دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

هم‌متناهی بودن و ایده‌آلهای اول وابسته‌ی مدولهای کوهمولوژی موضعی

اساتید راهنما

دکتر علی اکبر مهرورز—دکتر رضا نقی پور

استاد مشاور

دکتر حسین ذاکری

پژوهشگر

کمال بهمن پور تکبلاغ ارشق

پاییز ۱۳۸۸

بِسْمِ اللّهِ الرَّحْمنِ الرَّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ ِاو را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سَرِ فکرتِ ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، وبه رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.
گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که **محمّد**(ص) بندهٔ او و پیامبر اوست.
او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.
پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.
خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت **علی** (ع)

تقدیم به:

برادر فداکارم:

جمال

همسر دلسوزم:

مریم

و

فرزند عزیزم:

مانی

بنام خدا

و لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی اکبر مهرورز و جناب آقای دکتر رضا نقی پور، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حسین ذاکری که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر کامران دیوانی آذر و جناب آقای دکتر مسعود طوسی و سرکار خانم دکتر منیره صدقی که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر کمال عزیزی و جناب آقای دکتر محمد حسین جعفری نیز، که مشوقان اصلی بنده جهت ادامه‌ی تحصیل در مقطع دکتری بودند، قدردانی ویژه‌ای داشته باشم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

کمال بهمن پور تکبلاغ ارشق

۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: بهمن پور تکبلاغ ارشق نام: کمال

عنوان: هم‌متناهی بودن و ایده‌آلهای اول وابسته‌ی مدولهای کوهمولوژی موضعی

اساتید راهنما: دکتر علی اکبر مهرورز—دکتر رضا نقی پور

استاد مشاور : دکتر حسین ذاکری

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده‌ی علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: پاییز ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۱۵۵

کلید واژه‌ها: مدول هم‌متناهی، مدول لاسکرین ضعیف، مدول مینیماکس، رتبه‌ی حسابی، صافی رشته‌ی منظم، دوگان ماتلیس، ایده‌آل اول وابسته، ایده‌آل اول چسبیده، دستگاه پارامتری، کوهمولوژی موضعی.

چکیده

در این رساله، فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری با عنصر همانی غیر صفر باشد. بعلاوه فرض کنیم I ایده‌آلی از R، M یک $R-$مدول با تولید متناهی و t یک عدد صحیح نامنفی باشد. در فصل ۲، نشان خواهیم داد که اگر $R-$مدولهای

$$H_I^{0}(M),\, H_I^{1}(M), \ldots,\, H_I^{t-1}(M)\,,$$

همگی مینیماکس باشند، آنگاه برای هر زیر مدول مینیماکس از $H_I^t(M)$، مثل N، $R-$مدول $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^t(M)/N)$ با تولید متناهی است. همچنین نشان می‌دهیم که اگر

$$s = \inf\{\ f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \ \ dim(R/\mathfrak{p}) \geq 2 \ \text{و}\ \ \mathfrak{p} \in Supp_R(M/IM)\ \},$$

آنگاه برای هر $i < s$، $R-$مدول $H_I^i(M)$، $I-$هم‌متناهی است و اگر $s < \infty$، آنگاه برای هر زیر مدول مینیماکس از $H_I^s(M)$، مثل N، $R-$مدولهای $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^s(M)/N)$ و $\operatorname{Ext}_R^1(R/I, H_I^s(M)/N)$ با تولید متناهی می‌باشند. این حکم مستقیماً ایجاب می‌کند که اگر $\dim(R/I) = 1$، آنگاه برای هر $i \geq 0$، $R-$مدول $H_I^i(M)$، $I-$هم‌متناهی است. در فصل ۳، نشان می‌دهیم، اگر R موضعی و

$$s = \inf\{\ grade(IR_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) \mid \ \ dim(R/\mathfrak{p}) \geq 3 \ \text{و}\ \ \mathfrak{p} \in Supp_R(M/IM)\ \},$$

