دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

رفتار مجانبی معادلات تحولی از نوع یکنوا با منظم‌سازی تیخونوف

نگارش:

منصوره بلباسی

استاد راهنما: **دکتر هادی خطیب زاده**

مهر ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم، که همواره مشوقم

بودند.

قدردانی و تشکر

خداوند متعال را شاکرم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا نمود و مرا از لطف بی‌نهایت خویش بهره‌مند کرد و چه دشوار است تشکر از عزیزانی که اندیشیدن و معرفت را به من آموختند.

از خانواده عزیزم به ویژه پدر و مادر بزرگوارم که با حمایت‌های بی‌دریغ خود مرا در رسیدن به این هدف یاری نمودند، تشکر ویژه می‌نمایم که همه داشته‌هایم را مرهون و مدیون آن دو بزرگوارم.

سپاس خود را نثار استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر هادی خطیب‌زاده می‌نمایم که با علم و صبر و حوصله فراوان راهنمایم شد تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. همچنین از داوران گرامی جناب آقای دکتر فرض‌اله میرزاپور و جناب آقای دکتر علی فروش باستانی که قبول زحمت فرموده و پایان‌نامه این حقیر را مطالعه نمودند، سپاسگزارم.

و در نهایت مراتب سپاس و قدردانی خود را به تمام اساتیدی که افتخار شاگردی از محضرشان را داشته‌ام، ابراز می‌دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا رفتار مجانبی معادلات تحولی از درجه اول از نوع یکنوا را مطالعه می‌کنیم. سپس با سیستم تحولی و مدار تقریبی آن آشنا شده و یک هم‌ارزی مجانبی بین سیستم تحولی بامدار تقریبی آن به دست می‌آوریم. سپس یک کاربرد از سیستم تحولی و مدار تقریبی آن در رفتار مجانبی معادلات تحولی غیر خودگردان نشان می‌دهیم. در نهایت همگرایی قوی جواب را با منظم‌سازی تیخونوف به دست می‌آوریم.

واژگان کلیدی: عملگر ماکزیمال یکنوا، معادله تحولی از نوع یکنوا، سیستم تحولی، مدار تقریبی، هم‌ارزی مجانبی، منظم‌سازی تیخونوف، رفتار مجانبی.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

نظریه معادلات تحولی غیر خطی نسبت به عملگر ماکزیمال یکنوا و نیم گروه‌های غیر خطی انقباضی تعمیم نظریه معروف هیله– یوشیدا برای نیم گروه‌های خطی می‌باشد که با کارهای کاتو[۱]، فیلیپس[۲]، لیونز[۳] و ... آغاز شد. این نظریه بسیاری از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مانند معادلات موج، انتشار و شرودینگر را به صورت یکپارچه درمی‌آورد به طوری که هر قضیه‌ای که درباره وجود و رفتار مجانبی جواب برای این معادلات به دست آید در همه حالت‌های خاص آن نیز برقرار است.

این دسته از معادلات دارای خواص جالبی از نقطه نظر همگرایی جواب می‌باشند به طوری که جواب‌های کراندار آن‌ها و یا میانگین‌های به صفر عملگر ماکزیمال یکنوا همگرا می‌شود. در حالت خاصی که عملگر ماکزیمال یکنوا زیردیفرانسیل یک تابع محدب، سره و شبه پیوسته پایینی باشد صفر عملگر نقطه مینیمم تابع محدب خواهد بود. از این جهت این معادلات از نقطه نظر بهینه‌یابی نیز دارای اهمیت ویژه هستند و از آن‌ها و یا شکل گسسته آن‌ها جهت به دست آوردن الگوریتمی برای تقریب نقطه مینیمم تابع محدب استفاده می‌شود. در سال‌های اخیر پژوهش‌های فراوانی در این زمینه انجام شده که خواننده علاقه‌مند جهت مطالعه مطالبی افزون بر این پایان‌نامه می‌تواند به مراجع [۱۳، ۱۱، ۱۰، ۸، ۴، ۳] رجوع کند.

