بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه الزهرا(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

حل عددی معادلات انتگرال همرشتاین با استفاده از روش Tau

استاد راهنما

دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور

دکتر ترانه تجویدی

دانشجو

سولماز موسوی یگانه

بهمن ۱۳۹۱

کلیه دستاوردهای ناشی از این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهراء (س) است.

تقدیم به

یگانه بانوی دو عالم حضرت فاطمه الزهراء (س)

قدردانی و تشکر

حمد و سپاس می‌گویم خداوندی را که نخستین بی پیشین و آخرین بی پسین است. او که رحمان و رحیم است و با دوام توفیق خویش بهره ای به من بخشید که این دوره را به پایان برسانم و آن را نردبان برآمدن به خشنودی اش سازم. حال که این دوره به پایان رسیده، بر خود واجب می‌دانم که از تمامی کسانی که در این مسیر مرا یاری نموده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

در ابتدا از خانواده‌ام بخصوص پدر و مادر عزیزم که با هموار ساختن این مسیر پر نشیب و فراز، زمینه رشد و بالندگی را برایم فراهم نمودند، قدردانی می‌کنم.

از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر اردوخانی که با راهنمایی‌های ارزنده‌شان مرا در به ثمر رساندن این پایان‌نامه یاری نمودند، کمال سپاس و قدردانی را دارم.

همچنین از خانم دکتر تجویدی که به عنوان استاد مشاور مرا همراهی نمودند، تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر یوسفی به عنوان داور خارجی که زحمت مطالعه و ارزشیابی پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در جلسه دفاع از پایان‌نامه من شرکت نمودند، بسیار متشکرم.

چکیده

این پایان‌نامه، روش Tau را برای یافتن جواب‌های عددی معادلات انتگرال همرشتاین، بر حسب توابع پایه‌ای متعامد، چندجمله‌ای‌های برنشتاین و توابع چندمقیاسی برنشتاین ارائه می‌دهد. معادلات انتگرال مطرح شده، معادلات انتگرال فردهلم همرشتاین و معادلات انتگرال ولترای همرشتاین می‌باشند. ایده اصلی در این روش، استفاده از ماتریس عملیاتی روش Tau برای انتگرال‌گیری از تابع غیرخطی می‌باشد. برای این منظور ابتدا با در نظر گرفتن توابع پایه‌ای متعامد، جواب معادله موردنظر را بصورت $u^T\phi(t)$ (که در آن u بردار ضرایب مجهول و $\phi(t)$ بردار پایه متعامد می‌باشد) تقریب زده و سپس با بکارگیری ماتریس عملیاتی روش Tau برای انتگرال‌گیری از تابع غیرخطی، معادله موردنظر را به یک معادله ماتریسی هم‌ارز که با یک دستگاه از معادلات جبری با ضرایب مجهول مطابقت دارد، تبدیل می‌کنیم و با حل این دستگاه بردار ضرایب u را بدست می‌آوریم.
همچنین با تعویض بردار $\phi(t)$ با بردار پایه برنشتاین $B(t)$، روش Tau را بر حسب پایه برنشتاین و برای حل عددی معادلات مطرح شده بکار می‌بریم. در پایان روش Tau را با پایه توابع چندمقیاسی برنشتاین مورد مطالعه قرار داده و برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترای همرشتاین و معادلات انتگرال–دیفرانسیل ولترا–فردهلم همرشتاین بکار می‌بریم. در انتهای هر زیربخش، با ارائه مثال‌های عددی، روش را مورد ارزیابی قرار داده و نتایج آنها با نتایج بدست آمده از دیگر روش‌های موجود برای حل این معادلات مقایسه می‌شود.

واژه های کلیدی: توابع متعامد، چندجمله‌ای‌های برنشتاین، توابع چندمقیاسی برنشتاین، معادله انتگرال همرشتاین، معادله انتگرال–دیفرانسیل همرشتاین، فردهلم، ولترا، خطی، غیرخطی، ماتریس عملیاتی Tau ، ماتریس عملیاتی دوگان.