آنگاه برای هر $i < s$ و هر $j \geq ۰$، R–مدولهای $\operatorname{Ext}^j_R(R/I, H^i_I(M))$ و با فرض $s < \infty$، R–مدوهای $\operatorname{Hom}_R(R/I, H^s_I(M))$ و $\operatorname{Ext}^1_R(R/I, H^s_I(M))$، همگی لاسکرین ضعیف هستند. در فصل ۴، نشان می‌دهیم که اگر $x_1, \ldots, x_d$ یک دستگاه پارامتری برای حلقه‌ی موضعی $(R, \mathfrak{m})$ باشد، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq d - 1$، مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته‌ی R–مدول $D_R(H^i_{(x_1,\ldots,x_i)}(R))$ نامتناهی است. که در آن $D_R(-) := \operatorname{Hom}_R(-, E_R(R/\mathfrak{m}))$ نشانگر فانکتور دوگان ماتلیس است.
در فصل ۵، برای ایده‌آلهای $J \subseteq I$ از حلقه‌ی R، مفهوم J–هم‌متناهی بودن M نسبت به I، $C^J_I(M)$، را معرفی می‌کنیم و در حالتی که $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی است، رابطه‌ای بین عمق صافی M در I و $C^I_{\mathfrak{m}}(M)$ پیدا می‌کنیم. در حقیقت نشان می‌دهیم که اگر $\dim(M/IM) = 1$، آنگاه $C^I_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{f} - \operatorname{depth}(I, M) + 1$. همچنین نشان می‌دهیم که اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و کامل باشد و $\dim(M/IM) \neq ۰$، آنگاه

$$c^I_{\mathfrak{m}}(M) = \inf\{\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) + \dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M/IM) \backslash V(\mathfrak{m})\}.$$

در فصل ٦، نشان می‌دهیم که اگر $\operatorname{ara}(I) = t \geq 2$، آنگاه یک I–صافی رشته‌ی منظم برای R مثل $y_1, \ldots, y_t$ موجود است بقسمی که $\operatorname{Rad}(I) = \operatorname{Rad}(y_1, \ldots, y_t)$ و برای هر $1 \leq i \leq t - 1$، $\operatorname{cd}((y_1, \ldots, y_i), R) = i$.

فهرست مطالب

مقدمه

در سراسر این رساله فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی جابجائی و یکدار با عضو همانی غیر صفر باشد. فرض کنید M یک $R-$مدول و I یک ایده‌آل R باشد. $i-$امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به I را با نماد $H_I^i(M)$ نشان می‌دهند و بصورت زیر تعریف می‌کنند:

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ext}_R^i(R/I^n, M).$$

نظریه مدولهای کوهمولوژی موضعی اولین بار توسط گروتندیک[1] در سال ۱۹۶۰ به منظور حل یک حدس ساموئل[2] معرفی شد و یکی از زمینه‌های تحقیقاتی مهم در هندسه جبری و جبر جابجائی گردید (مراجع [۲۸]، [۲۹] و [۳۰] را ببینید).

یکی از نتایج شناخته شده این است که مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$، الزاماً با تولید متناهی نیست. از سوی دیگر اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی ونوتری باشد، در اینصورت $R-$مدول $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, H_\mathfrak{m}^i(M))$، با تولید متناهی است. با در نظر گرفتن این واقعیت گروتندیک[3] در [۳۰]

---

[1] *Grothendieck*

[2] *Samuel*

[3] *Grothendieck*

حدس زیر را مطرح ساخت:

اگر I ایده‌آلی ازحلقه‌ی نوتری R و M یک $R-$مدول با تولید متناهی M باشد، آنگاه برای هر $i \geq 0$، $R-$مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^i(M))$، با تولید متناهی است.

