دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه :

روش آنالیز هوموتوپی و کاربردهای آن

استاد راهنما :

دکتر جعفر بی آزار

استاد مشاور :

دکتر شهریار فرهمند

نگارش :

سیده انسیه دژپسند

ماه و سال

تیر ۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

روش آنالیز هوموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

سیده انسیه دژپسند

در این پایان نامه روش آنالیز هوموتوپی، برای به دست آوردن جواب دقیق و یا تقریب مناسبی برای جواب، معادلات خطی و غیر خطی به کار رفته است. برای نشان دادن توانایی های این روش تعدادی مثال ارائه شده است. نتایج حاصل، قابلیت و سادگی روش را آشکار می سازد. روش آنالیز هوموتوپی شامل یک پارامتر کمکی $\hbar$ است که این پارامتر راه ساده ای برای کنترل ناحیه همگرایی سری جواب فراهم می کند.

محاسبات با استفاده از نرم افزار میپل ۱۳ انجام شده است.

واژه های کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی، روش آنالیز هوموتوپی، روش تجزیه آدومین، روش آشفتگی هوموتوپی.

فهرست مطالب

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل ها

عنوان **صفحه**

پیش گفتار

سالهاست که آنالیز تواناترین شاخه ریاضیات بوده و مبحث معادلات دیفرانسیل بخش عمده آن است. هدف اولیه ی معادلات دیفرانسیل آن است که وسیله ای برای مطالعه تغییرات جهان مادی فراهم آورد. نظریه معادلات دیفرانسیل، بهترین و عمومی ترین نظریه ریاضی است که به وسیله ی آن بسیاری از قوانین طبیعی و انسانی را می توان تبیین نمود. این نظریه شاخه ای از آنالیز ریاضی است که از دو دسته ی معادلات دیفرانسیل معمولی، و معادلات دیفرانسیل جزئی تشکیل شده است. کار بر روی این نظریه در قرن هفدهم میلادی توسط توابع مقدماتی آغاز شد. در قرن هجدهم میلادی با بررسی تار مرتعش، اولین معادله دیفرانسیل جزئی پدید آمد. سپس اویلر ضمن بررسی شرایط وجود و یکتایی جواب، به حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از سری های توانی پرداخت که بعدها این روش توسط فوریه کامل و به نام او ثبت گردید. تاکنون نظریه معادلات دیفرانسیل عرصه بهترین تحقیقات ریاضی بوده و منشأ ابداع نظریه های گوناگون در ریاضی و علوم دیگر گردیده است. هم چنین با توجه به رابطه نزدیک آن با علوم دیگر، مخصوصاً فیزیک به نقش کلیدی و اهمیت وافر آن می توان پی برد. معادلات ناشی از زمینه ی تکنولوژی، بسیار پیچیده هستند. این معادلات معمولاً دارای ضرایب متغیر بوده، غیر خطی هستند، مرزهای نامنظم دارند و به صورت دستگاه های توأم از انواع مختلف (مثلاً سهموی و هذلولوی) ظاهر می شوند.

در ریاضیات محض، روش های حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از شیوه های تحلیلی مانند انتگرالگیری یا بسط به سری خاص، مورد بررسی قرار می گیرد. در این روش ها تأکید بر یافتن عبارت دقیق برای جواب است. متأسفانه مسائل مهم زیادی در مهندسی و علوم، به خصوص مسائل غیر خطی، وجود دارند که روش های تحلیلی یا در آن ها به کار نمی روند و یا به کار گیری آن ها بسیار مشکل است. در این پایان نامه به حل چند نمونه از معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از روش آنالیز هوموتوپی[۱] می پردازیم.

