
به نام خداوند جان و خرد



بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

خانم مهناز فرودی قاسم آبادی به شماره دانشجویی ۸۵۵۶۶۲۰۰۳ رساله واحدی خود را با عنوان:
«تشخیص پذیری برخی از گروه‌های ساده ناآبلی متناهی به وسیله گراف اول» در تاریخ ۹۰/۶/۲۹ ارائه کردند.
اعضای هیأت داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تأیید کرده است و پذیرش آن را برای تکمیل
درجه دکتری پیشنهاد می‌کند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر علی رجایی	استادیار	
۳- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر محمدرضا درفشه	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر سیدعلیرضا اشرفی	استاد	
۵- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر بهروز خسروی	دانشیار	
۶- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر علی رجایی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله) ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر علی ایرانمنش، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر - و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر - از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.


ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب مهناز فرودی قاسم آبادی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مهناز فرودی قاسم آبادی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۴/۲۹



آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

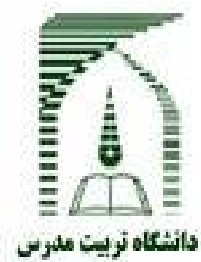
ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینچنانچه مهناز فرودی قاسم آبادی دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۵ مقطع دکتری دانشکده علوم ریاضی متعهد می‌شوم کلیه نکات مندرج در آئین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های علمی مستخرج از پایان‌نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین‌نامه فوق‌الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینچنانچه نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: مهناز فرودی قاسم آبادی
تاریخ: ۱۳۹۰/۴/۲۹



دانشکده علوم ریاضی

رساله دوره دکتری ریاضی محض (جبر)

عنوان

تشخیص پذیری برخی از گروه های ساده ناآبلی متناهی
به وسیله گراف اول

نام دانشجو

مهناز فرودی قاسم آبادی

استاد راهنما

پروفسور علی ایرانمنش

شهریور ماه ۱۳۹۰

پیشکش بہ

مادر و پدر عزیزم و خانواده مہربانم

و تقدیم بہ

اساتید، آموزگار ان و دوستان بزرگوارم.

با ژرف ترین سپاس ها:

- از پروردگار یکتا که به من فرصت زندگی کردن و آموختن را عطا کرد؛
- از اعضای خانواده ام که صبر، گذشت، پشتکار و حمایت های شان انگیزه های من برای ادامه راه بودند؛
- از استاد ارجمند و فرزانه ام، جناب آقای دکتر علی ایرانمنش، برای راهنمایی ها، حمایت ها و درس های بدیعی که از ایشان آموختم؛
- از دوست مهربان و با فراستم، سرکار خانم دکتر ندا آهنجیده، برای همراهی و تشویق خالصانه اینجانب در تمامی مراحل دوره تحصیلات تکمیلی؛
- از اساتید بزرگوار، آقایان دکتر محمدرضا درفشه، دکتر سیدعلیرضا اشرفی، دکتر بهروز خسروی و دکتر علی رجایی برای داوری این رساله و حضورشان در جلسه دفاع؛
- از همه آموزگاران، دوستان و عزیزانی که بر شادمانی، دانش و آگاهی ام افزودند و همواره مرا مرهون کمک های صادقانه شان ساختند.

مهناز فرودی قاسم آبادی

شهریورماه ۱۳۹۰

چکیده

پس از اینکه حاگی گروه های متناهی دارای گراف اول یکسان با گروه های ساده پراکنده را در سال ۲۰۰۳ معین کرد، امیر خسروی و بهروز خسروی مفهوم تشخیص پذیری گروه های متناهی به وسیله گراف اول را در سال ۲۰۰۷ معرفی کردند. گرچه این تشخیص پذیری برای تعداد زیادی از گروه های ساده متناهی با گراف اول ناهمبند ثابت شده است، اما $A_{15}(2)$ تنها گروه با گراف اول همبند می باشد که مسأله تشخیص پذیری آن به وسیله گراف اول تاکنون حل شده است.

