دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض – گرایش آنالیز

موضوع:

C^*-جبرها در آنالیز عددی

نگارش:

مهدیه معنوی

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوروزی

استاد مشاور:

دکتر علی ذاکری

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

ساحت مقدس امام عصر ارواحنا فداه،

مادر مهربانم که هرچه دارم از اوست،

پدر عزیزم که وجودش هستی‌بخش ماست،

و همچنین آنان که با ابزار دانش در راه آسایش و رستگاری انسان می‌کوشند و به سوی هدفی والا ره می‌سپارند و روز و شب پیوسته در خیال خویش وظیفه‌ای مشخص با عشقی بزرگ دارند.

اظهارنامه‌ی دانشجو

موضوع پایان‌نامه: C^*-جبرها در آنالیز عددی

استاد راهنما: دکتر کوروش نوروزی

نام دانشجو: مهدیه معنوی

شماره‌ی دانشجویی: ۸۸۰۴۴۹۴

اینجانب **مهدیه معنوی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارایه‌شده در پایان‌نامه با عنوان « **C^*-جبرها در آنالیز عددی**»، با راهنمایی استاد محترم **جناب آقای دکتر کوروش نوروزی**، توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش‌شده مورد تأیید می‌باشد و در موارد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده‌است. به علاوه، گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه، تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ‌جا ارایه نشده‌است و در تدوین متن پایان‌نامه، چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضای دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

با ژرفترین سپاس‌ها:

—از لطف بی‌پایان الهی که مرا توفیق آموختن عطا کرد.

—از قلب پاک مادر و پدرم برای همه‌ی محبت‌ها، حمایت‌ها و تشویق‌هایشان.

—از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر کوروش نوروزی که راهنمای اینجانب در دوره‌ی کارشناسی ارشد بوده‌اند و هدایت این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند.

—از استاد مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر علی ذاکری.

—و از اساتید گرانقدر، جناب آقای دکتر آقاجانی و جناب آقای دکتر پروانه مسیحا که زحمت خواندن این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند و در جلسه‌ی دفاعیه حضور به هم رساندند.

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا به مطالعه‌ی بخش‌های متناهی از ماتریس‌های نامتناهی پرداخته سپس در مورد C^*-جبرهایی بحث می‌شود که شامل همه‌ی عملگرهای تپلیتزی است که با توابع پیوسته یا ناپیوسته ساخته می‌شوند. هم‌چنین به کمک برخی نتایج این C^*-جبرها به بحث درباره‌ی سوالاتی در آنالیز عددی می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: پایداری؛ طیف؛ اعداد شرطی؛ عملگر تپلیتز؛ عملگر فردهولم؛ C^*-جبر؛ ایده‌آل‌های سیلبرمن؛ مقادیر ویژه‌ی ماتریس؛ وارون‌سازی مور—پنرز.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

ایده‌ی به کار گیری C^*−جبرها برای مسائل آنالیز عددی، اوائل دهه‌ی ۱۹۸۰ مطرح شد. در آغاز این دهه، سیلبرمن[۱] روشی جدید برای انتقال مسئله‌ی پایداری روش بخش متناهی[۲] برای عملگرهای تپلیتز، به مسئله‌ی وارون‌پذیری در جبرهای باناخ کشف کرد. وی با به کار بردن تکنیک‌های قوی جبرهای باناخ، توانست نتایج خوبی را ثابت کند. پس از آن آشکار شد که جبرهای باناخ می‌توانند در بسیاری از موقعیت‌های جالب به وسیله‌ی C^*−جبرها جایگزین شوند. از آن جا که C^*−جبرها خواص خوبی دارند که جبرهای باناخ کلی دارای آن‌ها نیستند، این موضوع باعث شناخته شدن نتایج متعددی از آنالیز عددی و ارائه‌ی اثبات‌های بسیار ساده و روشنی از چندین قضیه‌ی عمیق و باز کردن دریچه‌ای به سوی نتایجی جدید شد. شاید نخستین کاربرد صریح C^*−جبرها در رابطه با مسئله‌ای در آنالیز عددی، در مقاله‌ی [۲] توسط سیلبرمن و بوچر[۳] بیان شده است.