این پایان نامه شامل چهار فصل به صورت زیر است

در فصل اول برخی مفاهیم و تعاریف اولیه در معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه می شود. در فصل دوم به معرفی روش آنالیز هوموتوپی پرداخته شده و ساختار کلی این روش بیان می شود. در فصل سوم کاربردهایی از روش آنالیز هوموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه شده است. در فصل چهارم به حل مسأله شکار و شکارچی و تجزیه اُزن مرتبه دوم در

۱- Homotopy analysis method

محلول آبدار و معادله زاخاروف[1] با استفاده از روش آنالیز هوموتوپی اختصاص دارد و با ارائه ی مثال هایی، کارایی این روش نشان داده شده است. برنامه های کامپیوتری این روش برای معادلات فصل چهار در پیوست ارائه گردیده است.

۱- Zakharov- Kuznetsov

فصل اول

تعاریف ومفاهیم اولیه
در معادلات دیفرانسیل جزئی

۱– ۱ مقدمه

۱– ۲ تعاریف و مفاهیم اساسی

۱– ۳ شرایط اولیه و مرزی برای معادله دیفرانسیل جزئی

۱– ٤ بعضی معادله های مهم

۱– ۵ دسته بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

۱– ٦ دسته بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با n متغیر مستقل

۱– ۷ تشکیل معادله از طریق حذف ثابتهای اختیاری

۱– ۸ تشکیل معادله از طریق حذف توابع اختیاری

۱– ۹ منشأ معادلات دیفرانسیل جزئی

۱- ۱ مقدمه

در بسیاری از پدیده ها پارامترها و متغیرهایی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم برآن پدیده با یکدیگر ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی، منجر به یک معادله تابعی می شود و معادله تابعی حاصل از پدیده هایی که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغییر مستقل مطالعه می شود، یک معادله دیفرانسیل است. اگر تابع فقط به یک متغیر مستقل بستگی داشته باشد، معادله دیفرانسیل معمولی[۱] و اگرتعداد متغیرهای مستقل بیش از یکی باشد، معادله دیفرانسیل جزئی [۲] است.

معادلات دیفرانسیل جزئی عموماً در فیزیک محیط های پیوسته ظاهر می شود، مانند مسائل مشتمل برمیدان های الکتریکی، دینامیک سیالات، پخش و حرکت موج نظریه ی معادلات دیفرانسیل جزئی با نظریه ی معادلات دیفرانسیل معمولی بسیار متفاوت و تقریباً از هر لحاظ بسیار مشکل تر است.

به عنوان یک مثال ساده از معادلات دیفرانسیل جزئی، به دمای اتاقی که در آن نشسته اید توجه کنید. واضح است که دمای اتاق از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می کند، یعنی تابعی بر حسب مختصات دکارتی x، y و z است. همچنین دما با زمان نیز تغییر می کند. بنابراین آن را می توان به صورت $u\,(x, y, z, t)$ نوشت.

در این فصل به ارائه ی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در معادلات دیفرانسیل جزئی می پردازیم.

۱-۲ تعاریف و مفاهیم اساسی

۱-۲-۱ تعریف معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

این گونه معادلات در هندسه و فیزیک هنگامی پدید می آیند که تعداد متغیرهای مستقل در مسأله ی مورد بحث بیشتر از یکی باشد. در هر معادله دیفرانسیل جزئی، متغیر وابسته (تابع مجهول)، حداقل باید به دو متغیر مستقل وابسته باشد.

هنگامی که قوانین فیزیک را برای مسایلی از این نوع به کار می بریم، بعضی اوقات رابطه ای مانند

---

[۱] – Ordinary Differential Equation

[۲] - Partial Differential Equation

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = ۰, \qquad (۱-۱)$$

بین تابع و مشتقات آن به دست آید. چنین رابطه ای، که مشتقات جزئی را به هم ربط می دهد، به یک معادله دیفرانسیل یا مشتقات جزئی موسوم است.[۵۰]

نماد گذاری : گاهی مشتقات جزئی را به گونه ای می نویسیم که متغیرهای مستقل در آن ظاهر می شود. به عنوان مثال، به جای $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}$ به ترتیب می نویسیم u_x ، u_{xx} ، u_{xy} و غیره.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می توان از نظر مرتبه، خطی بودن و همگن بودن مانند معادلات دیفرانسیل معمولی دسته بندی کرد.