اما بعداً هارتشورن [4] در [۳۲]، موفق به ارائه‌ی مثال نقضی بصورت زیر برای حدس فوق شد.
فرض کنید k یک میدان باشد و $R = k[x,y,z,u]/(xy - zu)$. در اینصورت با فرض $I = (x,y)R$، $R-$مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^2(R))$، با تولید متناهی نیست.
اما هارتشورن در همانجا، یک $R-$مدول T را $I-$هم‌متناهی نامید، در صورتیکه $\mathrm{Supp}_R(T) \subseteq V(I)$، و برای هر $j \geq 0$، $R-$مدول $\mathrm{Ext}_R^j(R/I, T)$، با تولید متناهی باشد. و سوال زیر را مطرح ساخت:

به ازای کدام حلقه‌های نوتری مثل R و ایده‌آل I از R، $R-$مدول $H_I^i(M)$، به ازای هر $R-$مدول با تولید متناهی M، و هر $i \geq 0$، $I-$هم‌متناهی است؟

برای پاسخگویی به سوال فوق خود وی در [۳۲]، و بعداً چیریاکسکو [5] در [۱۴]، نشان دادند، در صورتیکه R یک حلقه‌ی موضعی و منظم کامل و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R با شرط $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$، باشد، آنگاه $R-$مدول $H_{\mathfrak{p}}^i(M)$، به ازای هر $R-$مدول با تولید متناهی M، و هر $i \geq 0$، $\mathfrak{p}-$هم‌متناهی است.
بعداً هونیکه و کوه [6] در [۳۸]، نشان دادند که اگر R یک حوزه‌ی صحیح موضعی گورنشتاین کامل و I ایده‌آلی از R با شرط $\dim(R/I) = 1$، باشد، در اینصورت $R-$مدول $\mathrm{Ext}_R^j(N, H_I^i(M))$ به ازای هر $R-$مدول با تولید متناهی M و هر $R-$مدول با تولید متناهی N، با شرط $\mathrm{Supp}_R(N) \subseteq V(I)$ و هر

[4] $Hartshorne$

[5] $Chiriacescu$

[6] $Huneke-Koh$

$i \geq 0$ و هر $j \geq 0$، با تولید متناهی است. بعلاوه دلفینو [7] در [۱۵]، با استفاده از روش آمده در [۳۸]، نشان داد که اگر R یک حوزه‌ی صحیح موضعی ونوتری کامل همراه با برخی شرایط جزئی دیگر باشد، همچنان نتایج مشابهی برقرار است.

سرانجام دلفینو و مارلی [8] در [۱٦] و یوشیدا [9] در [۷۴]، فرض کامل بودن حلقه را در مفروضات فوق حذف نموده و نشان دادند، که اگر I ایده‌آلی از حلقه‌ی موضعی R با شرط $\dim(R/I) = 1$ باشد، در اینصورت به ازای هر R–مدول با تولید متناهی M و هر $i \geq 0$، R–مدول $H_I^i(M)$، I–هم‌متناهی است. برای مرور اجمالی تحقیقات فوق، خواننده‌ی این رساله را به مطالعه‌ی مقاله‌ی جالب [۴۹]، توصیه می‌کنیم.

کارهای انجام شده در فصل دوم این رساله در راستای تحقیقات فوق است. در فصل دوم این رساله با روشهای کاملاً جدیدی نتایجی را در مورد هم‌متناهی بودن مدولهای کوهمولوژی موضعی اثبات خواهیم کرد. مهمترین دستاورد این فصل حذف فرض موضعی بودن حلقه‌ی R در قضیه‌ی دلفینو—مارلی در [۱٦] و یوشیدا در [۷۴]، می‌باشد.

از سوی دیگر یکی از مسائل مهم در جبرجابجائی مساله‌ی متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته‌ی i–مین مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ است (رجوع شود به [۳۷، مساله ۴]). این مساله در حالت کلی درست نیست و مثالهای نقض در مراجع [۴۲] و [٦۹] به ترتیب برای حلقه‌های موضعی و غیر موضعی آورده شده است. اما این مسئله در بسیاری از حالات درست و حائز اهمیت است و سالهای زیادی ریاضیدانان روی این مساله کار کرده‌اند، که نتایج آنها در مجلات به چاپ رسیده‌اند. برای کسب اطلاعات بیشتر و دیدن مطالب جالب می‌توان به مراجع [۱۰]، [۱۱]،

