دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
گرایش جبر

مشخصه سازی برخی گروه‌های ساده توسط گراف‌های اول و ناجابه‌جایی

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر محمدی

پژوهشگر:

فاطمه نعمت اللهی

دی ماه ۱۳۹۰

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم فاطمه نعمت الهی

تحت عنوان:

مشخصه سازی برخی گروههای ساده توسط گرافهای اول و ناجابه جایی

در تاریخ ۹۰/۱۰/۱۴ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......خوب...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر محمد جواد عطایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه..................

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

چکیده

برای گروه متناهی G و زیر مجموعه X از G، گراف جابه‌جایی روی X به صورت $\Delta(G)$ نشان داده می‌شود که X مجموعه رئوس آن است و دو رأس x و $y\epsilon X$ به وسیله یک یال به هم مرتبط می‌شوند، هرگاه جابجاگر x و y همانی باشد.گراف متمم از گراف جابه‌جایی $\Delta(G)$ جایی که $X := G\backslash Z(G)$ با $\nabla(G)$ نشان داده می‌شود $\nabla(G)$. گراف ناجابه‌جایی از G خوانده می‌شود. در این گراف مجموعه رئوس $V(G) = G\backslash Z(G)$ است و $x, y\epsilon V(G)$ با یک یال به هم مرتبط هستند، اگر و تنها اگر $[x, y] \neq 1$. (که با $x\sim y$ نشان داده می‌شود).

در این پایان نامه ابتدا برخی از خصوصیات جالب گراف ناجابه‌جایی را بررسی می‌کنیم و سپس به بررسی دو حدس زیر می‌پردازیم.

۱. فرض کنید G و H گروه‌های متناهی باشند. اگر $\nabla(G) \cong \nabla(\mathrm{H})$، آنگاه $|G| = |H|$.

۲. فرض کنید G یک گروه ساده غیر آبلی متناهی باشد و H گروهی باشد که $\nabla(G) \cong \nabla(\mathrm{H})$، *آنگاه* $G \cong H$.

کلید واژه:گروه، گراف ناجابه‌جایی، گراف اول ، گراف غیر همبند

فهرست مطالب

مقدمه

به طورکلی رابطه معنی‌داری بین نظریه گروه‌ها و نظریه گراف‌ها وجود دارد. در بسیاری از موارد خیلی از خصوصیات یک گراف قابل تعمیم به یک گروه است و به عکس. به عنوان مثال گرونبرگ[۱] و کگل[۲] گراف اولیه $\Gamma(G)$، که وابسته به گروه متناهی G است، را معرفی کردند و هم‌چنین مفهوم گراف حل‌پذیر $\Gamma_S(G)$ برای گروه متناهی G اخیراً توسط آبه[۳] و ایوری[۴] تعریف شده است.

یکی از گراف‌هایی که توجه بسیاری از نویسندگان را جلب کرده، گراف جابه‌جایی متناظر با گروه متناهی است. برای یک گروه متناهی G و زیر مجموعه X از G، گراف جابه‌جایی روی X به صورت $\Delta(G)$ نشان داده می‌شود که X مجموعه رئوس آن است با دو رأس $y \in X$ و x که به وسیله یک یال به هم مرتبط می‌شوند، هرگاه جابجاگر x و y همانی باشد. ($[x,y] = ۱$ یعنی x و y با هم جابجا می‌شوند). بسیاری از نویسندگان $\Delta(G)$ را به ازای انتخاب‌های مختلفی از G و X مطالعه کرده‌اند. سگف[۵] وسیتز[۶] گراف جابه‌جایی را به صورت $\Delta(G)$ به کار برده‌اند که G گروه ساده غیرآبلی است و $X = G \setminus \{1\}$.

در این قسمت گراف متمم از گراف جابه‌جایی $\Delta(G)$ جایی که $X := G \setminus Z(G)$ را بررسی کرده و برای راحتی آن‌را با $\nabla(G)$ نشان می‌دهیم، که گراف نا جابه‌جایی از G خوانده می‌شود.

در این گراف مجموعه رئوس برابر با $V(G) = G \setminus Z(G)$ است و $x, y \in V(G)$ با یک یال به هم مرتبط هستند، اگر و تنها اگر $[x,y] = ۱$ (که با $x \sim y$ نشان داده می‌شود).

واضح است که G آبلی است اگر و تنها اگر $V(G) = \emptyset$. بنابراین در این جا G یک گروه غیرآبلی متناهی فرض شده است.