فهرست مطالب

مقدمه

در علم ریاضیات، روش‌های تحلیلی و عددی متعددی برای تعیین جواب رده‌های گوناگونی از معادلات وجود دارد. از آن‌جایی که حل این معادلات بصورت تحلیلی معمولاً آسان نمی‌باشد، لذا غالباً روش‌های عددی برای حل این معادلات استفاده می‌شود.
روش‌های طیفی به عنوان یکی از روش‌های بسیار موفق در حل عددی رده‌های گوناگونی از معادلات بوده‌است، که مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. این روش‌ها در عرصه‌های مختلف برخاسته از پدیده‌های فیزیکی بسیار مورد استفاده قرار گرفته شده است.
به دلیل سادگی اجرا، یکی از روش‌های طیفی که در دهه‌های اخیر کاربرد بیشتری پیدا کرده است، روش Tau است. در این پایان‌نامه، روش Tau که توسط ارتیز[۱] و الدائو[۲] در [۲،۱] پیشنهاد شد، برای حل عددی معادلات، بر حسب پایه‌های متعامد و چندجمله‌ای‌های برنشتاین[۳] ارائه می‌شود. معادلات مطرح شده معادلات انتگرال ولترای همرشتاین و معادلات انتگرال فردهلم همرشتاین می‌باشند. در روشی که ارائه می‌شود، محور کار بکارگیری ماتریس‌ها و بردارهای متناظر با قسمت‌های مختلف معادله است. مشخصه اصلی این تکنیک، آن است که این گونه معادلات را به سیستم‌هایی با معادلات جبری تبدیل کرده و به طور شگفت‌آوری حجم محاسبات را کاهش می‌دهد. در این پایان‌نامه، همچنین توابع چندمقیاسی برنشتاین[۴] معرفی شده [۳] و ماتریس عملیاتی دوگان آنها ارائه شده است. سپس معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل ولترا و فردهلم همرشتاین با استفاده ازروش Tau و با بکارگیری ماتریس عملیاتی دوگان این توابع حل شده‌اند. در این‌جا به برخی از روش‌های موجود برای حل معادلات مطرح شده در این پژوهش اشاره می‌کنیم.
یوسفی و همکارش [۴] از روش موجک‌های لژاندر برای حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم

[۱] Ortiz

[۲] El-Daou

[۳] Bernstein

[۴] Bernstein multi-scaling functions

غیرخطی استفاده کرده است. اردوخانی در [۵] توابع هار گویا شده و توابع بلاک پالس را برای حل این معادلات بکار برده است. یالسینباس[5] در [۶] و [۷] به همراه همکارانش به ترتیب روش سری لاگر و لژاندر را برای معادلات انتگرال فردهلم خطی پیشنهاد داده است و در [۸] سری تیلور را برای حل معادلات انتگرال فردهلم-ولترا بکار برده است. مالک‌نژاد و هاشمی‌زاده [۹] ماتریس‌های عملیاتی برنشتاین را برای حل معادلات انتگرال همرشتاین پیشنهاد داده‌اند. هندی[6] در [۱۰] با استفاده از روش‌های گالرکین و هم‌محلی به حل این معادلات پرداخته است. توابع هایبرید هم برای یافتن جواب‌های معادلات انتگرال در [۱۱-۱۵] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در [۱۶] و [۱۷] به ترتیب روش موجک لژاندر و هم‌محلی سینک برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی بکار برده شده است. نوع غیرخطی این معادلات با استفاده از روش‌های توابع والش و توابع مثلثاتی در [۱۸] و [۱۹] مورد بحث واقع شده‌اند. قریشی و هادیزاده [۲۰] روش Tau را برای حل معادلات انتگرال ولترای همرشتاین بکار برده‌اند. در [۲۱-۲۴] روش Tau برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفته است.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم گردیده است. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز حقیقی و عددی که مورد نیاز فصل‌های بعدی است ارائه می‌گردد. در فصل دوم، تقریب توابع بر حسب چندجمله‌ای‌های برنشتاین و توابع چندمقیاسی برنشتاین ارائه می‌شود. به همین منظور در این فصل چندجمله‌ای‌های برنشتاین و توابع چندمقیاسی برنشتاین و ویژگی‌های آنها و همچنین ماتریس عملیاتی دوگان این توابع معرفی می‌شوند. در فصل سوم، روش Tau را برای حل عددی معادلات انتگرال همرشتاین بر حسب توابع پایه‌ای متعامد، چندجمله‌ای‌های برنشتاین و توابع چندمقیاسی برنشتاین بیان کرده و با ارائه مثال‌های عددی روش را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و با نتایج موجود از حل این معادلات با دیگر روش‌ها مقایسه می‌نماییم.