---

[7] $Delfino$

[8] $Delfino - Marley$

[9] $Yoshida$

[۳۴]، [۴۰]، [۵۱]، [۵۲]، [٦٢]، [۵۴]، [۵۵]و [۴٦] مراجعه نمود. این مساله محور کلی مطالب فصل سه خواهد بود. اما بطور ضمنی در فصل دوم نیز به این مساله خواهیم پرداخت. برادمن و لشگری[10] در [۱۰] نشان داده‌اند که اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه مدولهای کوهمولوژی موضعی $H_I^0(M), ..., H_I^{t-1}(M)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه برای هر زیر مدول با تولید متناهی N از $H_I^t(M)$، ایده‌آلهای اول وابسته‌ی $R-$مدول $H_I^t(M)/N$ مجموعه‌ای متناهی است. بعلاوه همزمان با آنها اسداللهی و سالاریان و خشایارمنش طی نتیجه‌ای به مراتب قویتر در [۱] پاسخ مثبتی به حدس گروتندیک به صورت زیر ارائه کرده‌اند که اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی روی حلقه موضعی R و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه $H_I^i(M)$، برای هر $i < t$، با تولید متناهی باشد، آنگاه $R-$مدول $Hom_R(R/I, H_I^t(M))$ با تولید متناهی است. بویژه آنکه $\mathrm{Ass}_R H_I^t(M)$ متناهی است. از سوی دیگر دیبایی و یاسمی در [۱۷] در یک نتیجه‌ی قویتر حکمی به صورت زیر ارائه کرده‌اند که اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی روی حلقه موضعی R و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه $H_I^i(M)$، برای هر $i < t$، $I-$هم‌متناهی باشد آنگاه $R-$مدول $Hom_R(R/I, H_I^t(M))$ با تولید متناهی است. بویژه آنکه $\mathrm{Ass}_R H_I^t(M)$ متناهی است. و حتی در [۱۹] تحت همان مفروضات، دیبایی و یاسمی نشان داده‌اند که $R-$مدول $Ext_R^1(R/I, H_I^t(M))$ نیز با تولید متناهی است. همین نتیجه یکسال بعد از آنها توسط خشایارمنش در [۴۴] با برهان دیگری به اثبات رسیده است. از سوی دیگر نهان[11] در [٦٢] ثابت کرده است که اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی روی حلقه موضعی R و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه $H_I^i(M)$، برای هر $i < t$، آرتینی باشد آنگاه $\mathrm{Ass}_R H_I^t(M)$ متناهی است. همچنین یاسمی و سهندی و برنا لرستانی در [۸] طی نتیجه‌ی قویتری ثابت کرده اند که اگر M یک $R-$مدول

[10] $Brodmann - Lashgari$

[11] $Nhan$

با تولید متناهی روی حلقه نوتری R و t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه $H_I^i(M)$، برای هر $i < t$، آرتینی باشد، آنگاه R−مدول $Hom_R(R/I, H_I^t(M))$ مینیماکس است. لازم به ذکر است که اخیراً طوسی و عسگرزاده در [۲] پا را فراتر گذاشته و همین مساله را روی کاتگوریهای سر دلخواه [12] مطالعه کرده‌اند، که خواننده‌ی علاقمند را به خواندن این مقاله‌ی جالب توصیه می کنیم.
در فصل دوم این رساله نخست نتایج فوق را برای کلاس مدولهای مینیماکس که شامل کلاس مدولهای نوتری و آرتینی می‌باشد بصورت زیر تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۱.۰ فرض کنیم R یک حلقه نوتری، I یک ایده‌آل آن و M یک R−مدول با تولید متناهی باشد. فرض کنیم t یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه مدولهای کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ به ازای هر $i < t$، مینیماکس باشند. در اینصورت برای هر زیر مدول مینیماکس N از $H_I^t(M)$، R−مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^t(M)/N)$، با تولید متناهی است و در نتیجه مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته R−مدول $H_I^t(M)/N$، متناهی است.