در رابطه با آنالیز عددی ماتریس‌های تپلیتز[۴]، کاربرد C^*−جبرها در [۳] و [۴] آمده است.

در فصل اول این پایان‌نامه، به معرفیِ عملگرهای تپلیتز می‌پردازیم؛ در فصل دوم C^*−جبرهای روی این عملگرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در فصل سوم از این C^*−جبرها برای حلِ برخی از مسائل مشکل در آنالیز عددی، استفاده می‌کنیم.

شایان ذکر است که شماره‌هایی که در مقابل تعاریف، قضایا و ... و همچنین در متن پایان‌نامه

---

[۱] Silbermann

[۲] Finite section

[۳] Böttcher

[۴] Toeplitz

داخل قلاب آورده شده‌اند، شماره‌ی مراجعی هستند که کل یا قسمتی از این مطالب از آن‌ها برداشت شده‌است و ممکن است آن مراجع برای اولین بار مطلب مورد نظر را ذکر نکرده‌باشند. هم‌چنین، عمده مطالب این پایان‌نامه از مرجع [۲] می‌باشد. بدین منظور هر جا مرجعی ذکر نگردیده یعنی گزاره‌ی مربوطه از [۲] اختباس شده است.

به هر حال، با وجود این که سعی زیادی به عمل آمده‌است تا این پایان‌نامه از هر حیث بدون اشکال باشد، ولی یقیناً این‌طور نیست. اما هر چه که هست آن را در طَبَق اخلاص گذاشته و به محققین و دوستداران ریاضی تقدیم می‌نمایم.

مهدیه معنوی
دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تهران، شهریور ۱۳۹۰

فصل ۱

تعاریف اولیه

در این فصل، بخش‌های متناهی ماتریس های نامتناهی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سؤالاتی در مورد ارتباط بین این بخش‌های متناهی با ماتریس‌های نامتناهی‌شان مطرح می‌کنیم؛ در ادامه این سؤالات را با عملگرهای مختلف پاسخ می‌دهیم.
مهمترین معرفی‌ای که در این فصل انجام می‌شود، معرفی عملگرهای تپلیتز می‌باشد.

۱.۱ بخش‌های متناهی ماتریس‌های نامتناهی

در این بخش، در مورد بخش‌های متناهی ماتریس‌های نامتناهی صحبت خواهد شد.
فرض کنید $\mathcal{B}(l^{۲})$ مجموعه‌ی همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت $l^{۲} := l^{۲}(\{۱, ۲, ۳, ...\})$ باشد. همچنین به ازای $A \in \mathcal{B}(l^{۲})$ مسأله‌ی

$$Ax = y \qquad (۱.۱.۱)$$

را که در آن $x \in l^{۲}$ مجهول و $y \in l^{۲}$ معلوم می‌باشند، در نظر بگیرید. این مسأله منجر به یک دستگاه معادلات خطی با تعداد نامتناهی معادله و متغیر به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{۱} \\ y_{۲} \\ y_{۳} \\ \vdots \end{pmatrix}. \qquad (۲.۱.۱)$$

با استفاده از روش تصویر می‌توان از دستگاه (۲.۱.۱) به دستگاه زیر رسید:

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_{۱}}^{(n)} \\ \vdots \\ {x_{n}}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{۱} \\ \vdots \\ y_{n} \end{pmatrix}. \qquad (۳.۱.۱)$$

بنابراین، برای $n = ۱, ۲, ۳, ...$ نگاشت تصویری P_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_n : l^{۲} \longrightarrow l^{۲}, \quad (x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}, ...) \longmapsto (x_{۱}, x_{۲}, ..., x_n, ۰, ۰, ...). \qquad (۴.۱.۱)$$

در ادامه، تصویر P_n، ImP_n را با $\mathbb{C}^n$ نشان می‌دهیم. به علاوه، $\mathbb{C}^n$ را با نرم $l^۲$، که $l^۲$ فضای تمام دنباله‌های $x = (x_۱, x_۲, ...)$ با جمع و ضرب اسکالر معمول دنباله‌ها، با نرم

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^۲\Big)^{\frac{۱}{۲}}$$

می‌باشد، مجهز می‌کنیم.