در این رساله هدف اصلی ما بررسی مسأله شناسایی پذیری به وسیله گراف اول، برای برخی از گروه های ساده نآبلی متناهی با گراف اول همبند، می باشد. نخست، با شیوه ای جدید به نتایجی مرتبط با این تشخیص پذیری رسیده ایم. از جمله ثابت می کنیم که اگر $n \geq 5$ عددی فرد باشد، آنگاه گروه ساده $C_n(2)$ به وسیله گراف اولش شبه شناسایی پذیر می باشد. همچنین نشان می دهیم که اگر $n \geq 9$ عددی فرد باشد، آنگاه گروه های ساده $B_n(p)$ و $C_n(p)$ ، جایی که $p \in \{3, 5, 7\}$ ، به وسیله گراف اولشان ۲-شبه شناسایی پذیر هستند. علاوه بر این، ثابت می کنیم که گروه های ساده $D_n(3)$ و $D_m(3)$ جایی که $n \geq 5$ عددی فرد و $m \geq 8$ و $m \neq 10$ عددی زوج است، به وسیله گراف اولشان تشخیص پذیرند. ۲-شناسایی پذیری گروه های ساده $B_n(3)$ و $C_n(3)$ ، به وسیله گراف اولشان، جایی که $n \geq 5$ عددی فرد باشد، نیز به دست آمده است.

مفاهیم تشخیص پذیری به وسیله گراف ناجابه جایی که توسط عبداللهی و همکاران در سال ۲۰۰۶ معرفی شد، تشخیص پذیری به وسیله مجموعه مرتبه عناصر که توسط شی در سال ۱۹۸۴ بررسی شد و تشخیص پذیری به وسیله مجموعه مرتبه زیرگروه های آبلی ماکسیمال که توسط ونگ در سال ۲۰۰۰ معرفی شد، سه نمونه دیگر از مسائل تشخیص پذیری می باشند که در انتهای این رساله بررسی می کنیم. در حقیقت به عنوان کاربردی از نتایج مان، نتیجه می گیریم که کلیه گروه های بررسی شده به وسیله گراف ناجابه جایی شان تشخیص پذیرند. به علاوه ثابت می کنیم که گروه های بررسی شده روی میدان های سه عضوی به وسیله مجموعه مرتبه عناصرشان و همچنین به وسیله مجموعه مرتبه زیرگروه های آبلی ماکسیمال شان تشخیص پذیرند.

از این رساله مقاله های [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴]، مستخرج شده است.

کلمات کلیدی: گراف اول، گروه های ساده متناهی، تشخیص پذیری، شبه شناسایی پذیری، مجموعه مرتبه عناصر، مجموعه مرتبه زیرگروه های آبلی ماکسیمال، گراف ناجابه جایی.

فهرست مطالب

ت	فهرست نمادها
۱	پیش گفتار
۵	۱ پیش نیازها
۵	۱.۱ مقدمه
۵	۲.۱ مقدماتی از نظریه گروه ها
۱۰	۳.۱ گروه های ساده متناهی
۱۲	۱.۳.۱ گروه های کلاسیک ساده متناهی
۱۹	۴.۱ گراف اول
۲۱	۱.۴.۱ گراف اول گروه های متناهی از دیدگاه های متفاوت
۲۳	۵.۱ تشخیص پذیری گروه های متناهی
۲۳	۱.۵.۱ تشخیص پذیری به وسیله مجموعه مرتبه عناصر
۲۴	۲.۵.۱ تشخیص پذیری به وسیله مجموعه مؤلفه های مرتبه ای
۲۵	۳.۵.۱ دو تشخیص پذیری دیگر
۲۶	۴.۵.۱ تشخیص پذیری به وسیله گراف اول
۲۸	۶.۱ دو قضیه کاربردی در تشخیص پذیری ها
۳۱	۷.۱ گراف اول گروه های ساده متناهی
۳۶	۲ بررسی مسأله شناسایی پذیری گروه های ساده $B_n(p)$ و $C_n(p)$ به وسیله گراف اول
۳۶	۱.۲ مقدمه

