نظریه مجانبی ابتدا مدل پالایش مطرح می‌شود و با استفاده از اصل هم‌ارزی برای مدل‌های آماری دیگر نتایج مجانبی اثبات می‌شوند. کلاس توابع سوبولف و تحلیلی که در مباحث آماری کاربرد دارند، موضوع بعدی پایان‌نامه است.علاوه بر آن برآوردگرهایی که بدست می‌آیند از لحاظ نرخ همگرایی ریسک‌هایشان و رسیدن به کران‌های پایین، در اینجا مقایسه می‌شوند. چندین برآوردگر تطبیقی با ضریب همواری تابع و داده‌ها مطرح می‌شوند. در پایان برآوردگر افروموویچ-پینسکار معرفی می‌شود که دارای مینیماکس ریسک روی مجموعه بزرگی از توابع است. خواص این برآوردگر تحت تابع‌های زیان متفاوت بیان می‌شود و چگالی‌های طرح بهینه متغیرهای پیش‌بین برای کنترل آزمایشات نیز مبحث آخر این پایان‌نامه است.

کلیدواژه‌ها: رگرسیون ناپارامتری هم‌واریانس و ناهم‌واریانس، برآورد ناپارامتری، سری‌های متعامد، طرح‌های ثابت و تصادفی، کران پایین، میانگین مربع خطای انتگرال، نرخ بهینه

فهرست مطالب

عنوان صفحه

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

مخففها و نمادها

ISB .... integrated squared bias
Inf .... infimum
Sup .... suprimum
MISE............ Mean integrated squared error
MSE............ Mean squared error
(iid)............ independent and identically distributed
$A(\gamma,Q)$ .... Analytic function space
$S(\alpha,Q)$ .... Sobolev function space
$L_2(A)$ .... Space of all square integrable function with domain A
$Lip_{r,\alpha,L}$ .... Lipschitz function space
$f^{(r)}$ .... rth derivative of f
$\lfloor x \rfloor$ .... rounded-down x
$\| x \|$ .... norm of x
$P(\alpha,\beta)$ .... pinsker constant
$d(f)$ .... cofficient of difficulty of f

پیش‌گفتار

بدون شک یکی از موضوعات مهم در علم آمار استنباط ناپارامتری است. ایده اصلی در این بحث استفاده از داده‌ها برای تفسیر و تحلیل کمیت مجهول است، وقتی که حداقل فرضیات در مورد آن کمیت در اختیار باشد. روش‌های استنباط ناپارامتری به طور کلی شامل برآورد چگالی احتمال، رگرسیون ناپارامتری، چگالی طیفی، روش‌های بوت استرپ و موجک‌ها است. روش‌های مختلفی برای برآورد توابع وجود دارد که به دو قسمت تقسیم می‌شوند. روش‌های غیر سری که به روش استفاده از توابع هسته، نمودار، ماکسیمم درست‌نمایی، اسپلاین و ... گفته می‌شود. منابع و مراجع زیادی برای بحث‌های غیر سری وجود دارد. سیلورمن(۱۹۸۶)، سیمونف(۱۹۹۶)، تامسون و تاپیا(۱۹۹۰) و واسرمن(۲۰۰۶) از جمله کسانی‌اند که در این مورد تحقیقاتی را انجام داده‌اند. روش دیگر برای برآورد توابع، روش‌های سری است. سری‌های مثلثاتی(فوریه)، چندجمله‌ای‌ها و موجک‌ها از عناصر روش‌های سری به حساب می‌آیند. این روش‌ها در طول ۳۰ سال اخیر به طور چشمگیری در بحث‌های آمار ناپارامتری به کار رفته‌اند. به کارگیری روشهای سری نیازمند استفاده از آنالیز تابعی است. در سال ۱۹۶۲، چنستوف در مورد برآورد سری فوریه بهینه چگالی‌های ناپارامتری تحقیقاتی را انجام داد. واتسون در ۱۹۶۹ بحث هموارسازی ضرایب فوریه را مطرح ساخت. در دهه ۸۰ افروموویچ و پینسکار به طور قابل توجهی روی این موضوع کار کردند و مفاهیم، تعاریف و قضایای جدید و زیادی را بیان نمودند. استفاده از رگرسیون ناپارامتری با تکیه بر اصل هم‌ارزی توسط براون و لاو(۱۹۹۶) و همچنین نووسباوم(۱۹۹۶) بیان شد. تحقیقات زیادی توسط هاردل(۱۹۹۰) و آرنولد و همکاران(۱۹۹۹) در این زمینه انجام گرفت. ابراگیموف و خاسمینسکی(۱۹۸۴) برآوردهای بهینه را روی فضاهای تابعی مختلف بدست آوردند. در سال‌های اخیر نیز افروموویچ(۱۹۹۲و۱۹۹۶و۲۰۰۸)، هال و راسین(۲۰۰۴) بر روی چگالی‌های شرطی و رگرسیون ناهم‌واریانس مقالاتی را ارائه کرده‌اند. این پایان‌نامه براساس مقاله‌ای از افروموویچ(۲۰۰۷) تحت عنوان برآورد چگالی شرطی در چارچوب رگرسیون آماده شده‌است.