ماتریس

$$A_n := \begin{pmatrix} a_{۱۱} & \dots & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (۵.۱.۱)$$

می تواند با P_nAP_n مشخص شود و همچنین، معادله‌ی (۳.۱.۱) را به فرم زیر نوشت:

$$A_n x^{(n)} = P_n y, \qquad x^{(n)} \in \mathbb{C}^n. \qquad (۶.۱.۱)$$

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید A^H، مزدوج ترانهاده‌ی ماتریس مربعیِ A (ماتریس الحاقی) باشد؛ یعنی $(a_{ij})^H = (\bar{a}_{ji})$. آنگاه نرم طیفی [۱] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|A\|_۲ \;\; = \;\; \Big(\text{ماکزیمم مقدار ویژه‌ی } A^H A\Big)^{\frac{۱}{۲}} = \max_{x \neq ۰} \frac{\|Ax\|_۲}{\|x\|_۲}$$

رجوع کنید به [[۷] تعریف ۱.۷.۱].

مثال ۲.۱.۱ ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$A^H A = \begin{pmatrix} ۵ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۳۴ \end{pmatrix}.$$

[۱] Spectral norm

در نتیجه چون مقادیر ویژه‌ی A^HA، ۰/۰۲ و ۳۸/۹۷ می‌باشد، آنگاه

$$\|A\|_۲ = ۶/۲۴.$$

فرض کنید عملگر A وارون‌پذیر باشد. سؤالات مطروحه عبارت‌اند از:

۱− آیا برای nهای به قدر کافی بزرگ، ماتریس‌های A_n وارون‌پذیر هستند؟

۲− آیا برای هر $y \in l^۲$، جوابهای $x^{(n)}$ از رابطه‌ی (۶.۱.۱) به جواب x از رابطه ی (۱.۱.۱) همگرا می‌باشد؟

ملاحظه کنید که $x^{(n)}$ عضوی از $l^۲$ است و همگرایی $x^{(n)}$ به x به این معنی است که $x^{(n)} \longrightarrow x$ در $l^۲$. اگر جواب سؤال بالا مثبت باشد، آنگاه می‌گوییم روش بخش متناهی برای عملگر A همگراست. به طور معادل، روش بخش متناهی همگراست اگر و تنها اگر ماتریس‌های A_n برای nهای به قدر کافی بزرگ، وارون‌پذیر باشد و ${A_n}^{-۱}$ بطور قوی[۲] به $A^{-۱}$ همگرا باشد. چنین نتایجی را در بخش ۳.۱ مشاهده خواهید کرد.

بنابراین، همگرایی قوی ${A_n}^{-۱} \longrightarrow A^{-۱}$ به این معنی است که برای همه‌ی $y \in l^۲$،

$$A_n^{-۱} P_n y \longrightarrow A^{-۱} y.$$

تعریف ۳.۱.۱ دنباله ی $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که A_nها ماتریس‌های $n \times n$ می‌باشند، پایدار[۳] نامیده می‌شود، هرگاه برای nهای به قدر کافی بزرگ، ماتریس‌های A_n وارون‌پذیر باشند و

$$\exists\, n_۰ \in \mathbb{N} \quad : \sup_{n \geqslant n_۰} \|{A_n}^{-۱}\| < \infty.$$

در اینجا $\|\cdot\|$ نرم عملگر روی $\mathbb{C}^n$ می‌باشد که به نرم $l^۲$ وابسته است (در شرایط دیگر، $\|\cdot\|$ نرم طیفی است).

---

[۲] Strongly

[۳] Stable

مثال ۴.۱.۱ ماتریس سه قطری A_n را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A_n = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & & \\ -۱ & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -۱ \\ & & -۱ & ۲ \end{pmatrix}.$$

بنابراین، طبق [۲۱] چون وارون ماتریس سه قطری A_n همواره وجود دارد، پس برای $n \geqslant ۳$،

$$\sup_{n\geqslant ۳} \|{A_n}^{-۱}\| < \infty.$$

درنتیجه $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$، یک دنباله‌ی پایدار می‌باشد.

قرار داد می‌کنیم $\|B^{-۱}\| = \infty$ هرگاه B وارون‌پذیر نباشد. با این قرارداد، می‌توان گفت دنباله‌ی $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ پایدار است اگر و تنها اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \|{A_n}^{-۱}\| < \infty$.