۲۰۲	۲- شبه شناسایی پذیری و شبه شناسایی پذیری گروه های $B_n(p)$ و $C_n(p)$ به وسیله
۴۰	گراف اول
۴۰	۱.۲.۲ ۲- شبه شناسایی پذیری گروه های $B_n(p)$ و $C_n(p)$ به وسیله گراف اول
۶۲	۲.۲.۲ شبه شناسایی پذیری گروه $C_n(2)$ به وسیله گراف اول
۶۵	۳.۲ ۲- شناسایی پذیری گروه های $B_n(3)$ و $C_n(3)$ به وسیله گراف اول
۶۵	۱.۳.۲ نتایج اولیه
۶۸	۲.۳.۲ برهان قضیه اصلی
۷۳	۳ تشخیص پذیری گروه های ساده $D_n(3)$ و ${}^2D_n(3)$ به وسیله گراف اول
۷۳	۱.۳ مقدمه
۷۴	۲.۳ تشخیص پذیری گروه ساده ${}^2D_n(3)$ به وسیله گراف اول
۷۴	۱.۲.۳ نتایج اولیه
۷۶	۲.۲.۳ اثبات قضیه اصلی
۸۳	۳.۳ تشخیص پذیری گروه ساده $D_n(3)$ به وسیله گراف اول
۹۳	۴ کاربردها و مسائل باز
۹۳	۱.۴ مقدمه
۹۳	۲.۴ برخی تشخیص پذیری های گروه های ساده سیمپلکتیک و متعامد
۹۴	۱.۲.۴ نتایجی در مورد تشخیص پذیری به وسیله مجموعه مرتبه عناصر گروه
	۲.۲.۴ نتایجی در مورد تشخیص پذیری به وسیله مجموعه مرتبه زیرگروه های آبدی
۹۵	ماکسیمال
۹۷	۳.۲.۴ نتایجی در مورد تشخیص پذیری به وسیله گراف ناجابه جایی
۹۸	۳.۴ مسائل باز
۹۹	کتابنامه
۱۰۴	الف لیست گروه های ساده متناهی و مرتبه آنها
۱۰۴	الف.۱ گروه های ساده پراکنده

الف. ۲ گروه های ساده آبلی، متناوب و از نوع لی ۱۰۵

ب مرتبه گروه خودریختی های بیرونی برخی از گروه های ساده متناهی از نوع لی ۱۰۶

پ جدول های اعداد استقلال، ۲-استقلال و p -استقلال گروه های ساده ناآبلی متناهی و مجموعه

های وابسته به آنها ۱۰۷

۱.پ گروه های پراکنده ۱۰۷

۲.پ گروه های متناوب ۱۰۸

۳.پ عدد p -استقلال گروه های کلاسیک ساده متناهی ۱۰۸

۴.پ عدد p -استقلال گروه های ویژه ساده متناهی از نوع لی از مشخصه p ۱۰۹

۵.پ عدد ۲-استقلال گروه های کلاسیک ساده متناهی از مشخصه p ($p \neq 2$) ۱۱۰

۶.پ عدد ۲-استقلال گروه های ویژه ساده متناهی از مشخصه p ($p \neq 2$) ۱۱۰

۷.پ عدد استقلال گروه های کلاسیک ساده متناهی ۱۱۱

۸.پ عدد استقلال گروه های ویژه ساده متناهی از نوع لی ۱۱۲

ت تعداد مولفه های همبندی گروه های ساده متناهی ناآبلی ۱۱۳

۱.ت گروه های ساده متناهی با گراف اول همبند ۱۱۳

۲.ت گروه های ساده متناهی با گراف اول دو مؤلفه ای ۱۱۴

۳.ت گروه های ساده متناهی با گراف اول سه مؤلفه ای ۱۱۵

۴.ت گروه های ساده متناهی با گراف اول چهار مؤلفه ای ۱۱۵

۵.ت ۱۱۵

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۱۶

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۱۹

فهرست نمادها

$\gcd(m, n)$	بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک m و n
$\text{Aut}(G)$	گروه خودریختی های G
$\text{Inn}(G)$	گروه خودریختی های داخلی G
$\text{Out}(G)$	گروه خودریختی های بیرونی G
i_g	خودریختی داخلی القا شده با g
$C_G(x)$	مرکز ساز x در G
$H \hookrightarrow G$	H با زیرگروهی از G یکرخت است
$H \triangleleft G$	H زیرگروه نرمال G است
$C_G(H)$	مرکزساز H در G
$N_G(H)$	نرمال ساز H در G
$N \times H$	حاصل ضرب نیم مستقیم گروه های N و H با زیر گروه نرمال N
\mathbf{Z}_n	گروه دوری از مرتبه n
$GL(V)$	گروه خطی عام روی فضای برداری V
$GL(n, F)$	گروه خطی عام از درجه n روی میدان F
$[x, y]$	تعویض گر x و y (یعنی $x^{-1}y^{-1}xy$)
$[G, H]$	زیرگروه تعویض گر متناظر با زیر گروه های H و G
G'	زیرگروه مشتق G
$Z(G)$	مرکز گروه G
I_n	ماتریس همانی $n \times n$
$\text{Char}F$	مشخصه میدان F
F^\times	گروه ضربی میدان F