در این پایان‌نامه، در فصل اول پیش‌نیازهایی از آنالیز تابعی را بیان کرده و پس از آشنایی با عملگرهای ماکزیمال یکنوا و خواص آن‌ها در فصل دوم، در فصل سوم به مسئله همگرایی ضعیف جواب و میانگین به صفر عملگر می‌پردازیم. در فصل چهارم به مفهوم یک سیستم تحولی که تعمیمی از مفهوم نیم گروه است، توجه کرده و به بررسی هم‌ارزی مجانبی سیستم‌های تحولی انقباضی با مدارهای تقریبی آن‌ها می‌پردازیم و به عنوان کاربردی از این نتایج مسئله همگرایی جواب معادله را در حالت غیر همگن بررسی می‌کنیم. در فصل پنجم که فصل آخر

[۱] $Ekato$
[۲] $Phillips$
[۳] $Lions$

این پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد، منظم‌سازی تیخونوف را که با افزودن اغتشاشی مناسب به عملگر به دست می‌آید، را معرفی می‌کنیم. هدف اصلی از این بخش نشان دادن آن است که با افزودن این جمله کنترلی جواب معادله این بار همگرای قوی (بر خلاف حالت قبل که همگرایی ضعیف به دست می‌آید) به صفر عملگر می‌باشد. قابل ذکر است مطالب این پایان‌نامه عمدتاً شرح و بررسی مقاله [۹] مندرج در لیست مراجع می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف، قضایا و مفاهیم ابتدایی

در این بخش تعاریف و قضایایی که در آنالیز تابعی مطرح هستند و در فصل‌های آتی از آن‌ها استفاده می‌شود را عنوان می‌نماییم.

۱.۱ پیش نیازهایی از آنالیز تابعی

فرض کنید E یک فضای توپولوژیک باشد.

تعریف ۱.۱.۱ تابع $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ را شبه پیوسته پایینی (ش. پ. پ) گوییم، هرگاه برای هر $x \in E$ داشته باشیم

$$\liminf_{y \to x} \varphi(y) \geq \varphi(x).$$

تعریف ۲.۱.۱ می‌گوییم تابع $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ محدب است، اگر داشته باشیم

$$\varphi(tx + (۱-t)y) \leq t\varphi(x) + (۱-t)\varphi(y), \qquad \forall x, y \in E, \qquad \forall t \in (۰, ۱)$$

تعریف ۳.۱.۱ می‌گوییم تابع $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ اکیداً محدب است، اگر داشته باشیم

$$\varphi(tx + (1-t)y) < t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \qquad \forall x, y \in E, \qquad \forall t \in (0, 1)$$

یادآوری می‌کنیم زیر مجموعه $A \subset E$ محدب است، اگر داشته باشیم

$$tx + (1-t)y \in A, \qquad \forall x, y \in A, \qquad \forall t \in [0, 1]$$

قضیه ۴.۱.۱ $(Min - Max)$. فرض کنید $X \subset \mathbb{R}^m$ و $Y \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌های محدب و فشرده باشند. فرض کنید $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ روی $X \times Y$ پیوسته باشد. اگر برای هر $x \in X$، $f(x, .) : Y \to \mathbb{R}$ محدب و برای هر $y \in Y$، $f(., y) : X \to \mathbb{R}$ مقعر باشد، آنگاه

$$max_{x \in X} min_{y \in Y} f(x, y) = min_{y \in Y} max_{x \in X} f(x, y).$$

برهان . به [۵] رجوع کنید. □

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم E, F دو فضای باناخ باشند. تابع $A : E \to F$ را بسته گوییم، هرگاه نمودار A در $E \times F$ بسته باشد.