---

[5] Yalcinbas

[6] Hendi

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مهم از آنالیز حقیقی [۲۶،۲۵] و آنالیز عددی [۲۷] می‌پردازیم که نقش عمده‌ای برای درک بهتر مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعدی ایفا می‌کنند.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری (خطی) متشکل است از:

۱) یک میدان F از اسکالرها،

۲) یک گروه آبلی $(V,+)$ به نام بردارها،

۳) یک نگاشت $\sigma : F \times V \longrightarrow V$ با ضابطه $\sigma(\alpha, x) = \alpha x$ به نام ضرب اسکالر که در اصول موضوعه زیر صدق کند.

$i)\ \forall \alpha \in F, \forall x, y \in V;\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$

$ii)\ \forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V;\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,$

$iii)\ \forall \alpha, \beta \in F, \in V;\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$

$iv)\ \forall x \in V;\ \ ۱.x = x.$

در تعریف بالا V را یک فضای برداری روی میدان F می‌نامیم . عمل جمع در گروه آبلی $(V,+)$ را جمع برداری می‌نامیم. اگر $F = \mathbb{R}$ آن‌گاه V را یک فضای برداری حقیقی و اگر $F = \mathbb{C}$ آن‌گاه V را فضای برداری مختلط گوییم .

تعریف ۲.۱.۱. فرض‌کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد. مجموعه S را محدب گوییم

هرگاه:

$$\forall x, y, \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1 - t)x + ty \in S.$$

به عبارت دیگر، هر نقطه روی پاره‌خط واصل بین x و y در S واقع باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی F باشد. زیرمجموعه W از V را یک زیرفضای V می‌نامیم هرگاه W خودش با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی V، یک فضای برداری روی F باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، به تابع $\|\cdot\|$ از V به $\mathbb{R}$ یک نرم گوییم، هرگاه

$i)\ \forall x, y \in V;\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$

$ii)\ \forall x \in V, \forall \alpha \in F;\ \ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$

$iii)\ \forall x \in V;\ \ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$

تعریف ۵.۱.۱. به فضای برداری V که دارای یک نرم است، فضای نرم‌دار (نرمیده) گوییم.

اگر V یک فضای نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in V$ داشته باشیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آن‌گاه (V, d) را یک فضای متری القا شده به وسیله نرم گوییم. بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

تعریف ۶.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای نرم‌دار V به x همگرا گوییم $(x_n \to x)$ هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

تعریف ۷.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای نرم‌دار V کشی[1] گوییم هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall m, n \in z^+, \quad (m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، نرم $\|.\|_c$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\|f\|_c = sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| = max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

[1] Cauchy

تعریف ۹.۱.۱. فضای متری (V,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در V همگرا باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. فضای نرم‌دار V را یک فضای باناخ[۲] گوییم هرگاه فضای متری (V,d) با متر متعارف (متری که به وسیله نرم القا می‌شود)، یک فضای متری کامل باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی باشد. خانواده M از زیرمجموعه‌های X را یک جبر گوییم هرگاه :