۱-۲-۲ تعریف

مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، مرتبه ی بالاترین مشتق جزئی است که در معادله ظاهر می شود.

۱-۲-۳ مثال

معادله

$$x\, u_x^۲ - y u_y = ۰ ,$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول، معادله

$$u_{xx} + ۲x\, u_{xy} + u_{xy} + u_{yy} = e^y,$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم، و معادله

$$u_{xxy} + x\, u_{yy} + ۸u = ۷y .$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه سوم است. در این معادلات x و y متغیرهای مستقل هستندو $u(x,y)$ متغیر وابسته ای است که از حل معادله به دست می آید.

۱-۲-٤ تعریف

یک معادله دیفرانسیل جزئی را خطی گوییم، اگر درجه هر جمله نسبت به تابع مجهول و همه مشتق های موجود آن یک باشند، و جمله هایی شامل حاصلضرب تابع مجهول و مشتق های آن در معادله وجود نداشته باشد و اگر نسبت به بالاترین مشتق مرتب شده تابع مجهول خطی باشد، شبه خطی گویند. معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد، غیر خطی نامیده می شود.

۱-۲-۵ مثال

معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰, \qquad (۲-۱)$$

$$u_x u_{xx} + x u_{yy} = siny, \qquad (۳-۱)$$

$$u u_{xx} + u_y^۲ = u^۲ + y\,. \qquad (۴-۱)$$

(۱-۲)، معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دو، (۱-۳)، معادله دیفرانسیل جزئی شبه خطی مرتبه دو و (۱-۴)، معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی مرتبه دو است.

۱-۲-۶ تعریف

یک معادله ی دیفرانسیل جزئی را همگن گویند در صورتی که هر جمله ی آن شامل متغیر وابسته، و یا یکی از مشتق های آن باشد به عنوان مثال معادله ی لاپلاس در دو بعد (یعنی با دو متغیر مستقل)

$$\nabla^۲ u = ۰,$$

که در آن $\nabla^۲$ عملگر دو بعدی لاپلاس است، (در مختصات دکارتی (x,y) به شکل $\nabla^۲ = \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}$ تعریف می شود.) معادله همگن است اما معادله ی دو بعدی پواسون

$$\nabla^۲ u = f(x,y),$$

که در آن $f(x,y)$ تابع (غیر صفر) مفروضی است، معادله ی ناهمگن است.

۱-۲-۷ تعریف

منظور از یک جواب برای یک معادله دیفرانسیل جزئی در ناحیه ی D، از متغیرهای مستقل، تابعی است که در D، دارای همه ی مشتقات جزئی موجود در معادله و صادق در آن باشد. این جواب را می توان از نظر هندسی به عنوان یک رویه در فضای متغیرهای مستقل تعبیر نمود. همچنین مشابه معادلات دیفرانسیل معمولی، ترکیب خطی هر دو جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی و خطی همگن نیز یک جواب معادله خواهد بود. در حالت کلی اگر شرایط اولیه و مرزی را در نظر نگیریم، تعداد جواب های یک معادله دیفرانسیل جزئی بسیار زیاد و متنوع می باشد. مثلاً توابع زیر همگی جواب های معادله ی $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$ هستند

$$u = e^x siny\,, \qquad u = cosx\,coshy\,, \qquad u = sinx\,coshy\,,$$

$$u = x^۳ - ۳xy^۲, \quad u = Arctg\,\frac{y}{x}\,, \qquad u = Ln(x^۲ + y^۲),$$

اما اگر شرایط مرزی و اولیه ی خاصی را در نظر بگیریم، آنگاه جواب یکتایی برای هر معادله به دست می آید.[۵۱]

