وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

یافتن جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه تحت معادلات موج با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی

توسط:

سکینه بیگم میراسدی

استاد راهنما:

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی

استاد مشاور:

دکتر امید سلیمانی فرد

شهریورماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

یافتن جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه تحت معادلات موج با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی

توسط:

سکینه بیگم میراسدی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی دانشیار ریاضی کاربردی گرایش کنترل بهینه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر امید سلیمانی فرد استادیار ریاضی کاربردی گرایش کنترل بهینه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر جعفر فتحعلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود (داور اول)

دکتر حنیف حیدری استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر الهه ظهوریان آزاد استادیار ریاضی کاربردی گرایش احتمال دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریورماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر نازنینم به پاس تمامی زحمات بی دریغشان
نهال را باران باید
تا بشوید غبار نشسته بر برگهایش
و سیرابش کند از آب حیات
و آفتاب باید تا بتاباند
نیرو را و محکم کند
شاخه های تازه روییده را
به نام مادر
بوسه ای باید زد، دست هایی را
که می شویند غبار خستگی روزگار را
و سیراب می کنند روح تشنه را
به نام پدر
بوسه ای باید زد، دست هایی را
که می تابانند نیرو را
و محکم می کنند استواری پایه های زیستن را

سپاسگزاری

ای هستی بخش، وجود مرا بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران. حال که توفیق جمع آوری و تهیه این مجموعه را یافته ام بر خود واجب می دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری شان بهره مند گشته ام تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم.

در ابتدا صمیمانه ترین تقدیرها تقدیم به خانواده عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیر ممکن بود.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی که با ارائه نظرات سازنده و رهنمودهای بی دریغشان در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر امید سلیمانی فرد که مشاوره این پایان نامه را به عهده داشتند، سپاسگزارم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی و جناب آقای دکتر حنیف حیدری که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

چکیده

یافتن جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه تحت معادلات موج با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی

به وسیله‌ی:
سکینه بیگم میراسدی

در این پایان‌نامه حل مسائل کنترل بهینه تحت معادلات موج با دو نوع کنترل توزیع‌شده و مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا صورت کلی این مسائل را معرفی نموده و کنترل‌پذیری آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه با توجه به اینکه جواب‌های تحلیلی برای این مسائل همیشه در دسترس نیست و یا به سختی به‌دست می‌آید، چند روش تقریبی ارائه‌شده برای حل این نوع مسائل معرفی می‌کنیم. سرانجام یک روش تکراری تحت یک طرح تلفیقی از الگوریتم‌های تکاملی (الگوریتم‌های بهینه‌سازی ذرات و ژنتیک) و یک روش تقریبی برای حل معادلات موج (مثل روش تفاضل متناهی) ارائه می‌شود. نتایج محاسباتی موفقیت این روش‌ها را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی. مسائل کنترل بهینه تحت معادلات موج، کنترل مرزی، کنترل توزیع‌شده، الگوریتم تکاملی، روش‌های تقریبی.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ برخی مفاهیم مقدماتی از آنالیز

در این بخش بعضی از مفاهیم اولیه که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم را معرفی می‌کنیم. تمام مضامین ارائه‌شده در این بخش از مراجع [۷، ۱۸، ۲۹، ۱۵، ۲، ۳، ۳۵] نقل شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱. تابع معلوم $f(x),\ 0 < x < L$ را می‌توان تحت شرایطی نه‌چندان محدود کننده، با یک سری نامتناهی به‌صورت

$$f(x) = A_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

نمایش داد. چنین سری‌ای که ضرایب آن برای $k = 1, 2, \cdots$ تحت معادلات

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,\ \ a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos kx\,dx,\ \ b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin kx\,dx$$

تعیین می‌شوند، یک **سری فوریه** [۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. **تابع به‌طور تکه‌ای هموار** [۲]، تابعی است که از اجتماع تعدادی متناهی توابع پیوسته تشکیل شده که در نقاط ناپیوسته خود دارای حدود چپ و راست بوده و در هر نقطه از حوزه تعریف خود دارای مشتق چپ و راست باشند.