سپس با استفاده از آن و نتایج بدست آمده توسط دیبایی و یاسمی، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۲.۰ اگر I ایده‌آلی‌از حلقه نوتری R و $M \neq 0$ یک R−مدول با تولید متناهی باشد و

$$t = \inf\{\ f_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \ |\ \ dim(R/\mathfrak{p}) \geq 1 \ \text{و}\ \mathfrak{p} \in Supp_R(M/IM)\ \},$$

آنگاه گزاره های زیر برقرارند:
(۱) برای هر $0 \leq i < t$، R−مدول $H_I^i(M)$، مینیماکس و I−هم‌متناهی است.

---
[12] $Serre$

(۲) اگر $t < \infty$، آنگاه برای هر زیرمدول مینیماکس چون N، از R–مدول $H_I^t(M)$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^t(M)/N)$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^t(M)/N)$، با تولید متناهی هستند.

در ادامه با استفاده از نتیجه‌ی فوق، قضیه‌ی اساسی فصل دوم را بصورت زیر بیان و ثابت می‌کنیم، که تمامی تحقیقات انجام یافته در زمینه‌ی هم‌متناهی بودن مدولهای کوهمولوژی موضعی را با برهان جدیدی تعمیم می‌دهد.

قضیه ۳.۰ اگر I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و $M \neq 0$ یک R–مدول با تولید متناهی و t یک عدد طبیعی باشد، بقسمی که برای هر $0 \leq i \leq t-1$ و هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M/IM)$، با ویژگی $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq 2$، $R_\mathfrak{p}$–مدول $(H_I^i(M))_\mathfrak{p}$، با تولید متناهی است. آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i \leq t-1$، R–مدول $H_I^i(M)$، I–هم‌متناهی است.

(۲) R–مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^t(M))$، با تولید متناهی است.

نتایج متعددی از حکم فوق حاصل می‌شوند، که از جمله‌ی آنها نتایج زیر است.

نتیجه ۱ اگر I ایده‌آلی از حلقه نوتری R، $M \neq 0$ یک R–مدول با تولید متناهی و

$$s = \inf\{\ grade(IR_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \ |\ \ dim(R/\mathfrak{p}) \geq 2 \ \text{و}\ \mathfrak{p} \in Supp_R(M/IM)\ \ \},$$

آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i < s$، R–مدول $H_I^i(M)$، I–هم‌متناهی است.

(۲) اگر $s < \infty$، آنگاه برای هر زیرمدول مینیماکس چون N، از R–مدول $H_I^s(M)$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^s(M)/N)$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^s(M)/N)$، با تولید متناهی هستند.

نتیجه ۲ اگر I ایده‌آلی از حلقه نوتری R، $M \neq 0$ یک $R-$مدول با تولید متناهی و n یک عدد طبیعی باشد بقسمی که برای هر $0 \leq i \leq n-1$، داشته باشیم:

$$\dim \operatorname{Supp}_R(H_I^i(M)) \leq 1,$$

آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i \leq n-1$، $H_I^i(M)$ $R-$مدول $I-$هم‌متناهی است.

(۲) برای هر زیرمدول مینیماکس چون N، از $R-$مدول $H_I^n(M)$، $R-$مدولهای $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^n(M)/N)$ و $\operatorname{Ext}_R^1(R/I, H_I^n(M)/N)$، با تولید متناهی هستند.

نتیجه‌ی دیگر قضیه‌ی فوق تعمیم نتیجه‌ی اصلی دلفینو - مارلی [13] در [۱۶] و یوشیدا [14] در [۷۴] به یک حلقه‌ی نوتری دلخواه (نه الزاماً موضعی) بصورت زیر می باشد.

نتیجه ۳ اگر I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و $M \neq 0$ یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، بقسمی که $\dim(M/IM) \leq 1$، (برای مثال $\dim(R/I) \leq 1$)، آنگاه برای هر $i \geq 0$، $R-$مدول $H_I^i(M)$، $I-$هم‌متناهی است.

نتیجه‌ی جالب بعدی مربوط به مساله‌ی متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته‌ی مدولهای کوهمولوژی موضعی، بصورت زیر است.