به طور کلی حل معادلات دیفرانسیل جزئی خیلی مشکل تر از حل معادلات دیفرانسیل معمولی است و به جز در انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل جزئی خطی، هیچ راه حل عمومی برای حل آنها در

دست نیست. معادلات دیفرانسیل جزئی خطی و غیرخطی در اغلب رشته های فیزیک، شیمی و مهندسی کاربردهای بسیار متنوعی دارند. برای این که علت وقوع معادلات دیفرانسیل جزئی در توصیف پدیده ها در طبیعت را درک کنیم، یادآور می شویم که بیشتر رویدادها و فرآیندهای فیزیک با توابعی شامل دو متغیر مستقل و یا بیشتر توصیف می شوند. متغیرهای معمول عبارتند از x،y و z مربوط به فضا و t برای زمان. در نتیجه هر رابطه ای بین تابعی مانند $u(x,y,z,t)$ با مشتق های آن نسبت به یک یا چند متغیر مستقل، یک معادله دیفرانسیل جزئی نامیده می شود.

بررسی ریاضی معادلات دیفرانسیل جزئی، درجهت شناخت آن دسته از معادلاتی بوده است که عموماً به عنوان معادلات دیفرانسیل جزئی ریاضی فیزیک شناخته می شوند. حیطه ی ریاضی فیزیک در این زمینه را باید به مفهوم وسیع کلمه، یعنی توصیف پدیده های طبیعی به زبان ریاضی تعبیر کرد. بنابراین نه تنها معادلات مهم فیزیک نظری نوین (مانند، معادلات شرودینگر و دیراک در نظریه ی کوانتومی) بلکه معادلات مهم ریاضیات کاربردی و مهندسی (مانند، معادله ی رسانش گرمایی یا معادله ی پخش، معادلات شار چسبنده و معادلات دیگر) نیز در زمره ی این معادلات اند. غالباً یک معادله در شرایط فیزیکی مختلف به صورتهای متنوعی ظاهر می شود. با این حال این امر که بسیاری از معادلات مهم ریاضی فیزیک نه تنها خطی بلکه از نوع دوم اند هم جالب توجه است و هم رضایت بخش. اما این مطلب به این معنی نیست که بگوییم انواع دیگر معادلات پیش نمی آیند. برای مثال معادله ی دیراک در مکانیک کوانتومی خطی از مرتبه ی اول است در حالی که معادلات نسبیت عام که میدان گرانشی را توصیف می کنند از مرتبه دوم خطی هستند. به همین ترتیب معادله مهمی در کشسانی (معادله دو هماهنگ) معادله ای خطی ولی از مرتبه ی چهارم است. پیچیدگی حل یک معادله ی خطی، علاوه بر بستگی به مرتبه ی معادله، بستگی زیادی به تعداد متغیرهای مستقل معادله دارد. از نظر پیچیدگی ریاضی، معادلات دیفرانسیل جزئی دو متغیره در حد وسط بین معادله دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی، با سه متغیر مستقل یا بیشتر قرار دارند.

مهم ترین اختلاف بین جواب معادلات دیفرانسیل جزئی و جواب معادلات دیفرانسیل معمولی از آن جا ناشی می شود که جواب کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی شامل ثابتهای اختیاری است در حالی که جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی شامل توابع دلخواه است. برای نشان دادن این مطلب، معادله زیر را در نظر می گیریم

$$u = yf(x)\,, \qquad (۵-۱)$$

که در آن $f(x)$ تابع دلخواهی از x است. آنگاه با مشتق گیری از آن نسبت به y خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)\,, \tag{۱–۶}$$