در سال ۲۰۰۵ مقدمفر، شی[۷]، زو[۸]، زکایی بعضی از خصوصیات جالب گراف ناجابه‌جایی $\nabla(G)$ را بدست آوردند.

در سال ۲۰۰۶ عبدالهی، اکبری و میمنی حدسی را مطرح کردند که با نام AAM شناخته شده و به این صورت بیان می‌شود: اگر M یک گروه ساده غیر آبلی متناهی باشد و G گروهی باشد که $\nabla(G) \cong \nabla(\mathrm{M})$، آنگاه $G \cong M$.

در سال ۲۰۰۷ ونگ[۹] وشی این حدس را برای $M = L_۲(q)$ و گروه متناهی G ثابت کردند.

در سال ۲۰۰۹ زنگ[۱۰] و شی مثالی دیگری را ارائه کردند که نشان داد، حدس AAM هم‌چنین برای گروه‌های ساده با گراف‌های اولیه همبند نیز درست است. آنها در واقع ثابت کردند که اگر G یک گروه متناهی باشد به طوری که $\nabla(G) \cong \nabla(L_۴(۸))$، آنگاه $G \cong L_۴(۸)$.

در پایان خسروی و خاتمی یک مشخصه سازی جدید از $PGL(۲,p)$ توسط گراف ناجابه‌جایی آن را معرفی کردند.

این پایان نامه شامل دو فصل است. در فصل اول که شامل سه بخش است، برخی مفاهیم مورد نیاز در نظریه گراف و هم‌چنین تعاریف و قضایای مورد نیاز در نظریه گروه را بیان می‌کنیم.

---

[۱] Gruenberg
[۲] Kegel
[۳] Abe
[۴] Iiyori
[۵] Segev
[۶] Seitz
[۷] Shi
[۸] Zhou
[۹] Wang
[۱۰] Zhang

فصل دوم مشتمل بر شش بخش است. در بخش اول تعاریف مشترک فصل، در بخش دوم بعضی از خصوصیات جالب گراف ناجابه‌جایی $\nabla(G)$، در بخش سوم حدس AAM برای $M = L_2(q)$ و گروه متناهی G، در بخش چهارم ، حدس AAM برای گروه‌های ساده با گراف‌های اولیه همبند و در بخش پنجم حدس AAM را برای $G \cong L_4(8)$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سرانجام در بخش ششم یک مشخصه‌سازی جدید از $PGL(2,p)$ توسط گراف ناجابه‌جایی آن را معرفی می‌کنیم.

فصل اول

۱-۱- تعاریف و مفاهیم مقدماتی گروه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی گروه وگراف که در اثبات قضایای فصل بعد به کار می‌روند، بیان شده است. خواننده می‌تواند اثبات اکثر این قضایا را در کتاب‌های نظریه‌ی گروه‌ها پیدا کند. بنابراین از آوردن اثبات برخی از آنها خودداری می‌کنیم و به اثبات قضایایی که عمومیت کمتری دارند، می‌پردازیم.

تعریف ۱-۱-۱.فرض کنید G یک گروه باشد. مرکز ساز یک عضو مانند $x\epsilon G$ که آن را با $C_G(x)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_G(x) = \{y\epsilon G | xy = yx\}$$

که زیر گروهی از گروه G است.

همچنین برای یک زیر مجموعه ناتهی X از G، مرکزساز X در G عبارت است از:

$$C_G(X) = \{y\epsilon G | xy = yx, \forall x\epsilon X\}$$

تعریف ۱-۱-۲. در تعریف ۱-۱-۱ اگر $X = G$، آن گاه $C_G(G)$ را مرکز گروه G می‌گوییم و آن را با $Z(G)$ نشان می‌دهیم، یعنی مرکز گروه G عبارت است از:

$$C_G(x) = \{y\epsilon G | \ \forall x\epsilon G : xy = yx\}$$

که یک زیر گروه نرمال از G است.

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنید G یک گروه باشد. جابه‌جاگر یک جفت مرتب $g_۱$ و $g_۲$ از عناصر G که آن را با $[g_۱, g_۲]$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$[g_۱, g_۲] = g_۱{}^{-۱} g_۲{}^{-۱} g_۱ g_۲ \epsilon G$$

بنابراین طبق تعریف داریم:

الف) $[g_۱, g_۲] = [g_۲, g_۱]^{-۱}$

ب) $[g_۱, g_۲] = ۱$ اگرو تنها اگر $g_۱$ و $g_۲$ با یکدیگر جابه‌جا شوند، یعنی $g_۱ g_۲ = g_۲ g_۱$.