$\text{GF}(q)$	میدان گالوای q عضوی
$\text{GF}(q)^n$	$\overbrace{\text{GF}(q) \times \cdots \times \text{GF}(q)}^n$
A^t	ترانهادۀ ماتریس A
$M_n(q)$	مجموعۀ تمام ماتریس های $n \times n$ با درایه های در میدان $\text{GF}(q)$
$\text{bd}(A_1, \dots, A_n)$	ماتریس قطری با بلوک های A_1, \dots, A_n روی قطر اصلی
$\langle X \rangle$	زیرگروه تولید شده با مجموعۀ X
$ G $	مرتبه گروه متناهی G
$O(g)$	مرتبه g
$\text{Syl}_p(G)$	مجموعه همه p -زیرگروه های سیلوی گروه متناهی G
S_n	گروه متقارن روی n حرف
A_n	گروه متناوب روی n حرف

پیش‌گفتار

بررسی مسأله تشخیص پذیری، یکی از مسائل مهم تحقیقاتی در نظریه گروه‌های متناهی می‌باشد و تاکنون تشخیص پذیری‌های مختلفی بر اساس مفاهیم موجود در این شاخه از ریاضیات معرفی شده‌اند. یکی از این تشخیص‌پذیری‌ها، تشخیص پذیری گروه‌های متناهی به وسیله گراف اول می‌باشد. گراف اول یک گروه متناهی، گرافی است که رأس‌های آن شمارنده‌های اول مرتبه گروه می‌باشند و بین دو رأس متمایز p و q یالی موجود است هرگاه گروه موردنظر عضوی از مرتبه pq داشته باشد.

پس از اینکه حاگی^۱ در سال ۲۰۰۳ به بررسی گروه‌های متناهی پرداخت که گراف اول آنها با گراف اول گروه‌های ساده پراکنده یکسان بودند، امیر خسروی و بهروز خسروی در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۷ چاپ شد، مفهوم تشخیص پذیری به وسیله گراف اول را به صورت زیر معرفی نمودند:

«گروه متناهی G را به وسیله گراف اولش تشخیص پذیر گوئیم هرگاه برای هر گروه متناهی

مانند H که گراف اولش با گراف اول گروه G یکسان است، نتیجه بگیریم گروه‌های G و H

یکریخت هستند.»

معمولاً با تعریف یک تشخیص پذیری جدید، در صورت امکان، آن را در مورد گروه‌های ساده متناهی بررسی می‌کنند. یکی از مراحل اصلی برای اثبات تشخیص پذیری گروه ساده متناهی P به وسیله گراف اولش، اثبات شبه‌شناسایی پذیری آن گروه به وسیله گراف اولش می‌باشد. به این معنا که اگر گروه متناهی G دارای گراف اول یکسان با گراف اول گروه P باشد، آنگاه بتوان نتیجه گرفت که گروه G دارای عامل ترکیبی ناآبلی منحصر به فرد یکریخت با گروه P می‌باشد.

امیر خسروی و بهروز خسروی ضمن تعریف مسأله تشخیص پذیری گروه‌های متناهی به وسیله گراف