تعریف ۶.۱.۱ اگر K زیر مجموعه‌ای از E باشد، پوش محدب بسته K، اشتراک تمام زیر مجموعه‌های محدب و بسته شامل K است. به طور معادل، کوچکترین مجموعه محدب و بسته شامل K را پوش محدب K می‌گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ گوییم فرم دوخطی $a : E \times E \to \mathbb{R}$ تراکمی است، هرگاه ثابت $\alpha > 0$ موجود باشد به طوری که

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2, \qquad \forall v \in E$$

گزاره ۸.۱.۱ فرض کنیم $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ یک تابع محدب و شبه پیوسته پایینی (برای توپولوژی قوی) باشد. در این صورت برای توپولوژی ضعیف شبه پیوسته پایینی است. به ویژه اگر $x_n \rightharpoonup x$، در این صورت داریم

$$\liminf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

برهان . به [۱] رجوع کنید. $\square$

گزاره ۹.۱.۱ فرض کنیم E یک فضای باناخ انعکاسی باشد، $A \subset E$ یک زیر مجموعه محدب، بسته، ناتهی و $\varphi : A \to (-\infty, +\infty]$ یک تابع محدب، شبه پیوسته پایینی و سره باشد به طوری که

$$\lim_{x\in A, ||x||\to\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

(هیچ فرضی اگر A کراندار باشد)

در این صورت φ مینیمم خود را روی A اتخاذ می‌کند، یعنی $x_\circ \in A$ وجود دارد به طوری که $\varphi(x_\circ) = \min_A \varphi$.

برهان . به [۱] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۱۰.۱.۱ فضای باناخ E را به طور یکنواخت محدب گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ موجود باشد، به طوری که

$$(x, y \in E,\ \ ||x|| \leq ۱,\ \ ||y|| \leq ۱,\ \ ||x-y|| > \varepsilon) \Rightarrow (||\frac{x+y}{۲}|| < ۱ - \delta).$$

گزاره ۱۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ به طوریکنواخت محدب و $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوری که $x_n \rightharpoonup x$ و $\limsup ||x_n|| \leq ||x||$، آنگاه $x_n \to x$ به طور قوی.

برهان . به [۱۱] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۱۲.۱.۱ نگاشت f را بسته ضعیف گوییم هرگاه از شرایط $x_n \rightharpoonup x$، $v_n \rightharpoonup v$ و $v_n \in f(x_n)$ نتیجه بگیریم $v \in f(x)$.

قضیه ۱۳.۱.۱ (مازور [۱]). اگر A یک زیرمجموعه بسته و محدب از یک فضای خطی نرمدار باشد، آنگاه A بسته ضعیف است.

برهان . به [۱] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۱ (تصویر روی یک مجموعه محدب و بسته). فرض کنیم $K \subset H$ یک مجموعه محدب، بسته و ناتهی باشد. در این صورت برای هر $f \in H$، $u \in K$ یکتا وجود دارد به طوری که

$$|f-u| = \min_{v\in K} |f-v|.$$

به علاوه u توسط خاصیت زیر توصیف می‌شود

$$\begin{cases} u \in K \\ \langle f-u, v-u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

می‌نویسیم $u = P_K f =$ تصویر f روی K.

برهان . به [۱] رجوع کنید. $\square$

گزاره ۱۵.۱.۱ (نامساوی گرنوال [۲]). فرض کنید توابع پیوسته $u, k : [0, T] \to [0, \infty)$ و $K > 0$ موجود هستند که در شرط زیر صدق می‌کنند

$$u(t) \leq K + \int_0^t k(s)u(s)ds,$$

برای هر $t \in [0, T]$. آنگاه داریم

$$u(t) \leq K \exp\big(\int_0^t k(s)ds\big).$$

برهان . به [۱۳] رجوع کنید. $\square$

[۱] $Mazur$

[۲] $Gronwall$

تعریف ۱۶.۱.۱ گوییم مجموعه $D \subset [0, \infty)$ با اندازه پر است، هرگاه $\mu([0, \infty) - D) = 0$ باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ روش SD یک الگوریتم برای یافتن نزدیکترین مینیمم موضعی برای یک تابع، با فرض این که گرادیان تابع قابل محاسبه است، می‌باشد.