چگالی احتمال شرطی نقش مهمی در تجزیه و تحلیل آمار کاربردی از قبیل تحلیل رگرسیون، پردازش سیگنال‌ها، کاوش داده‌ها و پیش‌بینی سری‌های زمانی خطی و غیر خطی به خصوص در علوم اقتصادی و مالی دارد. برآورد چگالی شرطی این امکان را می‌دهد که بتوان امیدها، مدها، فاصله اطمینان‌ها، کران‌های بالا و پایین و ... را بدست آورد.

براساس مقدمات ذکر شده در فوق، ابتدا در فصل اول، مقدمات ریاضی برای تقریب توابع براساس سری‌های مثلثاتی و تعاریف وقضایای مورد استفاده در فصل‌های بعدی را بیان می‌کنیم. سپس در فصل دوم، ایده برآورد چگالی و رگرسیون ناپارامتری برای اندازه نمونه کوچک با جزئیات گفته می‌شود. در این راستا، پیشگوهایی برای مقایسه با برآورد بدست آمده ارائه می‌شود. همچنین رگرسیون ناپارامتری هم‌واریانس و ناهم‌واریانس با چگالی‌های طرح ثابت و تصادفی در این فصل بیان می‌شود. فصل سوم به برآورد توابع چندمتغیره اختصاص یافته است که تعمیمی از حالت یک‌متغیره است. در ادامه پیچیدگی‌های این تعمیم بیان می‌شود. در فصل چهارم نظریه مجانبی برآورد توابع براساس مدل پالایش مطرح می‌شود.در این فصل کران‌هایی برای برآورد بدست می‌آید و نرخ‌های بهینه همگرایی ثابت می‌شوند. در حالت‌هایی که پارامتر همواری معلوم یا مجهول باشد، برآوردگر تطبیقی مطرح می‌شود. همچنین بلوک افروموویچ-پینسکار که برآوردی بهینه، مینیماکس و تیز را می‌دهد، نیز در این فصل معرفی می‌شود. در فصل پنجم، با توجه به کلاس‌های چگالی‌های شرطی سوبولف و تحلیلی، برای ریسک‌های مختلف، کران‌هایی برای برآوردگر بلوکی افروموویچ-پینسکار در چارچوب

رگرسیون ارائه می‌شود. طرح‌های بهینه و خواص مینیماکسی این برآوردگر و نرخ‌های همگرایی نیز بیان می‌شود. همچنین حالتی را که متغیر پاسخ مستقل از متغیرهای پیش‌بین است و چگالی شرطی دومتغیره به چگالی یک‌متغیره تبدیل می‌شود، نیز در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل اول

سری‌های متعامد و تقریب

۱ - ۱ مقدمه

سری‌های متعامد[1]، یکی از دستاوردهای ریاضیات برای تقریب[2] توابع و معرفی منحنی‌های مورد استفاده در کاربردهای آماری است. در سال‌های اخیر از این دستاورد به طور فزاینده در مباحث آماری به خصوص برآورد ناپارامتری[3] استفاده شده‌است. در این فصل ابتدا توضیحاتی در مورد ریاضیات مورد استفاده برای تقریب توابع با استفاده از سری‌ها و برخی تعریف‌ها و قضیه‌ها (بدون اثبات) بیان می‌شود. در ادامه چند سیستم متعامد ویژه معرفی می‌شود، سپس چگونگی سرعت کاهش ضرایب فوریه[4] مورد بحث قرار می‌گیرد. همچنین سری مثلثاتی کلاسیک با ویژگی‌هایش معرفی خواهد شد. این تعاریف، ویژگی‌ها و قضیه‌ها در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱ - ۲ تعاریف و مفاهیم ریاضی مورد استفاده

نخستین مفهومی که معرفی می‌شود تعریف فضای برداری[5] است.