گزاره‌ی ۵.۱.۱ اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه روش بخش متناهی برای A همگراست اگر و تنها اگر دنباله‌ی $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که A_nها ماتریس‌های $n \times n$ معرفی شده در (۵.۱.۱) می‌باشند، پایدار باشد.

توجه کنید که این نتیجه، یک قاعده‌ی کلی در آنالیز عددی می‌باشد؛ یعنی

$$\text{همگرایی} = \text{پایداری} + \text{سازگاری}.$$

چون به طور قوی $A_n = P_nAP_n \longrightarrow A$، خاصیت تقریب به طور خودکار برقرار است. سؤالی که در اینجا می‌توان مطرح کرد، این است که آیا همگرایی روش بخش متناهی، این نتیجه را می‌دهد که دنباله‌ی $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ پایدار است؟

گزاره‌ی زیر نشان می‌دهد که در دنباله‌ی ماتریس‌های (۵.۱.۱)، اگر A وارون‌پذیر نباشد، آنگاه پایدار نیست.

گزاره‌ی ۶.۱.۱ اگر دنباله ی $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از ماتریس‌های (۵.۱.۱)، پایدار باشد، آنگاه A وارون‌پذیر است.

برهان. طبق فرض مسأله $n_\circ$ی وجود دارد، به طوری که برای هر $n \geqslant n_\circ$، $\|{A_n}^{-۱}\| \leqslant M$. پس اگر $x \in l^۲$ و $n \geqslant n_\circ$، آنگاه

$$\|P_nx\| = \|{A_n}^{-۱}A_nx\| \leqslant M\|A_nx\| = M\|P_nAP_nx\|,$$

و وقتی $n \longrightarrow \infty$، برای هر $x \in l^2$ داریم:

$$\|x\| \leqslant M\|Ax\|. \qquad (7.1.1)$$

حال فرض کنید $Ax = 0$، آنگاه

$$\|x\| \leqslant M\|Ax\| \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0\,.$$

بنابراین A وارون‌پذیر است. ■

عکس قضیه‌ی بالا درست نیست؛ به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۷.۱.۱ قرار می‌دهیم

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$A = \operatorname{diag}(B, B, B, ...).$$

آنگاه A وارون‌پذیر و خودالحاق است. اما چون ماتریس A_n برای nهای فرد، شامل ستون صفر می‌باشد، درنتیجه این ماتریس‌ها وارون‌پذیر نیستند؛ که این نتیجه می‌دهد دنباله‌ی $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایدار نیست.

طیف عملگر خطی کراندار B را که با $sp\,B$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$sp\,B := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ B - \lambda I \text{ واون‌پذیر نباشد } \}\,.$$

مثال ۸.۱.۱ اگر X یک فضای توپولوژیک فشرده و $f \in C(X)$ آنگاه $sp\,(f) = f(X)$. زیرا اگر $\alpha = f(x_0)$، آنگاه $f - \alpha$ دارای ریشه‌ی x_0 است و لذا وارون‌پذیر نیست، بنابراین $f(X) \subset sp\,(f)$. از طرف دیگر اگر $\alpha \notin f(X)$، آنگاه تابع پیوسته $f - \alpha$ دارای هیچ ریشه در X نیست، بنابراین $(f-\alpha)^{-1} \in C(X)$ و لذا $f - \alpha$ وارون‌پذیر است. پس $\alpha \notin sp\,(f)$، یعنی $sp\,(f) \subset f(X)$.