تعریف ۳.۱.۱. هرگاه $f(x),\ 0 < x < L$ یک تابع به‌طور تکه‌ای هموار باشد، آن‌گاه

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \qquad \int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

[۱] Fourier seri

[۲] Piecewise smooth function

را به‌ترتیب تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه تابع $f(x)$ نامیده و چنین می‌نویسند:

$$F_s\{f(x)\} = \frac{۲}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = f_s(n)$$
$$F_c\{f(x)\} = \frac{۲}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = f_c(n)$$

تعریف ۴.۱.۱. یک فضای برداری [۳] متشکل است از

۱) یک میدان F از اسکالرها.

۲) یک مجموعه V از اشیایی به نام بردارها.

۳) یک قاعده یا عمل به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای x و y از V بردار $x+y$ از V که مجموع x و y نامیده می‌شود وابسته می‌سازد با این شرایط که برای هر $x, y, z \in V$،

(الف) جمع جابه جایی است یعنی $x + y = y + x$.

(ب) جمع شرکت پذیر است یعنی $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(پ) بردار یکتای $\circ$ به نام بردار صفر در V موجود است به‌طوری که به ازای هر $x \in V$، $x = \circ + x$.

(ت) به ازای هر $x \in V$، بردار $-x \in V$ موجود است به‌طوری که $x + (-x) = \circ$.

۴) یک قاعده یا عمل به نام ضرب اسکالری c از F و هر بردار x از V، بردار cx در V را حاصلضرب c و x نامند با این شرایط که برای هر $x, y \in V$ و $c, c_۱, c_۲ \in F$،

(الف) $۱x = x$.

(ب) $(c_۱c_۲)x = c_۱(c_۲x)$.

(پ) $c(x + y) = cx + cy$.

(ت) $(c_۱ + c_۲)x = c_۱x + c_۲x$.

تعریف ۵.۱.۱. هر تابع از یک فضای برداری به میدان اسکالر آن را تابعک [۴] گویند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای برداری مختلط باشد. نگاشت $< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{C}$ **ضرب داخلی** [۵] در $\mathcal{H}$ گفته می‌شود، اگر برای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ شرایط زیر برقرار باشند:

---

[۳] Vector space

[۴] Functional

[۵] Inner product

۱. $< x, y >= \overline{< y, x >}$.

۲. $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < y, z >$.

۳. $< x, x > \geq ۰$.

۴. $< x, x >= ۰ \to x = ۰$.

و فضای برداری همراه با ضرب داخلی روی آن، $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$، فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. یک تابع حقیقی مقدار $\| \cdot \|$ تعریف‌شده روی فضای برداری X یک **نرم** نامیده می‌شود هرگاه سه خاصیت زیر برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ برقرار باشند.

۱. $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰ \leftrightarrow x = ۰$

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

۳. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

تعریف ۸.۱.۱. برای هر بردار x **نرم بی‌نهایت** یا **نرم بیشینه** به صورت

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

تعریف می‌شود که x_i ها مؤلفه‌های بردار x هستند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت یا صفر باشد. اگر تابع $F(x)$ در تعدادی همسایگی از یک نقطه t مشخص و متناهی باشد و

$$F(x) = \sum_{r=۰}^{n} a_r \frac{(x-t)^r}{r!} + o(x-t)^n$$

که در آن، $a_۰ = F(t)$ و $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ متناهی و مستقل از x هستند، آن‌گاه وقتی $x \to t$، a_n را n امین **مشتق تعمیم یافته** [۶] $F(x)$ در نقطه t می‌نامند.

تعریف ۱۰.۱.۱. نگاشت $F : D \subset X \to Z$ را در زیرمجموعه باز $U \subset D$ **مشتق‌پذیر نیوتن** [۷] می‌نامند، اگر یک خانواده از مشتق‌های تعمیم یافته $G : U \to \mathcal{L}(X, Z)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in U$ داشته باشیم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{۱}{\|h\|_X} \|F(x+h) - F(x) - G(x+h)h\|_Z = ۰,$$

که $\mathcal{L}(X, Z)$ مجموعه نگاشت‌های خطی پیوسته از X به Z می‌باشد.