اکنون با حذف $f(x)$ بین (۱–۵) و (۱–۶)، به دست می آوریم

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = u\,, \tag{۱–۷}$$

که یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ی اول است و جواب عمومی آن معادله ی (۱–۵) است. در این جا نکته ی مهم این است که جواب معادله های (۱–۷) که به صورت (۱–۵) داده شده، یک تابع دلخواه است. به همین ترتیب اگر داشته باشیم

$$u = f(x+y) + g(x-y)\,, \tag{۱–۸}$$

که در آن $f(x+y)$ و $g(x-y)$ به ترتیب توابع دلخواهی از $x+y$ و $x-y$ هستند، آن گاه خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+y) + g'(x-y)\,, \tag{۱–۹}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+y) + g''(x-y)\,, \tag{۱–۱۰}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x+y) - g'(x-y)\,, \tag{۱–۱۱}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(x+y) + g''(x-y). \tag{۱–۱۲}$$

از مساوی قرار دادن (۱–۱۰) و (۱–۱۲)، و در نتیجه با حذف توابع دلخواه، یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به دست می آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,. \tag{۱–۱۳}$$

بنابراین تابع u که بوسیله ی (۱–۸) تعریف شده است، صرف نظر از صورت های تابعی $f(x+y)$ و $g(x+y)$ ، در (۱–۱۳) صدق می کند، البته به شرطی که f و g توابع دست کم دو بار مشتق پذیر باشند. برای مثال معادلات زیر

$$u = sin(x+y) + e^{x-y}\,, \qquad u = (x+y)^3 + \tan(x+y). \tag{۱–۱۴}$$

هر دو، جوابهای (۱-۱۳) هستند. مانند مثال قبل، جواب عمومی (۱-۱۳) که به صورت (۱-۸) داده شده، شامل توابع دلخواهی است.
در اکثر موارد جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل جزئی، کاربرد چندانی ندارد، زیرا این جواب باید در شرایط دیگری موسوم به شرایط مرزی یا اولیه که از فیزیک مسأله ناشی می شود، صدق کند.

۱-۳ شرایط اولیه و مرزی برای معادله دیفرانسیل جزئی

برای به دست آوردن جواب هر معادله دیفرانسیل جزئی شرایط اضافی دیگری نیز باید در دست باشد و معمولاً این شرایط به صورت مقدار مرزی روی تمام یا قسمتی از مرز ناحیه ای که جواب را در آن جستجو می کنیم بیان می شود. این شرایط ممکن است شرایط اولیه و یا شرایط مرزی باشد. شرایط مرزی، تابع را روی مرز تعیین شده توصیف می کنند و شرایط اولیه ی تابع مجهول را در سراسر ناحیه ی مفروض در زمان آغازی معین می کنند.

۱-۳-۱ مثال

معادله ی زیر را با شرایط داده شده در نظر می گیریم [۵٤]

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

شرط اولیه
$$u(x,0) = cosx \ , \quad 0 \le x \le 1,$$

شرط مرزی
$$u(0,t) = 0 \ , \quad t \ge 0,$$

شرط مرزی
$$u(1,t) = 0 \ , \quad t \ge 0,$$

معادله فوق، هدایت حرارت در میله ای به طول ۱ را توصیف می کند، همراه این معادله با مشتقات جزئی سه شرط داده شده است. این گونه مسائل به مسأله مقدار مرزی موسوم هستند.
از نقطه نظر ریاضی، زمان و مختصات فضایی به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته می شوند. بدین ترتیب در این مثال شرط اولیه مقدار تابع در $t = 0$ و شرایط مرزی مقدار تابع در دو نقطه روی محور x در زمان t می باشد. شرایط اولیه معمولاً در زمان مشخص $t = t_0$ و یا $t = 0$ تعیین می شوند و در نظر گرفتن شرایط در نقطه ی انتهایی دیگر بازه ی زمانی مفروض، مرسوم نیست. در موارد بسیاری علاوه بر شرایط اولیه و مرزی، عوامل تعیین کننده ای هستند که با توجه به آن می توان روش عددی مناسبی برای یافتن جواب تقریبی معادله انتخاب کرد.