1 Orthonormal Series
2 Approximation
3 Nonparametric Estimation
4 Fourier coefficients
5 Vector Space

تعریف ۱ - ۱ یک فضای برداری (فضای خطی)، از یک میدان F از اسکالرها، یک مجموعه V از بردارها، دو عمل به نام جمع برداری و ضرب اسکالری تشکیل شده‌است.

جمع برداری عملی است که برای بردارهای α و β از V، بردار $\alpha+\beta$ را که مجموع β و α نامیده می‌شود، با شرایط زیر وابسته می‌سازد:

الف) جمع جابه جایی است؛ یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

ب) جمع شرکت پذیر است؛ یعنی $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

ج) بردار یکتای صفر در V وجود دارد به طوری که به ازای هر α در V، $\alpha+0=\alpha$.

د) به ازای هر α در V، بردار یکتای $-\alpha$ در V وجود دارد به طوری که $\alpha+(-\alpha)=0$.

ضرب اسکالری عملی است که به هر اسکالر c از F و هر بردار α در V، بردار $c\alpha$ در V را که حاصل‌ضرب c و α نامیده می‌شود، با شرایط زیر وابسته می‌سازد:

الف) به ازای هر α در V؛ $1.\alpha=\alpha$.

ب) $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$.

ج) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$.

د) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

مثال) میدان‌های R^n و C^n با مجموع و ضرب اسکالر معمولی به ترتیب روی R و C دو فضای برداری ساده هستند که به ترتیب فضای برداری حقیقی و مختلط نامیده می‌شوند.

مثال) فضای توابع از یک مجموعه به یک میدان. اگر $F=R^n$ یا C^n و S مجموعه‌ای غیرتهی و V مجموعه همه توابع از S به میدان F باشند. مجموع دو بردار f و g از V، بردار $f+g$ است یعنی تابعی از S در F که به صورت $(f+g)(s)=f(s)+g(s)$ تعریف می‌شود. حاصل‌ضرب اسکالر c و تابع f، تابع cf است: $(cf)(s)=cf(s)$.

تعریف ۱ - ۲ اگر $x_1,x_2,...,x_k\in R$ و $c_1,c_2,...,c_k$ اسکالرهایی باشند، بردار

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_kx_k$$

یک ترکیب خطی[1] از $x_1,x_2,...,x_k$ است. چنانچه $S\subset R^n$ و E مجموعه تمام ترکیبات خطی عضوهای S باشد، می‌گویند S، E را می‌پیماید یا که E پیمای[2] S است.

1 Linear compotision
2 Span

تعریف ۱ – ۳ مجموعه بردارهای $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ را مستقل خطی[1] نامند هرگاه رابطه $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k = 0$ ایجاب کند که $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. در غیر این صورت، $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ را وابسته خطی می‌نامند.

تعریف ۱ – ٤ هر زیر مجموعه مستقل خطی از فضای برداری V که V را بپیماید، یک پایه[2] نامیده می‌شود.

تعریف ۱ – ٥ تابع $x \mapsto \| x \|$ از فضای برداری V به $[0, \infty)$ را نرم[3] گویند اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\| x \| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

ب) برای هر $x \in V$ و $\lambda \in R$ ؛ $\| \lambda x \| = | \lambda | . \| x \|$.

ج) برای هر $x \in V$ ؛ $\| x \| \geq 0$.

د) برای هر $x, y \in V$ ؛ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

مثال) اگر $V = \mathbb{R}^n$ ، آن‌گاه برای هر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ یک نرم تعریف می‌کند، که نرم اقلیدسی[4] نامیده می‌شود.

تعریف ۱ – ٥ فضای برداری دارای نرم، فضای نرم‌دار[5] نامیده می‌شود، پس یک فضای نرم‌دار، دوتایی $(V, \| . \|)$ است که V فضای برداری و $\| . \|$ نرم آن است. از آن‌جا که $\| x \|$ ، اندازه x را مشخص می‌سازد، $\| x - y \|$ را می توان متر یا فاصله بین x و y در نظر گرفت.

تعریف ۱ – ٦ همگرایی در فضای نرم‌دار

اگر $(V, \| . \|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. گویند دنباله $\{x_n\}$ از عناصر V به $x \in V$ همگرا است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq M$: $\| x_n - x \| < \varepsilon$.