برای $A \in \mathcal{B}(l^2)$، فرض کنید ماتریس‌های A_n، ماتریس‌های مورد نظر در (۵.۱.۱) باشند. سؤالی که در اینجا مطرح می شود این است که، چه رابطه‌ای بین طیف ماتریس‌های A_n (در واقع مقادیر ویژه ی A_n) و طیف عملگر A وجود دارد؟ آیا برای nهای به قدر کافی بزرگ، مقادیر ویژه‌ی A_n، اطلاعاتی در مورد طیف A می دهد؟ و یا برعکس، اگر طیف A مشخص باشد، آیا برای nهای به قدر کافی بزرگ، در مورد مقادیر ویژه A_n می‌توان اطلاعاتی ارائه داد؟

فرض کنید $A \in \mathcal{B}(l^2)$ و A_nها نیز از (۵.۱.۱) گرفته شده باشند. اعداد شرطی $k(A) := \|A\|\,\|A^{-1}\|$ و $k(A_n) := \|A_n\|\,\|A_n{}^{-1}\|$ را در نظر بگیرید. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که چه رابطه‌ای بین این اعداد شرطی وجود دارد؟ پاسخ این سؤال، در فصل ۲ آورده شده است. و همچنین، از آنجایی که،

$$\|A_n\| = \|P_nAP_n\| \longrightarrow \|A\|, \quad n \longrightarrow \infty$$

آیا برای nهای به قدر کافی بزرگ، $\|A^{-1}\| \longrightarrow \|A_n{}^{-1}\|$؟

گزاره‌ی ۹.۱.۱ اگر دنباله‌ی $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ از ماتریس های (۵.۱.۱) پایدار باشند، آنگاه

$$\|A^{-1}\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n^{-1}\| \tag{۸.۱.۱}$$

برهان. طبق فرض مسأله، n_0ی وجود دارد، به طوری که برای هر $n \geqslant n_0$، $\|A_n\|^{-1} \leqslant M$. ابتدا ثابت می‌کنیم، برای هر $x \in l^2$، $A_n{}^{-1}P_nx \longrightarrow A^{-1}x$. داریم

$$\begin{aligned}\|A_n^{-1}P_nx - A^{-1}x\| &\leqslant \|A_n^{-1}P_nx - P_nA^{-1}x\| + \|P_nA^{-1}x - A^{-1}x\| \\ &\leqslant M\|P_nx - A_nP_nA^{-1}x\| + \|P_nA^{-1}x - A^{-1}x\|.\end{aligned}$$

چون $A_nP_n \longrightarrow A$ و $P_n \longrightarrow I$ پس برای هر $x \in l^2$،

$$A_n^{-1}P_nx \longrightarrow A^{-1}x.$$

در نتیجه

$$\|A^{-1}\| = \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n^{-1}P_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n^{-1}\|\|P_n\|.$$

از آنجایی که $\|P_n\| = ۱$ بنابراین

$$\|A^{-۱}\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n^{-۱}\|.$$

■

۲.۱ عملگرهای فشرده

در این بخش، برخی از سؤالاتی که در بخش قبل مطرح شدند، برای حالتی که $A = I + K$ که K یک عملگر فشرده و I یک عملگر همانی می‌باشند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا به تعریف عملگر خطی فشرده می‌پردازیم:

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X, Y فضاهای نرمدار باشند. عملگر $A : X \longrightarrow Y$، عملگر خطی فشرده نامیده می‌شود هرگاه T خطی و برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار M از X، $\overline{T(M)}$ فشرده باشد.

فرض کنید $\mathcal{K}(l^۲)$ مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای فشرده روی $l^۲$ باشد. P_n را همانطور که تعریف کردیم در نظر می‌گیریم. نکته‌ای که باید توجه کرد این است که، P_n یک عملگر همانی روی $\mathbb{C}^n$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان $I + P_nKP_n$ را به جای $P_n + P_nKP_n$ در نظر گرفت.

لم ۲.۲.۱ فرض کنید E و F دو فضای باناخ باشند. مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های خطی پیوسته از E به توی F را با $L(E, F)$ نمایش می‌دهیم. همچنین زیرمجموعه‌ی $L(E, F)$، تشکیل شده از ایزومورفیسم‌هایی از E به F را نیز با $\mathrm{Is}(E, F)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت، نگاشت $u \longrightarrow u^{-۱}$ از $\mathrm{Is}(E, F)$ در $L(E, F)$، یک نگاشت پیوسته است.

برهان. رجوع کنید به [[٦] قضیه‌ی ۳.۷.۱]. ■

لم ۳.۲.۱ فشردگی K، همگرایی یکنواخت P_nKP_n به K را نتیجه می‌دهد.