۱) اجتماع هر دو عضو M در M باشد (M تحت عمل اجتماع بسته باشد)،

۲) متمم هر عضو M در M باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. جبر M را یک $\sigma-$ جبر گوییم هرگاه تحت اجتماع شمارا بسته باشد. در حقیقت فرض کنیم $\{m_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq M$ اگر، $m = \bigcup_{i=1}^{\infty} m_i \in M$ آن‌گاه M را یک σ –جبر گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر X یک مجموعه غیرخالی و M یک σ–جبر روی X باشد، زوج (X,M) را یک فضای اندازه‌پذیر گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم (X,M) یک فضای اندازه‌پذیر و $f : X \to \mathbb{R}^*$ یک تابع حقیقی توسعه یافته باشد. f را تابعی اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به‌ازای هر زیرمجموعه باز O در $\mathbb{R}$ مجموعه ، $f^{-1}(O)$ در X نسبت به M اندازه‌پذیر باشد یعنی $f^{-1}(O) \in M$.

تعریف ۱۵.۱.۱. برای $1 \leqslant p \leqslant \infty$ فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر $f : X \to C$ که $\int_X |f(t)|^p dt < \infty$ باشد، فضای $L^p(X)$ گوییم. به عبارت دیگر:

$$L^p(X) = \left\{ f | f : X \to C : \text{اندازه‌پذیر } f, \int_X |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که $L^p(X)$ یک فضای برداری است. به‌ازای هر $p \geqslant 1$ و $f \in L^p(X)$ تعریف می‌کنیم :

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

و عدد $\|f\|_p$ را L^p-نرم f گوییم. به آسانی می‌توان نشان داد که این تابع در شرایط نرم صدق می‌کند.

[۲] Banach

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد. گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است. هرگاه دنباله $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ به x همگرا باشد. در این صورت می‌نویسیم $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ را مطلقاً همگرا گوییم هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ همگرا باشد.

قضیه ۱.۱.۱. شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای نرم‌دار X کامل باشد، آن است که هر سری مطلقاً همگرا در این فضا همگرا باشد.

قضیه ۲.۱.۱. (ریز فیشر[۳]) فضای L^p، $(1 \leq p \leq \infty)$ کامل است.

به‌این‌ترتیب با توجه به قضایای فوق، L^p به‌ازای $1 \leq p \leq \infty$ یک فضای باناخ است. در حالت خاص $L^2(X)$، یعنی

$$L^2(X) = \left\{ f | f : X \to C : \text{اندازه‌پذیر}\ f,\ \int_X |f(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

با نرم

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_X |f(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۷.۱.۱. فضای خطی مختلط (حقیقی) X را یک فضای ضرب‌داخلی گوییم هرگاه یک تابع مختلط (حقیقی) روی $X \times X$ که آن را با نماد $\langle \cdot , \cdot \rangle$ نشان می‌دهیم، وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in C$ داشته باشیم:

$i)\ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,$
$ii)\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},$
$iii)\ \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,$
$iiii)\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \langle x, x\rangle \geq 0.$

آن‌گاه $\langle x, y\rangle$ ضرب‌داخلی x و y نامیده می‌شود.

یک ضرب‌داخلی روی X یک نرم تعریف می‌کند که به وسیله $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ نمایش داده

[۳] Riesz-Fisher

می‌شود و به همین ترتیب یک متر روی X با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}.$$

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض‌کنیم X یک فضای ضرب‌داخلی باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in X$ داریم:

۱) نامساوی کشی-شوارتز[۴] $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$

۲) نامساوی مثلثی $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۳) اتحاد متوازی الاضلاع $\|x+y\|^{۲} + \|x-y\|^{۲} = ۲\|x\|^{۲} + ۲\|y\|^{۲}$