^۱M. Hagie

اول، در همان مقاله، نشان دادند که گروه ساده ${}^2G_2(3^{2n+1})$ برای $n \geq 1$ ، به وسیله گراف اولش شبه شناسایی پذیر می باشد. پس از آن بهروز خسروی و همکاران شبه شناسایی پذیری به وسیله گراف اول را در مورد گروه های مختلفی با گراف اول بیش از دو مؤلفه اثبات نمودند. در این میان زاوارنیتسین ^۲ با انتشار مقاله ای با تکمیل اثبات تشخیص پذیری گروه ${}^2G_2(3^{2n+1})$ که $n \geq 1$ ، به وسیله گراف اولش، اولین خانواده نامتناهی از گروه هایی را یافت که به وسیله گراف اولشان تشخیص پذیرند. او در همین مقاله برای اولین بار موفق به اثبات این تشخیص پذیری برای گروه هایی با گراف اول دو مؤلفه ای (گروه ساده $G_2(7)$ و شش مؤلفه ای (گروه ساده J_4) شد. همچنین او در مقاله مذکور، با اشاره به اینکه اثبات تشخیص پذیری به وسیله گراف اول برای گروه هایی با گراف اول چهار یا پنج مؤلفه ای، کار سختی نمی باشد، سؤال زیر را مطرح می کند:

سؤال. آیا گروه متناهی با گراف اول همبند موجود است که به وسیله گراف اولش تشخیص

پذیر باشد؟

با توجه به این سؤال، اهمیت توجه به گروه های ساده متناهی با گراف اول همبند دو چندان شد. با هدف یافتن پاسخ مثبتی برای این سؤال، بهروز خسروی و همکاران نشان دادند که گروه ساده $A_{15}(2)$ به وسیله گراف اولش شبه شناسایی پذیر می باشد. همچنین با همین روش شبه شناسایی پذیری گروه های $A_8(2)$ و $A_4(2)$ را نیز انجام دادند.

از آنجا که هنوز جواب مثبتی برای سؤال زاوارنیتسین پیدا نشده بود و گروه هایی که مورد مطالعه قرار گرفته بودند بسیار محدود بودند، ما نیز هدف اصلی مان را در این رساله مطالعه تشخیص پذیری به وسیله گراف اول در مورد گروه های ساده متناهی با گراف اول همبند قرار دادیم و در این راه ابتدا توانستیم با روشی جدید که محدودیتی برای تعداد مؤلفه های همبندی گروه ندارد، نشان دهیم گروه ساده $C_n(2)$ که $n \geq 5$ عددی فرد باشد، به وسیله گراف اولش شبه شناسایی پذیر است. می دانیم که هرگاه n عدد اول فردی باشد، آنگاه گراف اول گروه $C_n(2)$ دو مؤلفه ای و هرگاه n عدد فرد غیراولی باشد، آنگاه گراف

^۲A. V. Zavarnitsine

اول گروه موردنظر همبند است. از آنجایی که تا آن زمان بجز گروه $G_2(\mathbb{V})$ و چند گروه پراکنده دیگر، گروه دیگری با گراف اول دو مؤلفه ای یافت نشده بود که به وسیله گراف اولش شبه شناسایی پذیر باشد، موفق به یافتن اولین خانواده نامتناهی از این نوع گروه ها شدیم [۱۰]. چون گراف اول گروه های $B_n(q)$ و $C_n(q)$ یکسان می باشند، در ادامه راه موفق شدیم با تکمیل شیوه های استفاده شده در مورد گروه $C_n(2)$ به نتایجی در مورد گروه های ذکر شده نیز برسیم و در این راه ناگزیر به ارائه تعریف ۲- شبه شناسایی پذیری به وسیله گراف اول شدیم. به این ترتیب توانستیم ثابت کنیم که اگر $n \geq 9$ عددی فرد باشد، آنگاه گروه های ساده $B_n(3)$ ، $C_n(3)$ ، $B_n(5)$ ، $C_n(5)$ ، $B_n(7)$ ، $C_n(7)$ به وسیله گراف اول شان ۲- شبه شناسایی پذیر می باشند [۱۱]. در دو بخش از فصل دوم این رساله به تفصیل جزئیات اثبات این نتایج آورده می شود.