فصل ۲

عملگرهای ماکزیمال یکنوا

۱.۲ عملگرهای ماکزیمال یکنوا

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید H یک فضای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ و نرم $\|.\|$ باشد. یک عملگر، یک نگاشت مجموعه مقدار به صورت $A : H \to 2^H$ می‌باشد با دامنه $D(A) = \{u \in H : Au \neq \emptyset\}$ که $D(A)$ ناتهی است.

نمودار A را به صورت $[u, u^*] \in A$ برای $u^* \in A(u)$ تعریف می‌کنیم، و برای راحتی A را با نمودار آن یکی می‌گیریم.

عملگر A^{-1} نیز به این‌صورت تعریف می‌شود که $[u, u^*] \in A^{-1}$ اگر و تنها اگر $[u^*, u] \in A$.

تعریف ۲.۱.۲ عملگر $A : H \to 2^H$ یکنوا است اگربرای هر $[x, x^*], [y, y^*] \in A$ داشته باشیم

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0. \qquad (1)$$

تعریف ۳.۱.۲ عملگر A را قویاً یکنوا گوییم، اگر به ازای هر $x, y \in D(A)$، ثابت $\alpha > \circ$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \alpha ||x - y||^{۲}.$$

تعریف ۴.۱.۲ یک عملگر را ماکزیمال یکنوا گوییم اگر نمودار آن مشمول در نمودار هیچ عملگر یکنوای دیگری به طور سره نباشد.

مشاهده می‌کنیم که اگر A یکنوا باشد، آنگاه $A^{-۱}$ و λA برای $\lambda > \circ$ نیز چنین است. همین مطلب برای عملگر ماکزیمال یکنوا نیز درست است.

زیرا فرض کنیم A یکنوا باشد. در نتیجه برای هر $[x, x^*], [y, y^*] \in A$ داریم $\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq \circ$، و بنا به تعریف $A^{-۱}$ داریم $[x^*, x], [y^*, y] \in A^{-۱}$، بنابراین با توجه به رابطه (۱) داریم $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq \circ$، در نتیجه $A^{-۱}$ نیز یکنوا است. همچنین اگر $[x, x^*], [y, y^*] \in A$ آنگاه با توجه به رابطه (۱) خواهیم داشت

$$\langle \lambda x - \lambda y, \lambda x^* - \lambda y^* \rangle = \lambda^{۲} \langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq \circ.$$

بنابراین λA برای $\lambda > \circ$ نیز یکنوا است.

و اگر A ماکزیمال یکنوا باشد، یعنی نمودار آن مشمول در نمودار هیچ عملگر یکنوای دیگری به طور سره نیست. پس با توجه به تعریف $A^{-۱}$ نمودار $A^{-۱}$ نیز مشمول در نمودار هیچ عملگر یکنوای دیگری به طور سره نخواهد بود. همین مطلب نیز در مورد λA برای $\lambda > \circ$ برقرار می‌باشد.

لم ۵.۱.۲ فرض کنید A یک عملگر ماکزیمال یکنوا باشد. نقطه $[x, x^*] \in H \times H$ متعلق به نمودار A است اگر و تنها اگر

$$\langle x^* - u^*, x - u \rangle \geq \circ, \qquad \forall [u, u^*] \in A$$

برهان . اگر $[x, x^*] \in A$، آنگاه بنا به یکنوایی A نامعادله برقرار است.

برعکس، اگر $[x, x^*] \notin A$، آنگاه مجموعه $A \cup \{[x, x^*]\}$ یک نمودار از عملگر یکنواست که A را گسترش می‌دهد، که با ماکزیمال بودن A در تناقض است. □

تعریف ۶.۱.۲ عملگر $A : H \to ۲^H$ انقباضی است اگر داشته باشیم

$$||x^* - y^*|| \leq ||x - y||, \qquad \forall [x, x^*], [y, y^*] \in A \qquad (۲)$$

مشاهده می‌کنیم یک عملگر انقباضی در دامنه تک مقداری است. زیرادر غیر این صورت اگر داشته باشیم $x_۱, x_۲ \in A(x)$ و $x_۱ \neq x_۲$، آنگاه بنا به رابطه (۲) داریم

$$\circ \leq ||x_۱ - x_۲|| \leq ||x - x|| = \circ,$$

که تناقض است، پس در دامنه باید تک مقداری باشد.