تعریف ۱.۱.۱۹. فضای باناخ H را یک فضای هیلبرت[۵] گوییم هرگاه یک ضرب‌داخلی $\langle .,. \rangle$ روی H تعریف شده باشد. به عنوان مثال، فضای $L^{۲}[a,b]$ با نرمی که به‌وسیله $\|x\|_{۲} = \left\{\int_a^b |x(t)|^{۲} dt\right\}^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود، یک فضای هیلبرت است که ضرب‌داخلی آن به وسیله $\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$ تعریف می‌شود، هرگاه $x(t)$ و $y(t)$ توابع حقیقی باشند و اگر $x(t)$ و $y(t)$ توابعی با مقدار مختلط باشند، ضرب‌داخلی چنین تعریف می‌شود:

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}d(t).$$

۱.۲ تعامد

تعریف ۱.۲.۱. عضو x از یک فضای ضرب‌داخلی X بر عضو y از این فضا را عمود گوییم هرگاه $x \neq y$، $\langle x,y\rangle = ۰$ و آن را با $x \perp y$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $A, B \subseteq X$، گوییم x بر A عمود است و نمایش می‌دهیم $x \perp A$، هرگاه به‌ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $x \perp a$ و گوییم A و B بر هم عمودند، هرگاه به‌ازای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ داشته باشیم $a \perp b$.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم F یک زیرفضای فضای هیلبرت H باشد. بنابه تعریف، مجموعه $F^{\perp}$ را مکمل متعامد F گوییم هرگاه:

$$F^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp F\}.$$

[۴] Cauchy-Schwartz

[۵] Hilbert

قضیه ۱.۲.۱. اگر F یک زیرفضای فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه $F^{\perp}$ زیرفضای بسته H است.

قضیه ۲.۲.۱. (ریز[۶]) فرض کنیم F زیرفضای فضای هیلبرت H باشد. اگر F بسته باشد، آن‌گاه $F \oplus F^{\perp} = H$.

تعریف ۳.۲.۱. $A \subset X$ را متعامد گوییم هرگاه :

$$\forall x, y \in A, \qquad \langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ \alpha > 0, & x = y. \end{cases}$$

اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = 1$، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای ضرب‌داخلی X باشد و $x_1, x_2, ..., x_n$ عناصر متمایزی از A باشند آن‌گاه

$$\forall y \in X, \qquad \sum_{k=1}^{n} |\langle y, x_k\rangle|^2 \leq \|y\|^2.$$

قضیه ۳.۲.۱. اگر A زیرمجموعه متعامد یکه از فضای ضرب‌داخلی X باشد و $y \in X$ آن‌گاه:

۱) $\{x \in A \mid \langle y, x\rangle \neq 0\}$ شمارش‌پذیر است.

۲) $\sum_{x\in A} |\langle y, x\rangle|^2 \leq \|y\|^2$ (نامساوی بسل[۷]).

قضیه ۴.۲.۱. اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه سری فوریه[۸] $\sum_{x\in A}\langle y, x\rangle x$ مستقل از ترتیب جملات، همگراست.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب‌داخلی و A زیرمجموعه متعامد یکه از X باشد. آن‌گاه A را یک پایه متعامد یکه برای X گوییم هرگاه به‌ازای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$y = \sum_{x\in A}\langle y, x\rangle x.$$

---

[۶] Riesz

[۷] Bessel

[۸] Fourier

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب‌داخلی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. گوییم A کامل است هرگاه :

$$A^{\perp} = \{y \in X \mid \langle x, y\rangle = ۰ \quad \forall x \in A\} = \{۰\}.$$

قضیه ۵.۲.۱. اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل هستند:

۱) به‌ازای هر $y \in X$ داریم، $\sum_{x\in A} |\langle y, x\rangle|^{۲} = \|y\|^{۲}$ (اتحاد پارسوال[۹]) .