تعریف۱-۱-٤. گروه متناهی G را یک گروه فروبینوس گوییم، اگر دارای یک زیر گروه سره ی غیر بدیهی مانند H باشد به طوری که:

$$\forall x\epsilon G | H \quad : \quad H \cap H^x = ۱$$

گروه H را یک مکمل فروبینوس برای گروه G گوییم.

تعریف۱-۱-۵. فرض کنید G یک گروه و P یک p- زیرگروه سیلو از G باشد. اگر زیر گروه K از G وجود داشته باشد به طوری که $G = PK$ و $P \cap K = ۱$. در این صورت K را یک p - مکمل برای G گویند.

تعریف۱-۱-٦ .فرض کنید G یک گروه باشد. P یک p- زیرگروه سیلو از G باشد و P دارای یک p –مکمل مانند K باشد. اگر $K \trianglelefteq G$ ، آنگاه G را p- پوچتوان گویند.

تعریف۱-۱-۷ . فرض کنید G یک گروه باشد.زیرگروه آبلی A از گروه G خود مرکزساز نامیده می‌شود، اگر $\mathrm{C_G(A) = A}$.

تعریف۱-۱-۸ . اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد، آنگاه مجموعه کلیه‌ی تبدیلات خطی وارون‌پذیر V را با $GL(V,F)$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه با قانون ترکیب توابع، دارای ساختار گروه است و آن را گروه خطی عام می‌نامیم. در حالتی که $dimV = n$ و $F = GF(q)$ میدان متناهی با q عضو می‌باشد.

قرار می‌دهیم $GL(V,F) = GL(n,q)$. مجموعه کلیه‌ی تبدیلات خطی $GL(n,q)$ با دترمینان ۱ را گروه خطی خاص نامیده و آن را با $SL(n,q)$ نمایش می‌دهیم.

همچنین گروه‌های خطی تصویری عام و خطی تصویری خاص به ترتیب عبارتند از

$$PSL(n,q) = \frac{sL(n,q)}{\mathrm{Z}(sL(n,q))} \qquad PGL(n,q) = \frac{GL(n,q)}{\mathrm{Z}(GL(n,q))} .$$

قضیه ۱-۱-۹. فرض کنید $G = GL(n,q)$ ، $H = SL(n,q)$ ، $\mathrm{K} = PGL(n,q)$ ، $L = PSL(n,q)$. در این صورت داریم:

الف) $|G| = (q^n - ۱)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-۱})$

ب) $|\mathrm{H}| = |G|/(\mathrm{q} - ۱) = |\mathrm{K}|$

ج) $|L| = |G|/(\mathrm{q} - ۱)\mathrm{d}$ جایی که $d = gcd(n, q - ۱)$

اثبات. ر. ک. [۱۷، قضیه۷ ۰ ۲ ۰ ۳]

تعریف۱-۱-۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد.تبدیل خطی T را یک ایزومتری یا (همان متری) روی V می‌نامیم اگر

$$\forall u,v \in V \ : \quad f\big(T(u),T(v)\big) = f(u,v)$$

جایی که $f: v \times v \to F$ یک نگاشت است به طوری که برای هر $a,b \in F$ و هر $u,v,w \in V$ داشته باشیم:

(الف) $\quad f(au,bv,w) = af(u,w) + bf(v,w)$

$$f(u, v+w) = f(u,v) + f(u,w) \quad \text{(ب)}$$

$$f(u,v) = \big(f(v,u)\big)\tau \quad \text{(ج)}$$

جایی که τ یک خود ریختی از میدان F است.

گروه ایزومتری‌های فضای هرمیتی V با بعد n روی میدان $GF(q)$ را گروه یکانی عام می‌نامیم و آن‌را با $GU(n,q)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه کلیه‌ی ایزومتری‌های $GU(n,q)$ با دترمینان ۱ را گروه یکانی خاص نامیده و آن‌را با $SU(n,q)$ نمایش می‌دهیم.