۴-۱ بعضی معادله های مهم

مثال هایی از قوانین فیزیک که به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی منجر می شوند عبارتند از

معادله گرما، $\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t},$

معادله شرودینگر، $\nabla^2 u + \alpha[E - V(x,y,z)]u = 0,$

معادله هلم هلتز، $\nabla^2 u + \lambda u = 0,$

معادله موج، $\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (c = \text{ثابت})$

معادله لاپلاس، $\nabla^2 u = 0,$

معادله پواسون، $\nabla^2 u = f(x,y,z),$

معادله موج دو هماهنگ، $\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = -\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$

معادله دو هماهنگ، $\nabla^4 u = 0,$

معادله کلین – گوردن، $\Box u + \lambda^2 u = 0,$

که در آن عملگر$\Box$ ، به آلمبرت موسوم است و به صورت زیر تعریف می شود

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

در تمام این معادلات ∇^2 عملگر لاپلاس با دو یا سه متغیر مستقل است و در مختصات دکارتی سه بعدی به صورت زیر است

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

و t متغیر زمان است، و نیز c، k، λ، p، α و E ثابتهایی هستند که تعبیر فیزیکی آنها را (همانند متغیر وابسته u) مسأله ی خاص مورد نظر تعیین می کند. تابعهای f و V معلوم هستند.

در واقع این قوانین پدیده های فیزیکی را به وسیله ی ارتباط آن با فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می دهند. وجود مشتقات در این معادلات بدین خاطر است که مشتقات، فرآیندهایی طبیعی مانند سرعت، شتاب، نیرو، اصطکاک، شار و شدت جریان را نمایش می دهند.

۱–۵ دسته بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

شکل کلی یک معادله ی دیفرانسیل جزئی شبه خطی مرتبه ی دوم به صورت زیر است

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\,\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g, \tag{۱–۱۵}$$

که در آن a،b، c، d، e، f، و g توابعی بر حسب x، y، u ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، و $\frac{\partial u}{\partial y}$ هستند. برای ساده سازی صورت معادله ، قرار می دهیم [۱۱و۲٤]

$$p=\frac{\partial u}{\partial x},\quad q=\frac{\partial u}{\partial y}\,,\quad r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\quad s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\,,\quad t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{۱–۱٦}$$

$$w=g-d\frac{\partial u}{\partial x}-e\frac{\partial u}{\partial y}-fu\,.$$

بنابراین معادله (۱–۱۵) را می توان به صورت ساده تر زیر نوشت

$$ar+bs+ct=w\,. \tag{۱–۱٦}$$

۱–۵–۱ تعریف

منحنی های مشخصه، منحنی هایی هستند که روی آنها بالاترین مراتب مشتق، (در اینجا مشتقات مرتبه ی دومr، s و t) به صورت یکتا معین نیستند.

۱–۵–۲ تعریف

معادله دیفرانسیل مشخصه، معادله ای است که منحنی های مشخصه جوابهای آن هستند. معادله ی مشخصه ی هر معادله دیفرانسیل جزئی ابزار اصلی دسته بندی آن است.

با توجه به تعریف p و q ،دیفرانسیل های آنها به صورت زیر خواهند بود

$$dp=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy\quad\Rightarrow dp=rdx+sdy\,, \tag{۱–۱۷}$$

$$dq=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\quad\Rightarrow dq=sdx+tdy\,, \tag{۱–۱۸}$$

در ارتباط با مقادیرr، s و t سه معادله ی (۱–۱٦)، (۱–۱۷)، و (۱–۱۸) را می توان به صورت دستگاه زیر نوشت

$$\begin{cases}ar+bs+ct=w,\\(dx)r+(dy)s=dp,\\(dx)s+(dy)t=dq.\end{cases} \tag{۱–۱۹}$$

دستگاه (۱–۱۹) بر حسب s، r و t است. برای این که جواب یکتا نباشد دترمینان ضرایب باید صفر شود. بنابراین منحنی های مشخصه جواب معادله ی زیر هستند