---

[۶] Generalized derivative

[۷] Newton-differentiable

قضیه ۱.۱.۱۱. *دنباله* $\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)}, \ldots$ *به* α ***همگرا*** *است اگر و فقط اگر*

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathrm{x}^{(k)} - \alpha\| = 0.$$

تعریف ۱.۱.۱۲. گوییم دنباله $\{\mathrm{x}_k | \ k \geq 0\}$ همگرا به α با مرتبه همگرایی $p > 0$ است اگر

$$\|\mathrm{x}_{k+1} - \alpha\| \leq c\|\mathrm{x}_k - \alpha\|^p \quad k \geq 0,$$

که در آن c کمیتی ثابت است و $c \geq 0$. بعضی از انواع همگرایی‌ها را به‌صورت زیر می‌توان دسته‌بندی کرد:

۱. اگر $p = 1$ و $0 < c < 1$، همگرایی به‌دست آمده **همگرایی خطی** نامیده می‌شود،

۲. اگر $p = 2$ باشد، **همگرایی درجه دوم** داریم،

۳. اگر $\frac{\|\mathrm{x}_{k+1} - \alpha\|}{\|\mathrm{x}_k - \alpha\|} \to 0$، زمانی‌که $k \to \infty$، آن‌گاه **همگرایی فوق خطی** [۸] به‌دست می‌آید.

تعریف ۱.۱.۱۳. یک فضای ضرب داخلی که تحت نرم $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ کامل باشد، یک **فضای هیلبرت** [۹] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۴. یک فضای برداری X مجهزشده با یک نرم $\| \cdot \|$ یک فضای برداری نرم‌دار یا به‌طور ساده یک **فضای نرم‌دار** [۱۰] نامیده می‌شود. همچنین یک تابع فاصله روی یک فضای نرم‌دار با نرم $\| \cdot \|$ توسط تابع $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۵. یک فضای نرم‌دار X که نسبت به تابع فاصله القایی توسط نرمش کامل باشد، یک **فضای باناخ** [۱۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد، یک **جبر** [۱۲] از مجموعه‌ها روی مجموعه X، یک گردایه ناتهی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X می‌باشد به‌طوری که اگر $E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{A}$ آن‌گاه $\cup_1^n E_j \in \mathcal{A}$ واگر $E \in \mathcal{A}$ آن‌گاه $E^c \in \mathcal{A}$. همچنین یک σ -جبر [۱۳] یک جبر است که تحت اجتماع شمارا از زیرمجموعه‌هایش بسته باشد.

---

[۸] Superlinear convergence

[۹] Hilbert space

[۱۰] Normed space

[۱۱] Banach space

[۱۲] algebra

[۱۳] σ-algebra

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر X یک مجموعه و $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ یک σ -جبر باشد، آن‌گاه $(X,\mathcal{M})$ یک **فضای اندازه‌پذیر** [۱۴] و مجموعه‌های در $\mathcal{M}$ **مجموعه‌های اندازه‌پذیر** [۱۵] نامیده می‌شوند که در آن $\mathcal{P}(X)$ مجموعه تمام چندجمله‌ای‌هایی است که متغیرهای آن‌ها در مجموعه X باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸. اگر $(X,\mathcal{M})$ و $(Y,\mathcal{N})$ فضاهای اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه نگاشت $f : X \to Y$ یک $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ -اندازه‌پذیر یا فقط یک **نگاشت اندازه‌پذیر** [۱۶] نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ معلوم و برای تمام $E \in \mathcal{N}$ داشته باشیم: $f^{-1}(E) = \{x \in E : f(x) \in E\} \in \mathcal{M}$ که $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید D یک مجموعه کراندار از فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ با مرز هموار ∂D باشد، آن‌گاه فضاهای حقیقی $L^P(D)$ برای $1 \leq P \leq \infty$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.
اگر $1 \leq P < \infty$ آن‌گاه، $L^P(D)$ مجموعه تمام u هایی است که برای توابع حقیقی مقدار لبگ اندازه‌پذیر در D با نرم زیر داشته باشیم:

$$\|u\|_{P,D} = (\int_D |u(x)|^P \, dx)^{1/P} < \infty$$

و اگر $P = \infty$ آن‌گاه،

$$L^\infty(D) = ess\ sup\ |u(x)|, \quad x \in D$$

که $ess\ sup$ سوپریمم اساسی را نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۲۰. ضرب داخلی $< f, g >$ در $L^P(D)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< f, g >= \int_D f(x)g(x)dx$$

تعریف ۱.۱.۲۱. $H^1(D)$ یک فضای هیلبرت به‌صورت

$$H^1(D) = \{u : u \in L^2(D), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D), i = 1, 2, \cdots, n\}$$

می‌باشد که با نرم

$$\|u\|_{H^1(D)} = [|u|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2]^{1/2}$$