همچنین گروه‌های یکانی تصویری عام و یکانی تصویری خاص به ترتیب عبارتند از:

$$PSU(n,q) = \frac{SU(n,q)}{Z(SU(n,q))} \quad \text{و} \quad PGU(n,q) = \frac{GU(n,q)}{Z(GU(n,q))}.$$

قضیه ۱-۱-۱۱. فرض کنید $G = SU(n,q^۲)$ و $H = PSU(n,q^۲)$، در این صورت داریم:

$$|G| = q^{\frac{n!}{(n-۱)!۲!}} \prod_{i=۱}^{n} (q^i - (-۱)^i) \qquad (۱)$$

$$|H| = \frac{۱}{(n, q+۱)} |G| \qquad (۲)$$

اثبات. ر.ک. به [۲۵، صفحه ۱۲۹]

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنید A یک ماتریس مربعی از مرتبه n با درایه‌های حقیقی a_{ij} باشد. ماتریس A پاد متقارن است، اگر $a_{ij} = -a_{ji}$ برای $۱ \le j \le n$, $۱ \le i \le n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} = ۰ & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{۱n} & \cdots & a_{nn=۰} \end{pmatrix}$$

از آنجاییکه $a_{ii} = -a_{ii}$، بنابراین درایه های روی قطر اصلی صفرند.

تعریف ۱-۱-۱۳. فرض کنیم فضای برداری V دارای یک ضرب اسکالر خطی غیر منفرد باشد که هر جفت x و y از عناصر V را به عنصر (x,y) وابسته می‌کند. فرض‌می‌کنیم که این ضرب اسکالر پاد متقارن باشد، به نحوی که برای تمام x و y داشته باشیم:

$$(x,y) = -(y,x)$$

فضایی که دارای ضرب اسکالری از این نوع باشد، فضای سیمپلکتیک نامیده می‌شود.

تبدیلات خطی غیر منفرد از V به خودش را که ایزومتری هستند، (یعنی به ازای $x, y \epsilon V$ در شرط $(Tx, Ty) = (x,y)$ صدق کنند) در نظر بگیرید. ایزومتری‌ها یک زیر گروه از $GL(n,q)$ را

تشکیل می‌دهند که گروه سیمپلکتیک $SP_n(q)$ نامیده می‌شود. در حقیقت ضرب اسکالر پاد متقارن غیر منفرد را می‌توان با یک پایه مناسب به صورت ماتریس زیر نشان داد:

$$A=\begin{pmatrix} \cdot & ۱ & & \cdots & & \cdot \\ -۱ & \cdot & & & & \\ \vdots & & \cdot & ۱ & \ddots & \vdots \\ & & -۱ & \cdot & & \\ & & & & \cdot & ۱ \\ \cdot & & & \cdots & -۱ & \cdot \end{pmatrix}$$

تبدیل سیمپلکتیک با ماتریس T که در رابطه $TAT' = A$ صدق می‌کند، بیان می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که یک تبدیل سیمپلکتیک الزاما دترمینان ۱ دارد. مرکز Z از $SP_n(q)$ از تبدیلات $Tx = \gamma x$ تشکیل شده است که $\gamma = \pm ۱$. گروه خارج قسمتی $SP_n(q)/Z$ را گروه تصویری سیمپلکتیک $PSP_n(q)$ می‌نامند. $PSP_n(q)$ برای $۲m > ۲$ ساده است، آن‌را با $S_{۲m}(q)$ نمایش می‌دهیم و داریم $S_۲(q) = L_۲(q)$.

اگر A، B، C و D ماتریس‌های $m \times m$ باشند $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ به گروه سیمپلکتیک تعلق دارد، اگر وتنهااگر

$$A'C\text{-}C'B = ۰ \quad , \quad A'D\text{-}C'B = I \quad , \quad B'D\text{-}D'B = ۰$$

جایی که M' ماتریس ترانهاده M است.

مرتبه گروه‌های زیر به شکل زیر داده می‌شود:

$$|SP_{۲m}(q)| = N \quad , \quad |PSP_{۲m}(q)| = |S_{۲m}(q)| = N/d \;,$$

$$d = (q-۱,۲)$$

$$N = q^{m^۲}(q^{۲m}-۱)(q^{۲m}-۱)(q^{۲m-۲}-۱)\ldots(q^۲-۱)$$

تعریف ۱-۱-۱۴. یک فرم دوتایی روی یک فضای برداری V روی یک میدان K، یک تابع $Q{:}V \to K$ است که:

برای هر $v,u \epsilon V$ و $\alpha \epsilon K$

۱) $Q(\alpha u) = \alpha^۲ Q(u)$

۲) $Q(u+v) - Q(u) - Q(v) = g(u,v)$

که g یک فرم دوخطی روی V است.