تعریف ۷.۱.۲ فرض کنید I نگاشت همانی روی H باشد، برای $\lambda > \circ$ عملگر حلال A عبارت است از عملگر

$$J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-۱}.$$

قضیه ۸.۱.۲ فرض کنید $A : H \to ۲^H$، آنگاه

۱. A یکنواست اگر و تنها اگر J_λ^A، برای هر $\lambda > \circ$، انقباضی باشد.

۲. عملگر یکنوای A ماکزیمال است اگر و تنها اگر، $I + \lambda A$، برای هر $\lambda > \circ$، پوشا باشد .

برهان . ۱. فرض کنید A یکنوا باشد و $[x, x^*], [y, y^*] \in A$ و $\lambda > \circ$، نامعادله (۱) نتیجه می‌دهد

$$||x - y|| \leq ||x - y + \lambda(x^* - y^*)||, \qquad \forall \lambda \geq \circ \qquad (۳)$$

زیرا بنا به یکنوایی A داریم $< x^* - y^*, x - y > \geq \circ$، طرفین رابطه (۳) را به توان (۲) می‌رسانیم پس داریم

$$||x - y||^۲ \leq ||x - y + \lambda(x^* - y^*)||^۲.$$

بنا براین داریم

$$||x-y||^{۲} \leq ||x-y||^{۲} + ۲\lambda\langle x^*-y^*, x-y\rangle + \lambda^{۲}||x^*-y^*||^{۲}.$$

که با حذف $||x-y||^{۲}$ از طرفین خواهیم داشت

$$\circ \leq ۲\lambda\langle x^*-y^*, x-y\rangle + \lambda^{۲}||x^*-y^*||^{۲}.$$

که به یک رابطه بدیهی رسیدیم، پس رابطه (۳) برقرار است.

می دانیم $x^* \in Ax$ و با ضرب λ داریم $\lambda x^* \in \lambda Ax$ حال با افزودن x به دو طرف داریم

$$x + \lambda x^* \in x + \lambda Ax = (I+\lambda A)x.$$

بنابراین

$$(I+\lambda A)^{-۱}(x+\lambda x^*) = x.$$

و داشتیم $J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-۱}$ پس داریم

$$J_\lambda^A(x+\lambda x^*) = x.$$

حال در رابطه (۳) جاگذاری می‌کنیم

$$\{ \quad ||x-y|| \leq ||x-y+\lambda(x^*-y^*)||, \qquad \forall\lambda \geq \circ \qquad (۳) \quad \}$$

$$||J_\lambda^A(x+\lambda x^*) - J_\lambda^A(y+\lambda y^*)|| \leq ||x+\lambda x^* - y + \lambda y^*||.$$

که با قرار دادن $x + \lambda x^* = x_۱$ و $y + \lambda y^* = y_۱$ خواهیم داشت

$$||J_\lambda^A(x_۱) - J_\lambda^A(y_۱)|| \leq ||x_۱ - y_۱||.$$

در نتیجه J_λ^A انقباضی است.

برعکس، با توجه به رابطه (۳) برای هر $\lambda \geq \circ$ داریم

$$||x-y|| \leq ||x-y+\lambda(x^*-y^*)||$$
$$\leq ||x-y|| + ||\lambda(x^*-y^*)||.$$

چون $\langle x^*-y^*, x-y\rangle \geq \circ$ با ضرب $\lambda \geq \circ$ داریم

$$\lambda\langle x^*-y^*, x-y\rangle \geq \circ. \qquad (I)$$

همچنین چون $\lambda||x^*-y^*|| \geq \circ$، به توان (۲) برسانیم، خواهیم داشت

$$\lambda^{۲}||x^*-y^*||^{۲} \geq \circ. \qquad (II)$$

حال با جمع دو مقدار مثبت (I) و (II) داریم

$$\lambda\langle x^*-y^*, x-y\rangle + \lambda^{۲}||x^*-y^*||^{۲} \geq \circ.$$

حال اگر رابطه اخیر را بر λ تقسیم کرده و λ رابه $\circ$ میل دهیم، رابطه (۱) نتیجه می‌شود.