مجهز شده است. همچنین $H_0^1(D)$، بستار $C_0^\infty(D)$ در $H^1(D)$ یازیرفضایی از $H^1(D)$ از توابع پوچ روی $\partial D \times (0, T)$ می‌باشد. (T یک عدد صحیح مثبت است)

[۱۴] Measurable space

[۱۵] Measurable sets

[۱۶] Measurable function

تعریف ۲۲.۱.۱. اگر X یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه $L^P(0,T;X)$ فضای توابع $t \to f(t)$ از

$$(0,T) \to X$$

می‌باشد که اندازه‌پذیر هستند به‌طوری که اگر $P < \infty$،

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^P dt\right)^{1/P} = \|f\|_{L^P(0,T;X)} < \infty$$

و اگر $P = \infty$ نرم بالا را با نرم زیر جایگزین می‌کنیم

$$ess\ sup\, \|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0,T;X)},\ \ t \in (0,T)$$

پس $L^P(0,T;L^P(D)) = L^P(D \times (0,T))$.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید V و W فضاهای نرم‌دار باشند و U یک زیرمجموعه باز از V باشد. تابع $\mathtt{f} : U \to W$، **تابع مشتق‌پذیر فِرِچت** [۱۷] در $\mathtt{x} \in U$ نامیده می‌شود اگر یک عملگر خطی پیوسته

$$A_{\mathtt{x}} : V \to W$$

وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\lim_{\mathtt{h} \to 0} \frac{\|\mathtt{f}(\mathtt{x}+\mathtt{h}) - \mathtt{f}(\mathtt{x}) - A_{\mathtt{x}}(\mathtt{h})\|}{\|\mathtt{h}\|} = 0.$$

لم ۲۴.۱.۱. ***(قانون زنجیره ای)*** [۱۸]. *فرض کنید $H : D \subset L^p(w) \to L^q(w),\ 1 \le p < q < \infty$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر فِرِچت در D و $y^* \in D$ و $\phi : L^q(w) \to L^p(w)$ مشتق‌پذیر نیوتن در $H(y^*)$ با یک مشتق تعمیم یافته G باشد، آن‌گاه $F = \phi(H) : D \subset L^p(w) \to L^p(w)$ مشتق‌پذیر نیوتن در y^* با یک مشتق تعمیم یافته $G(H)H' \in \mathcal{L}(L^p(w), L^p(w))$ می‌باشد که $\mathcal{L}(L^p(w), L^p(w))$ مجموعه نگاشت‌های خطی پیوسته از $L^p(w)$ به $L^p(w)$ می‌باشد.*

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید E یک فضای باناخ و K یک زیرمجموعه از E باشد و $F : K \to E^*$ یک تابعک از K به فضای دوگان E^* از فضای E باشد. مسئله **نامساوی وردشی** [۱۹]، حل نامساوی

$$< F(x), y - x > \ge 0 \ \ \forall y \in K$$

نسبت به متغیر $x \in K$ است که $< \cdot , \cdot >: E^* \times E \to \mathbb{R}$ یک ضرب داخلی می‌باشد.

[۱۷] Frechet differentiable function

[۱۸] Chain rule

[۱۹] Variational inequality

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ مختلط باشد، عملگر $A: X \to X$ یک **عملگر آفین** نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in X$ و هر a مختلط داشته باشیم:

$$A[ax + (۱ - a)y] = aAx + (۱ - a)Ay.$$

تعریف ۲۷.۱.۱. (**همگرایی ضعیف** [۲۰]). فرض کنید X یک فضای هیلبرت و x_n یک دنباله در X باشد، اگر برای تمام $\varphi \in X^*$ وقتی $n \to \infty$ داشته باشیم $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$، آن‌گاه گوییم x_n به‌طور ضعیف به x همگرا است و آن را با نماد $x_n \rightharpoonup x$ نشان می‌دهیم.