تعریف۱-۱-۱۵. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد n روی یک میدان K با مشخصه غیر از ۲ باشد. فرض کنیم یک ضرب اسکالر دو خطی غیر منفرد به نحوی روی V تعریف شده باشد که برای تمام $x, y \epsilon V$ داشته باشیم:

$$(x, y) = (y, x)$$

این ضرب اسکالر یک فرم دوتایی f را به شکل زیر تعیین می‌کند:

$$f(x) = (x, x)$$

در مقابل، فرم دوتایی، ضرب اسکالر را از طریق رابطه زیر تعیین می‌کند:

$$(x, y) = \frac{۱}{۲}\big(f(x, y) - f(x) - f(y)\big)$$

گروه متعامد عمومی $GO_n(q, F)$ زیرگروهی از تمام اعضای $L_n(q)$ است که فرم دوتایی غیر منفرد را ثابت نگه دارد. دترمینان چنین ماتریس‌هایی ± ۱ خواهد بود. گروه متعامد تصویری خاص $PSO_n(q, F)$ گروهی از تمام عناصر با دترمینان ۱ است. مرکز Z از $GO_n(q, F)$ تمام تبدیلات $T\alpha = \gamma\alpha$ تشکیل شده است که $\gamma = \pm ۱$ و $n > ۲$.

گروه متعامد تصویری خاص $PSO_n(q, F) = GO_n(q, F)/Z$ و گروه متعامد تصویری عمومی $PGO_n(q, F) = SO_n(q, F)/Z \cap SO_n(q, F)$ می‌باشد.

فرض کنید گروه جابجاگر $GO_n(q, F)$ را با $\Omega_n(k, F)$ نشان دهیم که یک زیر گروه از $SO_n(q, F)$ است. گروه تصویری زیر را برای آن تعریف می‌کنیم:

$$P\Omega_n(q, F) = \Omega_n(q, F)/Z \cap \Omega_n(q, F)$$

به این ترتیب تا اینجا خانواده گروه‌های متناهی متعامد ساده را معرفی کردیم. حال فرض کنید F میدان متناهی $GF(q)$ و V فضای برداری n بعدی روی F باشد. لازم است بین حالت‌هایی که n زوج یا فرد است تفاوت قایل شویم.

ابتدا فرض کنید n فرد باشد، مثلاً $n = ۲l + ۱$، به این ترتیب تنها دو ضرب اسکالر متقارن غیر منفرد نابرابر روی V وجود خواهد داشت. این دو ضرب اسکالر به یک گروه متعامد یکسان منتهی می‌شوند. مرتبه گروه‌های ساده مربوطه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|P\Omega_{۲l+۱}(q)| = \frac{۱}{(۲, q-۱)} q^{l^۲}(q^۲ - ۱)(q^۴ - ۱) \ldots (q^{۲l} - ۱)$$

حال فرض کنید n زوج باشد $n = ۲l$، در این حالت نیز دو ضرب اسکالر نامتقارن غیر منفرد نابرابر روی V وجود دارند، اما در اینجاهر یک از آنها به گروه متعامد متفاوتی منتهی می‌شود. این ضرب اسکالر را می‌توان با ماتریس‌های زیر نشان داد:

$$\begin{pmatrix} ۰ & I_l \\ I_l & ۰ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۰ & & I_{l-۱} & ۰ & ۰ \\ & & & \vdots & \\ I_{l-۱} & & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & & ۰ & ۰ & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

جایی که ε در F غیر مربعی است.

گروه‌های متعامد مربوط به هر یک را به ترتیب $O_{۲l}^{+}$ و $O_{۲l}^{-}$ نشان می‌دهیم. مرتبه آنها از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\left|P\Omega_{۲l}^{+}(q)\right| = \frac{۱}{(۴,q^{l}-۱)} q^{l(l-۱)}(q^{۲}-۱)(q^{۴}-۱)\ldots\left(q^{۲l-۲}-۱\right)\left(q^{l}-۱\right)$$

$$\left|P\Omega_{۲l}^{-}(q)\right| = \frac{۱}{(۴,q^{l}+۱)} q^{l(l-۱)}(q^{۲}-۱)(q^{۴}-۱)\ldots\left(q^{۲l-۲}-۱\right)\left(q^{l}+۱\right)$$

تعریف ۱-۱-۱۶. گروه‌های پراکنده، دسته‌ای از گروه‌های ساده‌اند که به دلیل گسترده بودن در اینجا فقط به ذکر نام، مرتبه و محقق آنها اکتفا می‌کنیم.