(می‌نویسند: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ یا $x_n \to x$)

تعریف ۱ – ۷ اگر V فضای برداری مختلط باشد. نگاشت $<\cdot, \cdot> : V \times V \to C$، را ضرب‌داخلی[6] در V گویند اگر برای هر $x, y, z \in V$ و $\alpha, \beta \in C$ خواص زیر برقرار باشد:

الف) $< x , y > = \overline{< y , x >}$ (علامت بار نشان‌دهنده مزدوج مختلط است).

ب) $< \alpha x + \beta y , z > = \alpha < x , z > + \beta < y , z >$.

---

1 Linearly independent
2 Basis
3 Norm
4 Euclidean Norm
5 Normed Space
6 Inner Product

ج) $0 \geq <x,y>$ و $<x,x>=0$ اگر وتنها اگر $x=0$.

نکته) فضای برداری با ضرب‌داخلی، فضای ضرب‌داخلی نامیده می‌شود.

مثال) اگر $V=C^n$ آن‌گاه، $<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i.\overline{y_i}$ یک ضرب داخلی است.

مثال) فضای همه توابع مختلط پیوسته روی بازه $[a,b]$ همراه با ضرب‌داخلی به

صورت: $<f,g>=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ یک فضای ضرب‌داخلی است.

تعریف ۱ - ۸ نرم فضای حاصل‌ضرب‌داخلی با تابع $\|x\|=\sqrt{<x,x>}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱ - ۱ برای هر دو عضو x و y از فضای ضرب‌داخلی، داریم:

۱) **نامساوی شوارتز**[1] $|<x,y>|\leq\|x\|\|y\|$.

تساوی زمانی برقرار است که x و y مستقل خطی باشند و بر عکس.

۲) **نامساوی مثلثی**[2] $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

۳) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

تعریف ۱ - ۹ (بردارهای متعامد[3])

بردارهای x و y در فضای ضرب‌داخلی، متعامد نامیده می‌شوند اگر $<x,y>=0$ و با نماد $x\perp y$ نمایش داده می‌شود. اگر $x\perp y$ آن‌گاه $\overline{<x,y>}=<y,x>=0$ پس $y\perp x$. (رابطه $\perp$ متقارن است)

قضیه بعدی مثال دیگری از ویژگی هندسی نرم تعریف شده به وسیله ضرب‌داخلی را نشان می‌دهد.

قضیه ۱ - ۲ (رابطه فیثاغورث) برای هر دو بردار متعامد x و y داریم:

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

تعریف ۱ - ۱۰ دنباله بردارهای $\{x_n\}$ از فضای نرم‌دار را دنباله کوشی[4] می‌گویند، اگر برای هر $\varepsilon>0$ عدد M وجود داشته باشد به طوری که $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$, برای هر $m,n>M$.

تعریف ۱ - ۱۱ فضای نرم‌دار V را کامل[5] گویند اگر هر دنباله کوشی، همگرا به عضوی در V باشد.

تعریف ۱ - ۱۲ (فضای هیلبرت[6]) فضای ضرب‌داخلی کامل را فضای هیلبرت گویند.

---

1 Schwarzs Inequality
2 Triangle Inequality
3 Orthogonal Vectors
4 Cauchy sequence
5 complete
6 Hilbert Space

مثال) C^n فضایی کامل است، در نتیجه فضای هلیبرت نیز می‌باشد.

تعریف ۱ - ۱۳ فرض کنید $0 < p < \infty$ ، مجموعه همه توابع اندازه پذیر[1] f که $|f|^p$ انتگرال‌پذیر باشد را با $L_p(\cdot)$ نمایش می‌دهند. نرم L_p به صورت $\| f \|_p = (\int |f|^p)^{1/p}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱ - ۳ فضای L_p برای $1 \le p < \infty$ کامل است وبرای $p = 2$ فضای هیلبرت می‌باشد.

تعریف ۱ - ۱٤ سیستم‌های متعامد نرمال

مجموعه‌ای از بردارهای غیرصفر S ، در فضای ضرب‌داخلی V، سیستم متعامد نامیده می‌شود هرگاه برای x و y متعلق به S داشته باشیم $x \perp y$. همچنین اگر برای سیستم متعامد S ، $\| x \| = 1$ برای $x \in S$ آن‌گاه S سیستم متعامد نرمال نامیده می‌شود.