نتیجه ۴ اگر I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و $M \neq 0$ یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، بقسمی که $\dim(M/IM) \leq 1$، (برای مثال $\dim(R/I) \leq 1$)، آنگاه برای هر $i \geq 0$ و هر زیرمدول مینیماکس از $R-$مدول $H_I^i(M)$، مثل N، $R-$مدول $H_I^i(M)/N$، $I-$هم‌متناهی است. بویژه $\operatorname{Ass}_R(H_I^i(M)/N)$ مجموعه‌ای متناهی است.

---

[13] $Delfino - Marley$

[14] $Yoshida$

نتیجه‌ی دیگر یک تعمیم از قضیه‌ی B، آمده در [۴۶]، است .

نتیجه ۵ اگر I ایده‌آلی‌از حلقه نوتری R، $M \neq 0$ یک R–مدول با تولید متناهی و n یک عدد طبیعی باشد بقسمی که برای هر $0 \leq i \leq n-1$، $\mathrm{Supp}_R(H_I^i(M))$، مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i \leq n-1$، R–مدول $H_I^i(M)$، I–هم‌متناهی است.

(۲) برای هر زیرمدول مینیماکس چون N، از R–مدول $H_I^n(M)$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^n(M)/N)$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^n(M)/N)$، با تولید متناهی هستند.

بالاخره آنکه نتیجه‌ی بعدی حکم اصلی آمده در قضیه‌ی ۶.۵ از [۶۲] را تعمیم می دهد.

نتیجه ۶ اگر I ایده‌آلی‌از حلقه‌ی موضعی و نوتری $(R, \mathfrak{m})$ و $M \neq 0$ یک R–مدول با تولید متناهی باشد، بقسمی که $\dim(M/IM) \geq 2$. آنگاه با فرض $g\mathrm{depth}(I, M) = t$، گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i \leq t-1$، R–مدول $H_I^i(M)$، I–هم‌متناهی است.

(۲) برای هر زیرمدول مینیماکس چون N، از R–مدول $H_I^t(M)$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^t(M)/N)$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^t(M)/N)$، با تولید متناهی هستند.

(۳) برای هر $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{Ass}_R(H_I^i(M))$، مجموعه‌ای متناهی است.

(۴) $t = \min\{i \mid \dim \mathrm{Supp}_R(H_I^i(M)) > 1\}$.

در انتهای فصل دوم نتایجی درباره‌ی مدولهای هم‌مینیماکس ارائه می‌دهیم، از جمله نتیجه‌ی زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

نتیجه ۷ فرض کنید $I \subseteq J$ دو ایده‌آل سره از حلقه نوتری R باشند بطوریکه $\dim(R/I) = 1$ و $M \neq 0$ یک R–مدول I–هم‌متناهی باشد . در اینصورت

(۱) اگر $\dim(R/J) = 0$ ، آنگاه مدولهای کوهمولوژی $H_J^j(H_I^i(M))$ ، J–هم‌متناهی و آرتینی

هستند.

(۲) اگر $\dim(R/J)=1$ ، آنگاه مدولهای کوهمولوژی $H_J^j(H_I^i(M))$ ، $J-$هم‌مینیماکس هستند.

لیوبزنیک [15] در [۵۱، تبصره ۷.۳(iii)] حدسی بصورت زیر مطرح ساخت:

اگر R یک حلقه‌ی نوتری منظم و I ایده‌آلی از آن باشد، آنگاه برای هر $i \geq 0$، مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^i(R)$، فقط دارای تعداد متناهی ایده‌آل اول وابسته است.

برای حلقه‌های منظم با مشخصه عدد اول توسط هونیکه و شارپ[16] در [۴۰] و برای حلقه‌های منظم موضعی که شامل یک میدان با مشخصه صفر می‌باشند، توسط لیوبزنیک، در [۵۲] به این مساله جواب مثبت داده شده است. البته ریاضی‌دانان معتقد هستند که این مساله برای تمامی حلقه‌های منظم موضعی درست است. در واقع این مساله برای حلقه‌های منظم موضعی شامل یک میدان توسط هونیکه– شارپ و لیوبزنیک ثابت شده است. در فصل سوم این رساله نخست یک جواب مثبت به حدس لیوبزنیک، بصورت زیر ارائه خواهیم داد.