جدول ۱-۱ گروه‌های پراکنده

گروه	مرتبه	محقق
$M_{۱۱}$	$۲^{۴} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۱۱$	Mathieu
$M_{۱۲}$	$\cdot ۳^{۳} \cdot ۵ \cdot ۱۱$	Mathieu
$M_{۲۲}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱$	Mathieu
$M_{۲۳}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	Mathieu
$M_{۲۴}$	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	Mathieu
$J_{۲}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷$	Hall,Janko
Suz	$۲^{۱۳} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	Suzuki
HS	$۲^{۹} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱$	Higman,Sims
Mcl	$۲^{۷} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱$	McLaughlin
$Co_{۳}$	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵^{۳} \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	Conway
$Co_{۲}$	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۲۳$	Conway
$Co_{۱}$	$۲^{۲۱} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۴} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۲۳$	Conway,Leech
He	$۲^{۱۰} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۷$	Held/Higman,Mckay
$Fi_{۲۲}$	$۲^{۱۷} \cdot ۳^{۹} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۳$	Fischer
$Fi_{۲۳}$	$۲^{۱۸} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۲۳$	Fischer
$Fi'_{۲۴}$	$۲^{۲۱} \cdot ۳^{۱۶} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹$	Fischer
HN	$۲^{۱۴} \cdot ۳^{۶} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۹$	Harada,Norton/Smith
Th	$۲^{۱۵} \cdot ۳^{۱۰} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۳ \cdot ۱۹ \cdot ۳۱$	Thompson/Smith
B	$۲^{۴۱} \cdot ۳^{۱۳} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷^{۲} \cdot ۱۱ \cdot ۱۳ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۳۱ \cdot ۴۷$	Fischer/ Sims,Leon
M	$۲^{۴۶} \cdot ۳^{۲۰} \cdot ۵^{۹} \cdot ۷^{۶} \cdot ۱۱^{۲} \cdot ۱۳^{۳} \cdot ۱۷ \cdot ۱۹ \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱ \cdot ۴۱ \cdot ۴۷ \cdot ۵۹ \cdot ۷۱$	Fischer,Griess
$J_{۱}$	$۲^{۳} \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۱۹$	Janko
$O'N$	$۲^{۹} \cdot ۳^{۴} \cdot ۷^{۳} \cdot ۵ \cdot ۱۱ \cdot ۱۹ \cdot ۳۱$	O' Nan/Sims
$J_{۳}$	$۲^{۷} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵ \cdot ۱۷ \cdot ۱۹$	janko/Higman,Mckey
Ly	$۲^{۸} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵^{۶} \cdot ۷ \cdot ۱۱ \cdot ۳۱ \cdot ۳۷ \cdot ۶۷$	Lyons/Sims
Ru	$۲^{۱۴} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵^{۳} \cdot ۷ \cdot ۱۳ \cdot ۲۹$	Rudvalis/Conway,wales
$J_{۴}$	$۲^{۲۱} \cdot ۳^{۳} \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot ۱۱^{۳} \cdot ۲۳ \cdot ۲۹ \cdot ۳۱ \cdot ۳۷ \cdot ۴۳$	Norton,Parker,Benson,Conway,Th janko/ackray

علاقه مندان برای آشنایی کامل با گروه‌های پراکنده می‌توانند به آدرس اینترنتی زیر مراجعه کنند:

http//brauer.maths.qmul.ac.uk/atlas/v۳

تعریف ۱- ۱- ۱۷. یک چنبره از گروه جبری G روی میدان K، یک زیر گروه یکریخت با حاصلضرب مستقیم از K^* است. یک چنبره بیشین است، اگر مشمول در یک چنبره بزرگتر از G نباشد. هر دو چنبره بیشین در G مزدوجند. $(K^\star = K - \{۰\})$

هر چنبره بیشین T یکریخت با $(K^*)^L$ است که L رتبه لی G است. (هرگروه ساده از نوع لی یک رتبه لی متناظر دارد که معمولا با L نشان داده می‌شود) و داریم $\mathrm{C_G(T) = T}$.