برهان. رجوع کنید به [۱۵]. ■

گزاره‌ی ۴.۲.۱ فرض کنید $K \in \mathcal{K}(l^{2})$. دنباله‌ی $\{I + P_nKP_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایدار است اگر و تنها اگر $I + K$ وارونپذیر باشد؛ علاوه بر این،

$$\lim_{n\to\infty} \|(I + P_nKP_n)^{-1}\| = \|(I + K)^{-1}\|.$$

برهان. اگر دنباله‌ی $\{I + P_nKP_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایدار باشد، آنگاه طبق گزاره‌ی ۶.۱.۱، $I + K$ وارون‌پذیر است. برای اثبات عکس این مطلب، فرض کنید $I + k$ وارون‌پذیر باشد. طبق لم ۲.۲.۱ چون

$$\mathrm{Is}(l^{2}, l^{2}) \longrightarrow \mathrm{Is}(l^{2}, l^{2}), \quad f \longrightarrow f^{-1}$$

پیوسته است، بنابراین، برای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ چنان موجود است که

$$\|f - (I + K)\| < \delta \implies \|f^{-1} - (I + K)^{-1}\| < \varepsilon.$$

چون P_nKP_n همگرای یکنواخت به K است، پس $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که،

$$\forall n \geqslant N, \qquad \|(P_nKP_n + I) - (I + K)\| < \delta,$$

δ به گونه‌ای انتخاب شود که $\|I + K\| - \delta > 0$. درنتیجه $P_nKP_n + I$ وارون‌پذیر است هرگاه $n \geqslant N$ و

$$\sup_{n\geqslant N} \|(P_nKP_n)^{-1}\| \leqslant \varepsilon + \|(I + K)^{-1}\|. \qquad (۹.۲.۱)$$

که این ثابت می‌کند، دنباله‌ی $\{I + P_nKP_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایدار است.

همچنین طبق (۸.۱.۱) و (۹.۲.۱) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \|(I + P_nKP_n)^{-1}\| = \|(I + K)^{-1}\|.$$

■

تعریف ۵.۲.۱ اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه حد بالا[۴] و حد پایین[۵] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n, \quad \liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

---

[۴] limit superior

[۵] limit inferior

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{C}$ است. مجموعه‌ی حد یکنواخت[۶]، $\lim_{n\to\infty} \inf E_n,$ مجموعه‌ی همه‌ی $\lambda \in \mathbb{C}$ هایی است که $\lambda_1 \in E_1, \lambda_2 \in E_2, \lambda_3 \in E_3, \ldots$ وجود داشته باشند به طوری که $\lambda_n \longrightarrow \lambda$.
همچنین، مجموعه‌ی حد جزئی[۷]، $\lim_{n\to\infty} \sup E_n$، مجموعه‌ی همه‌ی $\lambda \in \mathbb{C}$ هایی است که $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ و $\lambda_{n_k} \in E_{n_k}$ وجود داشته باشند به طوری که $\lambda_{n_k} \longrightarrow \lambda$. واضح است که

$$\lim_{n\to\infty} \inf E_n \subseteq \lim_{n\to\infty} \sup E_n \,.$$

گزاره‌ی ۷.۲.۱ اگر $K \in \mathcal{K}(l^2)$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \inf sp(I + P_nKP_n) = \lim_{n\to\infty} \sup sp(I + P_nKP_n) = sp(I + K).$$

برهان. برای اثبات این گزاره کافی است نشان دهیم،

$$sp\, K \subset \lim_{n\to\infty} \inf sp(P_nKP_n).$$

چون K فشرده است، پس $sp\, K$ مجموعه‌ای حداکثر شمارا است و $(sp\, K)' \subset \{0\}$.
λ_0 را نقطه‌ی منزوی $sp\, K$ فرض می‌کنیم و آن را ثابت در نظر می‌گیریم. اگر $\varepsilon > 0$ به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه برای λ هایی که روی دایره‌ی $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ قرار دارند، به طور یکنواخت

$$\|(P_nKP_n - \lambda I)^{-1} - (K - \lambda I)^{-1}\| \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow \infty\,,$$

بنابراین، تصویرهای ریس[۸]

$$\prod_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (P_nKP_n - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

---

[۶] Uniform limiting set
[۷] Partial limiting set
[۸] Riesz projections