۲) A کامل است.

۳) A یک پایه متعامد یکه برای H است.

با توجه به قضیه قبل اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه کامل از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه هر عنصر $y \in H$ را می‌توان به صورت سری فوریه $y = \sum_{x\in A}\langle y, x\rangle x$ بسط داد که سری فوریه مذکور همگرا به y است.

تعریف ۷.۲.۱. تابع ω را بر $[a, b]$ یک تابع وزن گوییم هرگاه:

۱) ω بر (a, b) نامنفی باشد ،

۲) ω بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد،

۳) ω بر هیچ زیر بازه غیر بدیهی (a, b) متحد با صفر نباشد.

قبلاً در $L^{۲}[a, b]$ ضرب‌داخلی را تعریف کردیم، اینک ضرب‌داخلی نسبت به تابع وزن ω را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b \omega(t)x(t)\overline{y(t)}dt.$$

تعریف ۸.۲.۱. دستگاه متعامد نرمال $\{f_i\}$ را یک دستگاه متعامد نرمال کامل گوییم هرگاه هیچ دستگاه متعامد نرمال وسیع‌تر از آن وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر:

$$\exists f,\ \ \forall i,\ \ \langle f, f_i\rangle = ۰ \to f = ۰.$$

قضیه ۶.۲.۱. اگر $f_۱, f_۲, ..., f_n$ دنباله ای از توابع متعامد نرمال (یکه) در $L^{۲}(a, b)$ باشند و همچنین $f \in L^{۲}(a, b)$، آن‌گاه $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ ی هست که $\|f - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i\|$ مینیمم

[۹]Parseval

است و به $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$ تقریب کمترین مربعات f گوییم.

نتیجه ۱.۲.۱. $\sum_{i=1}^{n}|\langle f,f_i\rangle|^2 \leq \|f\|^2$ (نامساوی بسل).

نتیجه ۲.۲.۱. اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم متعامد نرمال کامل در $L^2(a,b)$ باشد و $f\in L^2$، آن‌گاه $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,f_i\rangle|^2$ همگراست و $\sum_{i=1}^{n}|\langle f,f_i\rangle|^2 \leq \|f\|^2$ (نامساوی بسل).

نتیجه ۳.۲.۱. اگر f و g توابعی در $L^2(a,b)$ باشند و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم متعامد نرمال کامل در $L^2(a,b)$ و $\xi_i=\langle g,f_i\rangle$ و $\eta_i=\langle f,f_i\rangle$ آن‌گاه

$$|\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\overline{\xi_i}| \leq \|f\|\|g\|.$$

۳.۱ سیستم‌های متعامد پیوسته

تعریف ۱.۳.۱. فرض‌کنیم $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از توابع در $L^2[a,b]$ و ω یک تابع وزن روی $[a,b]$ باشد، این دنباله توابع نسبت به تابع وزن ω متعامدند هرگاه،

$$\langle f_i,f_j\rangle=\begin{cases}\alpha_i>0, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\qquad ,i,j=1,2,\ldots$$

به‌علاوه اگر برای هر i، $\|f_i\|=1$ آن‌گاه دنباله توابع $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک دنباله متعامد نرمال یا یکه گوییم.

لم ۲.۳.۱. دنباله توابع متعامد مستقل خطی هستند.

سیستم‌های متعامد چندجمله‌ای را می‌توان با توجه به فرایند گرام-اشمیت[۱۰] که قضیه زیر ارائه می‌دهد، بدست آورد [۲۸].