در سال ۲۰۱۰ زاوارنیتسین با تکمیل اثبات تشخیص پذیری گروه $A_{15}(2)$ ، پاسخ مثبتی به سؤال خود داد و در همین سال بهروز خسروی و زهرا مؤمن با اثبات اینکه گروه های $B_p(3)$ و $C_p(3)$ جایی که $p \geq 5$ عدد اول باشد، تنها گروه های غیریکریخت هستند که دارای گراف اول یکسان با گراف اول گروه $B_p(3)$ می باشند، موفق شدند مسأله شناسایی پذیری به وسیله گراف اول را برای خانواده نامتناهی از گروه هایی با گراف اول دو مؤلفه ای به طور کامل انجام دهند. ما نیز توانستیم آن راه حل ها را برای حالتی که n عددی اول نباشد، تکمیل نماییم و به این ترتیب اولین خانواده گروه های ساده متناهی با گراف اول همبند را یافتیم که مسأله شناسایی پذیری آنها به وسیله گراف اول شان حل شده است. [۱۳] اثبات های مربوط به این قسمت نیز در فصل دوم این رساله ارائه می شود. پس از آن اثبات تشخیص پذیری گروه های ساده $D_n(3)$ و $D_m(3)$ جایی که $n \geq 5$ عددی فرد و $m \geq 8$ و $m \neq 10$ عددی زوج می باشند، را به وسیله گراف اول شان انجام دادیم [۱۲] و [۱۴]. از آنجا که در میان این دو دسته گروه، گروه هایی موجودند که گراف اول آنها همبند می باشد، موفق شدیم که دو خانواده نامتناهی از گروه های ساده را بررسی کنیم که پاسخ مثبتی به سؤال زاوارنیتسین می باشند. مباحث مربوط به این نتایج در فصل سوم این رساله مطرح می شوند.

به عنوان کاربردی از نتایج حاصله از فصل های دوم و سوم رساله، فصل چهارم را به بررسی تشخیص پذیری به وسیله مجموعه مرتبه عناصر، تشخیص پذیری به مجموعه مرتبه زیرگروه های آبلی ماکسیمال و تشخیص پذیری به وسیله گراف ناجابه جایی گروه های موردنظر اختصاص می دهیم. همچنین در بخش نهایی، برخی از مسائلی که در طول کار روی موضوع این رساله پیش روی مان قرار گرفت و تاکنون موفق به پاسخگویی به آنها نشده ایم را بیان می کنیم.

در طول این دوره، اینجانب فرصت استفاده از دوره تحقیقاتی کوتاه مدت را در کشور آلمان داشتم. این دوره که زیر نظر پروفسور بتینا آیک^۳ در دانشگاه صنعتی برانشوایگ سپری شد، فرصتی فراهم آورد که ضمن آشنایی با مفاهیم جدیدی در نظریه گروه ها، دانش خود را در زمینه استفاده از نرم افزار GAP ارتقا بخشیم. به همین منظور از دانشگاه تربیت مدرس که این سفر را با حمایت های مالی و اداری برای اینجانب فراهم نمود، کمال تشکر را دارم.

متذکر می شویم که سبک ارجاع به مطالب مندرج در متن رساله، به شیوه نگارش پارسی است. به عنوان نمونه برای دیدن "گزاره ۵.۲.۴"، باید به بخش دوم از فصل ۴ مراجعه شود. اما شیوه ارجاع به مراجع لاتین، به همان سبک لاتین است. مثلاً برای دیدن [۳۰، ۴.۱.۲۰] باید به بخش اول از فصل چهارم از مرجع [۳۰]، مراجعه کرد.

در سراسر این رساله، هر یک از تعاریف و گزاره های شناخته شده، همراه یک مرجع ارائه شده اند و بقیه که مرجعی برای آن ها ذکر نشده است، اصیل محسوب می شوند. از این رساله مقاله های [۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۱۲] مستخرج شده است.

^۳B. Eick

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

در بخش نخست این فصل به بیان برخی از تعاریف و قضایایی از نظریه گروه‌ها می‌پردازیم که در بخش‌های دیگر رساله به آنها نیاز خواهیم داشت. از آنجا که اساس این رساله کار با برخی از گروه‌های ساده متناهی می‌باشد، در ادامه تاریخچه بسیار مختصری از قضیه رده بندی گروه‌های ساده متناهی را بیان می‌کنیم و سپس با ساختار گروه‌هایی که در فصل‌های دیگر رساله به آنها نیاز خواهیم داشت، آشنا می‌شویم. در انتها، بخش‌هایی را به معرفی مفاهیم اصلی مورد بررسی در طول این رساله و بیان قضایای مربوط به آنها اختصاص می‌دهیم.