هر مجموعه متعامد از بردارهای غیرصفر را می توان به سیستم متعامد نرمال تبدیل کرد. اگر S یک سیستم متعامد باشد آن‌گاه $S_1 = \left\{ \frac{x}{\| x \|} : x \in S \right\}$ یک سیستم متعامد نرمال است.

قضیه ۱ - ٤ سیستم‌های متعامد نرمال، مستقل خطی هستند.

تعریف ۱ - ۱۵ دنباله‌ای از بردارها که یک سیستم متعامد نرمال را تشکیل دهند، دنباله متعامد نرمال نامیده می‌شوند. شرایط متعامد نرمال بودن $\{x_n\}$ را می‌توان به وسیله دلتای کرونکر[2] به صورت زیر نوشت:

$$< x_m , x_n > = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

مثال) اگر $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in})$ آن‌گاه مجموعه $S = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ یک سیستم متعامد نرمال است.

مثال) اگر $\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$ دنباله‌ای از توابع باشند. مجموعه $\{ \phi_n : n \in \mathbb{Z} \}$ یک سیستم متعامد نرمال در $L_2([-\pi, \pi])$ است زیرا برای $m \neq n$ داریم:

$$< \phi_m , \phi_n > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} \, dx = \frac{e^{\pi i(m-n)} - e^{-\pi i(m-n)}}{2\pi i (m-n)} = 0$$

از طرف دیگر، $< \phi_n , \phi_n > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)x} \, dx = 1$، بنابراین برای اعداد صحیح m و n،

$$< \phi_m , \phi_n > = \delta_{mn} .$$

1 Measurable functions

2 Kronecker delta

نکته) ممکن است دنباله‌ای از توابع متعامد باشند ولی متعامد نرمال نباشند یا اینکه مستقل خطی باشند ولی متعامد نباشند. روشی به نام فرآیند متعامد و نرمال‌سازی گرام-اشمیت[1] برای تبدیل این دنباله‌ها به دنباله‌های متعامد نرمال به شرح زیر وجود دارد.

اگر دنباله $\{y_n\}$ ، بردارهای مستقل خطی در فضای ضرب‌داخلی باشند و دنباله‌های $\{w_n\}$ و $\{x_n\}$ به صورت زیر باشند:

$$w_1 = y_1 \qquad\qquad x_1 = \frac{w_1}{\| w_1 \|}$$

$$w_k = y_k - \sum_{n=1}^{k-1} < y_k , x_n > x_n \qquad\qquad x_k = \frac{w_k}{\| w_k \|} \quad , \quad k = 2,3,\ldots$$

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ متعامد نرمال است. همچنین می‌توان ثابت کرد که ترکیبات خطی بردارهای $x_1,\ldots,x_n$ ترکیبات خطی بردارهای $y_1,\ldots,y_n$ هستند و برعکس.

قضیه ۱ - ۵ (نامساوی بسل[2]) اگر $\{x_n\}$ دنباله متعامد نرمال در فضای ضرب‌داخلی V باشد، برای هر $x \in V$ ، سری $\sum_{k=1}^{\infty} |< x , x_k >|^2$ همگرا است و داریم: $\sum_{k=1}^{\infty} |< x , x_k >|^2 \le \| x \|$.

(دبنات و میکوسینسکی،۲۰۰۵)

قضیه ۱ - ٦ (اتحاد پارسوال[3]) اگر $\{x_n\}$ دنباله متعامد نرمال در فضای ضرب‌داخلی V باشد. برای هر $x \in V$ ، $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |< x , x_k >|^2$ اگر و تنها اگر فضای ضرب‌داخلی کامل باشد.(دنباله متعامد نرمال $\{x_n\}$ در فضای ضرب‌داخلی V را کامل گویند، اگر برای هر $x \in V$ ، $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x , x_n > x_n$)

(دبنات و میکوسینسکی،۲۰۰۵)

تعریف ۱ – ١٦ (پایه‌های متعامد نرمال)

سیستم متعامد نرمال B در فضای ضرب‌داخلی V، را پایه متعامد نرمال می‌گویند اگر برای $x \in V$ نمایش یکتای $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ وجود داشته باشد که در آن $\alpha_n \in C$ و x_n عناصر مجزا B هستند.

نکته) می‌دانیم که همانند فضاهای اقلیدسی متناهی‌البعد، رابطه زیر برقرار است:

---

1 Gram-Schmidt orthonormalization procedure
2 Bessel Inequality
3 Parseval Identity