قضیه ۱.۳.۱. مجموعه چندجمله‌ای‌های $\{\phi_0(t),\phi_1(t),\cdots,\phi_n(t),\cdots\}$ که در زیر تعریف می شوند، بر بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $\omega(t)$ متعامد می‌باشند.

$$\phi_0(t)=1,$$

[۱۰] Gram-Schmidt

$$\phi_۱(t) = t - \beta_۱, \qquad \forall t : a \leq t \leq b,$$

که در آن

$$\beta_۱ = \frac{\int_a^b t\omega(t)\left[\phi_۰(t)\right]^۲ dt}{\int_a^b \omega(t)\left[\phi_۰(t)\right]^۲ dt},$$

وقتی $k \geq ۲$ به‌ازای هر $a \leq t \leq b$،

$$\phi_k(t) = (t - \beta_k)\phi_{k-۱}(t) - \alpha_k\phi_{k-۲}(t),$$

که در آن

$$\beta_k = \frac{\int_a^b t\omega(t)\left[\phi_{k-۱}(t)\right]^۲ dt}{\int_a^b \omega(t)\left[\phi_{k-۱}(t)\right]^۲ dt},$$

و

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b t\omega(t)\phi_{k-۱}(t)\phi_{k-۲}(t)dt}{\int_a^b \omega(t)\left[\phi_{k-۲}(t)\right]^۲ dt}.$$

نتیجه ۱.۳.۱. به‌ازای هر $n > ۰$، چندجمله‌ای‌های $\phi_۰(t), \phi_۱(t), \cdots, \phi_n(t)$ در قضیه بالا بر $[a,b]$ مستقل خطی هستند و یک پایه برای Π_n می‌سازند و به‌ازای هر چندجمله ای $\phi_k(t)$ از درجه $k < n$،

$$\int_a^b \omega(t)\phi_n(t)\phi_k(t) = ۰.$$

Π_n مجموعه چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n می‌باشد.

۱.۳.۱ تقریب توابع بر حسب سیستم‌های متعامد

فرض کنیم $\{\phi_k(t)\}_{k=۰}^{\infty}$ یک پایه متعامد کامل برای $L^۲[۰,۱]$ باشد و $f \in L^۲[۰,۱]$، پس داریم:

$$f(t) = \sum_{j=۰}^{\infty} f_j\phi_j(t) \tag{۱.۱}$$

معادله (۱.۱) شامل نامتناهی جمله است که اگر $f(t)$ را با $m+1$ جمله اول تقریب بزنیم، داریم:

$$f(t) \simeq \sum_{j=0}^{m} f_j\phi_j(t) = f^T\phi(t), \tag{۲.۱}$$

که در آن:

$$f^T = [f_0, f_1, \cdots, f_m], \qquad \phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_m(t)]^T, \tag{۳.۱}$$

و

$$f_j = \frac{\langle f(t), \phi_j(t)\rangle}{\|\phi_j(t)\|^2} = \frac{1}{\|\phi_j(t)\|^2}\int_0^1 \omega(t)f(t)\phi_j(t)dt, \qquad j = 0, 1, ..., m. \tag{۴.۱}$$

حال فرض کنیم $k(t,s) \in L^2([0,1]\times[0,1])$ در این صورت داریم:

$$k(t,s) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} k_{i,j}\phi_i(t)\phi_j(s). \tag{۵.۱}$$

معادله (۵.۱) شامل نامتناهی جمله است که اگر $k(t,s)$ را با $m+1$ جمله اول تقریب بزنیم، داریم:

$$k(t,s) \simeq \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} k_{\phi_{i,j}}\phi_i(t)\phi_j(s), \tag{۶.۱}$$

پس

$$k(t,s) \simeq \phi^T(t)k_\phi\phi(s), \tag{۷.۱}$$

که

$$\begin{aligned} k_{\phi_{i,j}} &= \frac{\langle \phi_i(t), \langle k(t,s), \phi_j(s)\rangle\rangle}{\|\phi_i(t)\|^2\|\phi_j(s)\|^2} \\ &= \frac{1}{\|\phi_i(t)\|^2\|\phi_j(s)\|^2}\int_0^1\int_0^1 \omega(t)\omega(s)k(t,s)\phi_i(t)\phi_j(s)dtds. \end{aligned}$$