۱-۲ معادله موج

دراین بخش به معرفی معادله موج و چند روش برای حل این معادله می‌پردازیم. تمام مضامین ارائه‌شده در این بخش از مراجع [۶، ۴] نقل شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشد، معادله‌ی مرتبه دوم

$$au_{xx} + ۲bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = ۰ \qquad (۱.۱)$$

که در آن ضرایب a، b، ... و g هریک توابعی هستند تنها از x و y ، یک معادله خطی نامیده می‌شود. اگرضرایب به x، y، u u_x، و u_y بستگی داشته باشند و به مشتق‌های مرتبه دوم u بستگی نداشته باشد، معادله را **شبه خطی** می‌نامند. معادلات خطی به‌شکل (۱.۱) را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنند. اگر در ناحیه‌ای از صفحه‌ی xy مانند S داشته باشیم:

(الف) به ازای هر $x, y \in S$ ، $b^۲ - ac > ۰$، معادله را در S **هذلولوی** می‌نامند.

(ب) به ازای هر $x, y \in S$ ، $b^۲ - ac = ۰$، معادله را در S **سهموی** می‌نامند.

(ج) به ازای هر $x, y \in S$ ، $b^۲ - ac < ۰$، معادله را در S **بیضوی** می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. معادله‌ی $u_{xx} = k^۲ u_{tt}$ که در آن u تابعی است از دو متغیر مستقل x و t، **معادله‌ی تار مرتعش یا معادله‌ی موج** نامیده می‌شود. این معادله یک معادله‌ی هذلولوی است، زیرا در این معادله $a = ۱$، $b = ۰$ و $c = -k^۲$ و $b^۲ - ac = k^۲ > ۰$.

معادله موج یک معادله با مشتق جزئی مرتبه دوم خطی است که برای توضیح موج‌هایی مثل موج‌های آوائی (صدایی)، موج‌های نوری و موج‌های آب به‌کار می‌رود. این موج‌ها ناشی از نیروهایی مثل نیروی صوتی، نیروی

[۲۰] Weak convergence

مغناطیسی برق و نیروی محرکه سیال می‌باشند. مسئله ارتعاش نخ (مثلاً در ابزار موسیقی) اولین بار به‌وسیله جین لوراند [۲۱] ، لئونارد اویلر [۲۲] ، دنیل برنولی [۲۳] وجوزف-لوئیس لاگرانژ [۲۴] مورد مطالعه قرار گرفت. شکل کلی مسئله موج می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{۲.۱}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \tag{۳.۱}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \tag{۴.۱}$$

$$u(0,t) = p(t), \qquad t \geq 0 \tag{۵.۱}$$

$$u(L,t) = q(t), \qquad t \geq 0 \tag{۶.۱}$$

که در آن c عددی ثابت است. u تابعی مجهول و f ، g ، p ، q و F توابعی معلوم هستند.
قبل از حل مسئله فوق یک کاربرد فیزیکی برای آن، یعنی مسئله‌ای که توسط اویلر [۲۵] ریاضیدان سوئیسی مطرح شده است را ارائه می‌کنیم.

۱-۲-۱ کاربرد فیزیکی مسئله موج

نخی به طول L کاملا نازک، کشسان و سبک که در انتها ثابت بوده و در حالت افقی قرار دارد را در نظر بگیرید. فرض کنید این نخ را از حالت تعادل خارج کرده و رهایش می‌کنیم تا ارتعاش کند و در ضمن فرض کنید که این نخ، ارتعاش عرضی نداشته و حرکت آن در داخل یک صفحه صورت پذیرد. یک وضعیت از این نخ را در نظر گرفته و مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید نخ در وضعیت بالارفتن است. جزئی از این نخ را که قبل از انحراف اولیه در طول x قرار دارد به‌صورت شکل ۱-۱ در نظر می‌گیریم.

---

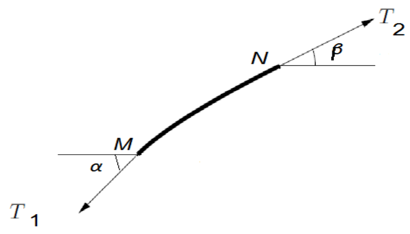
[۲۱] Jean Le Rond

[۲۲] Leonhard Euler

[۲۳] Daniel Bernoulli

[۲۴] Joseph-Louis Lagrange

[۲۵] Euler



شکل ۱-۱: شکل قسمتی از نخ در حال ارتعاش

اگر وضعیت این تکه نخ به‌شکل قوس MN در لحظه t دربیاید، آن‌گاه به علت بالارفتن نخ، نخ هنوز در حال کش آمدن است. اگر $T_۱$ و $T_۲$ مقادیر نیروهای وارده به‌ترتیب در M و N بر نخ باشد، آن‌گاه تصاویر این دو نیرو در امتداد خط افق به‌ترتیب $T_۱ \cos \alpha$ و $T_۲ \cos \beta$ است. به جهت اینکه نخ ارتعاش عرضی ندارد باید این دو نیروی افقی با هم برابر باشند، یعنی