مثال: فرض کنید $\mathrm{G=GL_n}(K)$ و T یک گروه از ماتریس‌های قطری باشد .در اینجا:

۱-T یک چنبره بیشین از σ است.(σ یک نگاشت فروبینوس استاندارد است.)

۲-$\mathrm{N_G(T)}$ یک گروه از ماتریس‌های تک جمله ای است.

۳-$\omega = \mathrm{N_G(T)/T}$ می‌تواند با یک گروه از ماتریس‌های جایگشتی شناخته شود یعنی $\omega \cong \mathrm{S_n}$.

۱-۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی گراف

تعریف ۱-۲-۱. تعداد یال‌های مجاور به رأس v گراف، درجه v نامیده و با $\deg(v)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۲. همسایگان رأس g با $N(g)$ مشخص می‌شود، رئوسی هستند که با راس g مجاورند.

تعریف ۱-۲-۳. گراف همبند گرافی است که بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۲-٤ . یک گراف دو وجهی یا مسطح، گرافی است که در یک صفحه قرار بگیرد به نحوی که هیچ دو یالی غیر از راس مشترکشان در نقطه دیگری از نظر هندسی تلاقی نداشته باشند.

تعریف ۱-۲-۵. گراف G را k منظم گوییم، اگر درجه هر راس آن k باشد.

تعریف ۱-۲-٦. دو گراف X و Y یکریختند و می‌نویسیم $X \cong Y$، اگر یک نگاشت دوسویی $\varphi: V(X) \to V(Y)$ وجود داشته باشد، به طوری که دو راس x و y در X مجاورند اگر وتنها اگر $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ در Y مجاور باشند.

۱-۳. برخی قضایای مهم در گروه‌ها

گزاره۱-۳-۱. اگر $K\ char\ H \trianglelefteq G$، آن‌گاه $K \trianglelefteq G$.

اثبات. ر. ک. [۲۶، گزاره ۳-۱۰-۹]

گزاره ۱-۳-۲. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت اگر $G/Z(G)$ دوری باشد، آن‌گاه G آبلی است.

اثبات. ر. ک. [۲۲، قضیه ۲۶-۴]

تعریف ۱-۳-۳. فرض کنید G یک گروه متناهی با مرتبه $p^{\alpha}\mathrm{m}$ باشد که در آن m و α اعداد صحیح و p یک عدد اول است طوری که $p \nmid m$. در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه p را یک p - زیرگروه سیلوی G می نامند.

قضیه ۱-۳-٤. (قضیه سیلو). فرض کنید G یک گروه متناهی با مرتبه $p^{\alpha}\mathrm{m}$ باشد که در آن m و α اعداد صحیح و p یک عدد اول است طوری که $p \nmid m$ است. در این صورت

(۱) G همواره شامل یک p- زیرگروه سیلو است.

(۲) اگر n_p تعداد p- زیرگروه‌های سیلو باشد. آن‌گاه $n_p \equiv ۱ (mod\ p)$ و هم چنین $n_p | m$.

(۳) تمام p- زیرگروه‌های سیلو در G مزدوجند.

اثبات. ر. ک.[۱۷، قضیه ۱.٦.۱٦]

قضیه ۱-۳-۵. فرض کنید H و K دو گروه دوری متناهی به ترتیب با مرتبه‌های m و n باشند. در این صورت:

گروه $H \times K$ دوری است اگر و تنها اگر $(m,n) = ۱$.

اثبات. ر. ک. [۲۲، قضیه ۷-۵]

لم ۱-۳-٦. فرض کنیم $K \trianglelefteq G$ و P یک p - زیر گروه سیلو از K باشد. در این صورت $G = N_G(P)K$.

اثبات. ر. ک. [۱۷، لم ۱۴. ۲. ۵]

قضیه ۱-۳-۷. اگر G گروه فروبنیوس با هسته K و مکمل A باشد، آن‌گاه روابط زیر برقرار است:

(۱) A یک گروه منظم از خود ریختی‌های K را القا می‌کند.

(۲) K پوچتوان است و آبلی است اگر |A| زوج باشد.

(۳) $|A|\,|\,|K|-۱$

(۴) هر زیر گروه از A از مرتبه pq که pوq اولند، دوری است.

اثبات. ر. ک .[۷، قضیه ۱–۳]

قضیه ۱–۳–۸. اگر $x\epsilon S_n$ آن‌گاه x^{S_n} ،یعنی رده مزدوجی x در S_n متشکل از همه جایگشت‌هایی از S_n است که ساختار دوری آنها با ساختار دوری x یکی است.