۲. کافیست حکم را برای حالت $\lambda = ۱$ ثابت کنیم، زیرا گفتیم اگر A ماکزیمال یکنوا باشد برای $\lambda > \circ$، λA نیز چنین است.

$z_\circ \in H$ را در نظر می‌گیریم، پیدا می‌کنیم $x_\circ \in H$ به طوری که داشته باشیم

$$\langle y-(z_\circ - x_\circ), x-x_\circ\rangle \geq \circ, \qquad \forall [x,y] \in A$$

در این صورت ماکزیمال بودن A نتیجه می‌دهد $z_\circ - x_\circ \in A(x_\circ)$.

برای $[x,y] \in A$، مجموعه فشرده ضعیف $C_{x,y}$ را به صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$C_{x,y} = \{x_\circ \in H \ : \ \langle y + x_\circ - z_\circ, x - x_\circ\rangle \geq \circ\}.$$

$C_{x,y}$ فشرده است، زیرا برای فشرده بودن باید بسته و کراندار باشد

اثبات کرانداری:

طبق تعریف $C_{x,y}$، برای $x_\circ \in H$، داریم

$$\langle y + x_\circ - z_\circ, x - x_\circ\rangle \geq \circ.$$

بنابراین

$$\langle y, x - x_\circ\rangle + \langle x_\circ - z_\circ, x - x_\circ\rangle \geq \circ.$$

در نتیجه

$$\langle y, x - x_\circ\rangle + \langle x_\circ, x - x_\circ\rangle - \langle z_\circ, x - x_\circ\rangle \geq \circ$$

$$\Rightarrow \langle y, x - x_\circ\rangle - \langle z_\circ, x - x_\circ\rangle \geq ||x_\circ||^{۲} - \langle x_\circ, x\rangle.$$

طبق نامساوی کشی– شوارتز داریم $\langle x_\circ, x\rangle \leq ||x_\circ||||x||$، پس $-\langle x_\circ, x\rangle \geq -||x_\circ||||x||$، بنابراین

$$\langle y - z_\circ, x - x_\circ\rangle \geq ||x_\circ||^{۲} - ||x_\circ||||x||$$

$$\Rightarrow \langle y - z_\circ, x - x_\circ\rangle \geq ||x_\circ||(||x_\circ|| - ||x||).$$

چون $||x_\circ|| - ||x|| \neq \circ$، بنابراین

$$\frac{\langle y - z_\circ, x - x_\circ\rangle}{||x_\circ|| - ||x||} \geq ||x_\circ||.$$

حال اگر $C_{x,y}$ کراندار نباشد، دنباله‌ای به صورت $\{x_\circ^n\}$ وجود دارد که نرم آن به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. یعنی $||x_\circ^n|| \to \infty$ وقتی $n \to \infty$. پس

$$\frac{\langle y - z_\circ, x - x_\circ^n\rangle}{||x_\circ^n|| - ||x||} \geq ||x_\circ^n||.$$

حال اگر حد بگیریم، چون حد $||x_\circ^n||$ به ∞ میل می‌کند، پس حد سمت راست ∞ می‌شود در حالی که حد سمت چپ صفر می‌شود. این تناقض نشان می‌دهد که مجموعه $C_{x,y}$ کراندار است.

اثبات بسته بودن:

برای اثبات بسته بودن دنباله $\{x_\circ^n\} \in C_{x,y}$ را که $x_\circ^n \to x_\circ$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $x_\circ \in C_{x,y}$.

چون $\{x_\circ^n\} \in C_{x,y}$، پس داریم

$$\langle y + x_\circ^n - z_\circ, x - x_\circ^n\rangle \geq \circ.$$