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0\,, \tag{۲۰–۱}$$

در واقع برای به دست آوردن جواب یکتا، منحنی هایی را که در معادله ی (۱–۲۰) صدق می کنند، انتخاب نمی کنیم. از معادله ی (۱–۲۰) معادله دیفرانسیل زیر به دست می آید

$$a(dy)^2 - bdx\,dy + c(dx)^2 = 0\,, \tag{۲۱–۱}$$

با تقسیم طرفین رابطه ی (۱–۲۱) بر $(dx)^2 \neq 0$ ، داریم

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + c = 0\,, \tag{۲۲–۱}$$

معادله ی (۱–۲۲) معادله مشخصه ی (۱–۱۵) نامیده می شود. ریشه های این معادله شیب های منحنی های مشخصه هستند و هر جواب آن یک منحنی مشخصه ی معادله فوق می باشد. این معادله یک معادله ی درجه ی دوم بر حسب $\frac{\partial y}{\partial x}$ است و برای آن می توان سه حالت زیر را در نظر گرفت

۱- اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ، آنگاه معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است و منحنی مشخصه ی آن از نوع هذلولوی است.

۲- اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، آنگاه یک منحنی مشخصه خواهیم داشت و معادله از نوع سهموی است.

۳- اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، آنگاه معادله دارای دو ریشه مختلط است و معادله از نوع بیضوی است.

۱–۵–۳ مثال

معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 = 0,$$

برای این معادله $\Delta = b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$ و معادله از نوع سهموی است.

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

$$\Delta = 4x^2y^2 > 0,$$

این معادله به جز روی محورهای مختصات $x = 0$ و $y = 0$ ، هذلولوی است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\Delta = -4x,$$

مقدار Δ به x بستگی دارد.

۱- اگر $x > 0$ ، آنگاه $\Delta < 0$ و معادله از نوع بیضوی است،

۲- اگر $x = 0$ ، آنگاه $\Delta = 0$ و معادله از نوع سهموی است،

۳- اگر $x < 0$ ، آنگاه $\Delta > 0$ و معادله از نوع هذلولوی است.

۱-۶ دسته بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با n متغیر مستقل

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با n متغیر مستقل x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n را درنظر می گیریم

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n}\right), \qquad (۱-۲۳)$$

که در آن $a_{i,j}$ ها توابعی بر حسب x_i ها، و یا ثابت هستند. هم چنین سمت راست معادله فوق ممکن است غیر خطی باشد. اگر $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ ، در این صورت قسمت اصلی معادله می تواند طوری مرتب شود که داشته باشیم $a_{i,j} = a_{j,i}$.

لذا ماتریس $n \times n$، $A = [a_{i,j}]$، یک ماتریس متقارن است. می دانیم که هر ماتریس حقیقی متقارن $n \times n$، دارای n مقدار ویژه حقیقی است. این مقادیر ویژه که ممکن است بعضی از آنها تکراری باشند، جواب های معادله $det(A - \lambda I) = 0$ هستند. فرض می کنیم p تعداد مقادیر ویژه مثبت ماتریس A و z تعداد مقادیر ویژه صفر ماتریس A باشد. در نتیجه معادله (۱-۲۳) را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد

۱- اگر $z > 0$ ، یعنی حداقل یک مقدار ویژه صفر داشته باشد، ($detA = 0$)، معادله (۱-۲۳) از نوع سهموی است.

۲- اگر $z = 0$ و $p = 1$ یا $z = 0$ و $p = n - 1$ ، معادله از نوع هذلولوی است.

۳- اگر $z = 0$ و $p = n$ یا $z = 0$ و $p = 0$ ، یعنی همه مقادیر ویژه مثبت یا منفی باشند، در این صورت معادله از نوع بیضوی است.

۱-۶-۱ مثال

معادله دیفرانسیل جزئی با سه متغیر مستقل زیر را در نظر می گیریم

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 15\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

داریم