گزاره ۴.۰ فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری منظم از بعد d و I یک ایده‌آل از R باشد. در اینصورت مجموعه‌ی $\mathrm{Ass}_R H_I^2(R)$ متناهی است.

همچنین با استفاده از مطالب فصل دوم قضیه‌ی زیر را در رابطه با خواص مدولهای کوهمولوژی موضعی از نقطه نظر لاسکرین ضعیف بودن، و به تبع آن خواص مربوط به متناهی بودن ایده‌آلهای اول وابسته، در ادامه‌ی فصل سوم بیان و اثبات خواهیم کرد.

---

[15] $Lyubeznik$

[16] $Huneke - Sharp$

قضیه ۵.۰ اگر I ایده‌آلی‌از حلقه‌ی موضعی و نوتری $(R,\mathfrak{m})$، $M \neq 0$ یک $R-$مدول با تولید متناهی و n یک عدد طبیعی باشد بقسمی که برای هر $0 \leq i \leq n-1$، داشته باشیم:

$$\dim \operatorname{Supp}_R(H_I^i(M)) \leq 2,$$

آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i \leq n-1$، و هر $j \geq 0$، $R-$مدول $\operatorname{Ext}_R^j(R/I, H_I^i(M))$ و $R-$مدوهای $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^n(M))$ و $\operatorname{Ext}_R^1(R/I, H_I^n(M))$، همگی لاسکرین ضعیف هستند.

(۲) برای هر زیرمدول لاسکرین ضعیف چون N، از $R-$مدول $H_I^n(M)$، $R-$مدولهای $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^n(M)/N)$ و $\operatorname{Ext}_R^1(R/I, H_I^n(M)/N)$ ، لاسکرین ضعیف هستند.

(۳) برای هر $0 \leq i \leq n$، مجموعه‌ی $\operatorname{Ass}_R H_I^i(M)$ متناهی است.

یک نتیجه‌ی دیگر از قضیه‌ی فوق نتیجه‌ای بصورت زیر است، که نتیجه‌ی مهمی در مورد متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته‌ی مدولهای کوهمولوژی موضعی است.

نتیجه ۸ اگر I ایده‌آلی‌از حلقه‌ی موضعی و نوتری $(R,\mathfrak{m})$ و $M \neq 0$ یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، بقسمی که $\dim(M/IM) \leq 2$ (برای مثال $\dim(R/I) \leq 2$)، آنگاه برای هر $i \geq 0$ و هر $j \geq 0$، $R-$مدول $\operatorname{Ext}_R^j(R/I, H_I^i(M))$ ، لاسکرین ضعیف است. بویژه آنکه برای هر $i \geq 0$ ، مجموعه‌ی $\operatorname{Ass}_R H_I^i(M)$ متناهی است.

نتیجه‌ی جالب دیگر قضیه‌ی فوق در فصل سوم بصورت زیر است.

نتیجه ۹ اگر I ایده‌آلی از حلقه‌ی موضعی و نوتری $(R,\mathfrak{m})$، $M \neq 0$ یک $R-$مدول با تولید متناهی و

$$s = \inf\{\ grade(IR_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) \mid \ \ dim(R/\mathfrak{p}) \geq 3 \ \text{ و } \ \mathfrak{p} \in Supp_R(M/IM) \ \ \},$$

آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i < s$، و هر $j \geq 0$، R–مدول $\mathrm{Ext}_R^j(R/I, H_I^i(M))$ و با فرض $s < \infty$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^s(M))$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^s(M))$، همگی لاسکرین ضعیف هستند.

(۲) اگر $s < \infty$، آنگاه برای هر زیرمدول لاسکرین ضعیف چون N، از R–مدول $H_I^s(M)$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^s(M)/N)$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^s(M)/N)$، لاسکرین ضعیف هستند.