۲.۱ مقدماتی از نظریه گروه‌ها

این بخش را به بیان تعاریف و لم‌های پراکنده‌ای از نظریه گروه‌ها اختصاص داده ایم که در این رساله به آنها نیاز خواهیم داشت.

تعریف ۱.۲.۱. [۲۸، صفحه ۹] گروه نابدیهی G را ساده نامیم هرگاه 1 و G تنها زیرگروه های نرمال آن باشند.

تعریف ۲.۲.۱. [۶۱، صفحه ۹] فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه H از G را یک زیرگروه مشخص G نامیم در صورتی که به ازای هر خودریختی G مانند τ ، داشته باشیم $\tau(H)$ زیرگروهی از گروه H باشد که در آن $\tau(H) = \{\tau(h) \mid h \in H\}$. هرگاه H زیر گروه مشخص G باشد می نویسیم $H \text{ ch } G$.

تعریف ۳.۲.۱. [۶۱، صفحه ۱۰۶] گروه نابدیهی G را مشخصاً ساده گوئیم در صورتی که زیرگروه های مشخص آن 1 و G باشند.

لم ۴.۲.۱. [۶۱، قضیه ۵.۲.۵] فرض کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. در این صورت G مشخصاً ساده است اگر و تنها اگر G به صورت حاصل ضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروه های ساده خود که دو به دو یکریخت هستند، تجزیه شود.

لم ۵.۲.۱. [۶۱، قضیه ۶.۳.۲] (قضیه نرمال ساز-مرکز ساز) فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. در این صورت

$$1. \quad C_G(H) \triangleleft N_G(H),$$

$$2. \quad N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow \text{Aut}(H).$$

لم ۶.۲.۱. [۶۱، قضیه ۱۲.۱.۴] (استدلال فراتینی^۱) فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H \triangleleft G$. در این صورت اگر $P \in \text{Syl}_p(H)$ ، آنگاه $G = N_G(P)H$.

تعریف ۷.۲.۱. [۱۵، صفحه ۳۲] فرض کنیم π یک مجموعه از اعداد اول و G یک گروه متناهی باشد. بزرگ ترین زیرگروه نرمال گروه G که مرتبه آن فقط توسط اعداد اول در مجموعه π عاد شود را با نماد $O_\pi(G)$ نشان می دهیم.

^۱Frattini argument

تعریف ۸.۲.۱. [۶۱، صفحات ۲۰۵، ۲۰۹] فرض کنیم G یک گروه باشد، یک سری زیرنرمال G ، زنجیری است متناهی از زیرگروه های G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، $G_{i-1} \triangleleft G_i$. فرض کنیم G یک گروه و سری

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

یک سری زیر نرمال G باشد. این سری را یک **سری ترکیبی** G می نامیم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، G_i/G_{i-1} یک گروه ساده باشد. در سری ترکیبی فوق هر گروه خارج قسمتی G_i/G_{i-1} را یک **عامل ترکیبی** می نامند.

تعریف ۹.۲.۱. [۳۹، صفحه ۱۶۷] فرض کنیم N زیرگروهی (نه لزوماً نرمال) از گروه G باشد. در این صورت زیر گروه H از G را یک **متمم** N در G گوئیم، هرگاه داشته باشیم $N \cap H = 1$ و $HN = G$. همچنین گروه G را **حاصل ضرب نیم مستقیم** N به وسیله H گوئیم در صورتی که $N \triangleleft G$ و N دارای یک متمم $H_1 \cong H$ باشد. در این صورت می نویسیم $G = N \rtimes H$ و همچنین می گوئیم G روی N شکافته می شود.

تعریف ۱۰.۲.۱. [۳۸، صفحه ۲۰۵] فرض کنیم H و K دو گروه باشند. گوئیم H روی K (به عنوان یک گروه) عمل می کند هر گاه برای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ عضو یکتایی مانند $k^h \in K$ موجود باشد که برای هر $k, k_1, k_2 \in K$ و هر $h, h_1, h_2 \in H$ سه شرط زیر برقرار باشد:

$$1. \quad k^1 = k$$

$$2. \quad (k^{h_1})^{h_2} = k^{h_1 h_2}$$

$$3. \quad (k_1 k_2)^h = (k_1)^h (k_2)^h$$