$$T_۱ \cos \alpha = T_۲ \cos \beta = T$$

بنابراین تنها نیروی موثر، نیروی قائم است که برابر است با $T_۲ \sin \beta - T_۱ \sin \alpha$ برای از بین بردن نیروهایی که سبب میرایی حرکت نخ می‌شوند مثل نیروهای وزن و اصطکاک، فرض می‌کنیم یک نیروی خارجی برابر $p\Delta x$ که در آن p نیروی وارده بر واحد طول است در جهت حرکت نخ بر نخ وارد شود. با این فرض که نیروی وارده نخ در نقطه ای به طول x و لحظه t برابر F باشد، $\dfrac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$ شتاب حرکت نخ بوده و بر طبق قانون دوم نیوتن داریم $F = T_۲ \sin \beta - T_۱ \sin \alpha + p\Delta x = m\dfrac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$ که در آن m جرم جزء نخ به طول Δx است که برابر است با $\rho\Delta x$ ، که در آن ρ چگالی جرمی نخ است. با قرار دادن آن به‌جای m در معادله فوق و تقسیم طرفین آن بر T، یعنی تصویر نیروی کشش در امتداد خط افق $T = T_۱ \cos \alpha = T_۲ \cos \beta$ می‌یابیم

$$\frac{T_۲ \sin \beta}{T_۲ \cos \beta} - \frac{T_۱ \sin \alpha}{T_۱ \cos \alpha} + \frac{p}{T}\Delta x = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}\Delta x$$

و از آنجا

$$\tan \beta - \tan \alpha + \frac{p}{T}\Delta x = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}\Delta x$$

نظر به اینکه $\tan \beta = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t),\ \ \tan \alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ با قرار دادن در تساوی فوق و تقسیم طرفین آن بر Δx و فرض $\Delta x \to ۰$ نتیجه می‌شود

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۱}{\Delta x}[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} - \frac{p}{T}$$

و از آنجا

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \frac{p}{\rho}$$

که حالت خاصی از معادله (۲.۱) به ازای $c^2 = \dfrac{T}{\rho}$ و $F = \dfrac{p}{\rho}$ است.
نخ دارای انحراف اولیه $u(x,0) = f(x)$ و سرعت اولیه $u_t(x,0) = g(x)$ است. حرکت کرانه‌ای این نخ به علت ثابت بودن نخ در دو انتها برابر صفر است، یعنی

$$u(L,t) = 0, \quad u(0,t) = 0.$$

چنانچه این نخ از داخل دو حلقه گذشته و دو انتهای آن در داخل دو شیار قائم حرکت کند، آن‌گاه در دو انتهای خود دارای حرکت بوده و داریم

$$u(L,t) = q(t), \quad u(0,t) = p(t)$$

و بدین طریق مسئله (۲.۱) تا (۶.۱) برای نخ به کمک قانون دوم نیوتن مدل‌سازی می‌شود.
در بخش بعد به روش‌های حل مسئله موج می‌پردازیم.

۱-۲-۲ حل مسئله موج

روش‌های حل مسئله موج به دو دسته کلی

- روش‌های تحلیلی
- روش‌های تقریبی

تقسیم می‌شود. از جمله روش‌های تحلیلی می‌توان به روش جداسازی متغیرها [۲۶] و روش‌هایی به کمک سری‌های فوریه و انتگرال فوریه اشاره کرد. در این رساله به معرفی روش‌های تحلیلی ذکرشده و یک روش تقریبی تحت عنوان تفاضلات متناهی [۲۷] می‌پردازیم.

روش جداسازی متغیرها

برای حل مسئله موج (۲.۱) تا (۶.۱) ، نخست این مسئله را در حالت $F(x,t) = 0$ و با شرایط کرانه‌ای صفر حل می‌کنیم. یعنی ابتدا به حل مسئله زیر می‌پردازیم.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad (۷.۱)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad 0 \le x \le L \qquad (۸.۱)$$

$$u(0,t) = p(t), \quad u(L,t) = q(x), \quad t \ge 0 \qquad (۹.۱)$$

[۲۶] Separation variables

[۲۷] Finite differences