اثبات. ر. ک. [۲۴، قضیه ۱۲. ۱۵]

گزاره ۱–۳–۹. فرض کنیم $x\epsilon A_n$و $n>۱$

۱) اگر ضرب x در جایگشتی فرد از S_n تعویض پذیر باشد، آن‌گاه $x^{S_n}=x^{A_n}$.

۲) اگر هیچ جایگشت فردی در S_n وجود نداشته باشد که ضرب آن در x تعویض پذیر باشد، آن‌گاه x^{S_n} به دو رده مزدوجی A_n با اندازه‌های مساوی و نماینده‌های x و $(۱۲)x^{-۱}(۱۲)$ تجزیه می‌شود.

اثبات. ر. ک. [۲۴، گزاره ۱۲. ۱۷]

قضیه ۱–۳–۱۰. فرض کنید $G=PSL(۲,q)$ ، (جایی که q توانی از یک عدد اول است.) و فرض کنید $k=g.c.d.(q-۱,۲)$. در این صورت

(۱) یک p – زیر گروه سیلوی P از G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه q است و تعداد p – زیر گروه‌های سیلوی G برابر $q+۱$ است.

(۲) G شامل یک زیر گروه دوری A از مرتبه $t=(q-۱)/k$ است طوری که به ازای هر عنصر غیربدیهی $u\epsilon A$، $N_G(<u>)$ یک گروه دووجهی از مرتبه ۲t است.

(۳) G شامل یک زیر گروه دوری B از مرتبه $s=(q+۱)/k$ است به طوری که به ازای هر عنصر غیربدیهی $u\epsilon B$ ، $N_G(<u>)$ یک گروه دو وجهی از مرتبه $۲s$ است.

(۴) مجموعه $\{P^x,A^x,B^x|x\epsilon G\}$ یک افراز از G است.

(۵) . فرض کنید a یک عنصر غیر بدیهی از G باشد. اگر $q>۵$ و $q\equiv ۱(۴)$، آن‌گاه

$$C_G(a)=\begin{cases} N_G(\langle a\rangle) & \text{اگر } a\in A^x \text{ و } a^{۲}=۱ \text{ برای بعضی } x\in G \\ A^x & \text{اگر } a\in A^x \text{ و } a^{۲}\neq ۱ \text{ برای بعضی } x\in G \\ B^x & \text{اگر } a\in B^x \text{ برای بعضی از } x\in G \\ P^x & \text{اگر } a\in P^x \text{ برای بعضی } x\in G \end{cases}$$

(۶) اگر $q>۵$ و $q\equiv ۳(۴)$، آن‌گاه

$$C_G(a)=\begin{cases} N_G(\langle a\rangle) & \text{اگر } a\in B^x \text{ و } a^{۲}=۱ \text{ برای بعضی } x\in G \\ B^x & \text{اگر } a\in B^x \text{ و } a^{۲}\neq ۱ \text{ برای بعضی } x\in G \\ A^x & \text{اگر } a\in A^x \text{ برای بعضی از } x\in G \\ P^x & \text{اگر } a\in P^x \text{ برای بعضی } x\in G \end{cases}$$

(۷) اگر $q\equiv ۰(۴)$، آن‌گاه

$$C_G(a)=\begin{cases} A^x & \text{اگر } a\in A^x \text{ برای بعضی } x\in G \\ B^x & \text{اگر } a\in B^x \text{ برای بعضی از } x\in G \\ P^x & \text{اگر } a\in P^x \text{ برای بعضی } x\in G \end{cases}$$

اثبات .ر.ک. به[۱ ، لم ۳ − ۲۱]

قضیه ۱-۳-۱۱. هر گروه ساده از مرتبه ۶۰ با $A_۵$ یکریخت است.

اثبات. ر. ک. [۲۳، قضیه ۴. ۲. ۱۴]

تعریف ۱-۳-۱۲. یک گروه عملگر راست، یک سه تایی (G,Ω,α) است شامل یک گروه G، یک مجموعه Ω که دامنه عملگر نامیده می‌شود و یک تابع $\alpha: G\times\Omega\to G$ که برای هر $\boldsymbol{\omega\epsilon\Omega}$، $g\mapsto (g,\omega)\alpha$ یک درونریختی از G است. $(g,\omega)\alpha$ را با g^{ω} نشان می‌دهیم.