(۳) اگر $s < \infty$، آنگاه برای هر $0 \leq i \leq s$، مجموعه‌ی $\mathrm{Ass}_R H_I^i(M)$ متناهی است.

قضیه‌ی مهم دیگر آمده در فصل سوم در مورد حلقه‌های موضعی و نوتری کامل، بصورت زیر است.

قضیه ۶.۰ اگر I ایده‌آلی‌از حلقه‌ی موضعی، نوتری و کامل $(R, \mathfrak{m})$ و $M \neq 0$ یک R–مدول با تولید متناهی و

$$t = \inf\{\ f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \ dim(R/\mathfrak{p}) \geq 3 \ \text{و}\ \mathfrak{p} \in Supp_R(M/IM)\ \},$$

آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $0 \leq i < t$ و هر $j \geq 0$، R–مدول $\mathrm{Ext}_R^j(R/I, H_I^i(M))$ و با فرض $t < \infty$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^t(M))$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^t(M))$، همگی لاسکرین ضعیف هستند.

(۲) اگر $t < \infty$، آنگاه برای هر زیرمدول لاسکرین ضعیف چون N، از R–مدول $H_I^t(M)$، R–مدولهای $\mathrm{Hom}_R(R/I, H_I^t(M)/N)$ و $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, H_I^t(M)/N)$، لاسکرین ضعیف هستند.

(۳) اگر $t < \infty$، آنگاه برای هر $0 \leq i \leq t$، مجموعه‌ی $\mathrm{Ass}_R H_I^i(M)$ متناهی است.

فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی ونوتری و $E := E_R(R/\mathfrak{m})$ پوشش انژکتیو R–مدول $R/\mathfrak{m}$ باشد. بعلاوه فرض کنید $D_R(-)$ عبارت باشد از فانکتور پادورد $\mathrm{Hom}_R(-, E)$، که به فانکتور

دوگان ماتلیس[17] موسوم است.

در فصل چهار نخست ایده‌آلهای اول وابسته‌ی مدولهای $D_R(H^i_{(x_1,\ldots,x_i)}(R))$ را روی حلقه‌ی موضعی ونوتری $(R,\mathfrak{m})$، در حالتی که $x_1,\ldots,x_i$ بخشی از یک دستگاه پارامتری برای R باشد بررسی می‌کنیم. به بیان دقیقتر، نشان می‌دهیم که:

قضیه ۷.۰ فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری از بعد d، و $x_1,\ldots,x_d$ یک دستگاه پارامتری برای R باشد. در اینصورت برای هر $1 \leq i \leq d-1$، مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته‌ی R−مدول $D_R(H^i_{(x_1,\ldots,x_i)}(R))$ نامتناهی است.

در واقع برای اثبات قضیه‌ی فوق نخست این واقعیت را ثابت می‌کنیم که:

گزاره ۸.۰ فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری از بعد d، و $x_1,\ldots,x_d$ یک دستگاه پارامتری برای R باشد. در اینصورت برای هر $1 \leq i \leq d-1$، اگر

$$T = \{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \ \mid\ \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = d-i \,\},$$

آنگاه مجموعه‌ی

$$S := \{\ \mathfrak{p} \in T \mid \text{است.}\ R/\mathfrak{p}\ \text{یک دستگاه پارامتری برای}\ \ x_1+\mathfrak{p},\ldots,x_i+\mathfrak{p}\ \ \},$$

نامتناهی است.

برای اثبات گزاره‌ی فوق نخست لم جالب زیر را ثابت می‌کنیم:

لم ۹.۰ فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری از بعد d، و $x_1,\ldots,x_d$ یک دستگاه پارامتری برای R باشد. در اینصورت برای هر $1 \leq i \leq d$، ایده‌آل اول مینیمالی چون $\mathfrak{p}$ روی $(x_1,\ldots,x_i)$ موجود است، بقسمی که $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = i$ و $\dim(R/\mathfrak{p}) = d-i$.

[17] *Matlis dual functor*